Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Н. Шананина, Полиномиальные модели степени 5 и алгебры их автоморфизмов, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 5, 757–772

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm69>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 14:59:41

УДК 514.74

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ СТЕПЕНИ 5 И АЛГЕБРЫ ИХ АВТОМОРФИЗМОВ

Е. Н. Шананина

В вопросах классификации и изучения голоморфных автоморфизмов поверхностей часто оказывается удобным перейти к рассмотрению касательной модельной поверхности. Этот метод хорошо разработан для поверхностей типа (n, K) при $K \leq n^2$, для которых строится касательная квадрака – поверхность, заданная уравнениями степени 2, с рядом полезных свойств. В последние годы для поверхностей более высокой коразмерности были построены также касательные модельные поверхности степеней 3 и 4 с аналогичными свойствами. Однако на коразмерность при этом возникают новые ограничения. В данной работе этот метод применен для поверхностей еще более высокой коразмерности. Построены модельные поверхности пятой степени. Показано, что все основные полезные свойства модельной поверхности сохраняются, несмотря на ряд возникающих технических затруднений.

Библиография: 9 названий.

Введение. В изучении вещественных подмногообразий комплексного пространства и их голоморфных автоморфизмов большую роль играет касательная квадрака. (Этим вопросам было посвящено много работ; например, назовем [1]–[3]). Квадрика обладает рядом полезных свойств, делающих ее удобной для изучения биголоморфных отображений поверхностей.

1) Каждому порождающему ростку вещественно-аналитического подмногообразия комплексного пространства соответствует некоторая касательная квадрака.

2) Если квадрака невырождена в смысле [2], то группа ее голоморфных автоморфизмов конечномерна.

3) Квадрика однородна, т.е. группа ее автоморфизмов транзитивна.

4) Алгебра инфинитезимальных автоморфизмов невырожденной квадраки состоит из полей с полиномиальными коэффициентами, чья степень не превышает 2.

5) Группа ее биголоморфных автоморфизмов есть подгруппа группы бирациональных преобразований объемлющего пространства. Существует оценка на степени числителей и знаменателей. Она зависит от размерности комплексной касательной и коразмерности квадраки (и исходного ростка). А именно, степень не превышает $4(n + K)$, где K – коразмерность, а n – размерность комплексной части касательного пространства; поверхность является CR -многообразием типа (n, K) .

6) Квадрика обладает следующим экстремальным свойством: размерность группы биголоморфных автоморфизмов произвольной поверхности мажорируется размерностью группы биголоморфных автоморфизмов ее касательной квадраки.

7) Если две квадраки биголоморфно эквивалентны, то они линейно эквивалентны.

8) Квадрика обладает естественной структурой группы Ли.

Поэтому, если многообразию соответствует невырожденная квадрика, исследование его свойств сильно упрощается. Но условие невырожденности квадрики накладывает ограничение на коразмерность ростка: $K \leq n^2$. Хотелось бы иметь модельную поверхность, аналогичную квадрике, и в случае большей коразмерности. В работе [4] построены такие модельные поверхности степеней 3 и 4, задающиеся в некоторых координатах уравнениями вида

$$\operatorname{Im} w = F(z, \bar{z})$$

где F – вектор-многочлен степени 3 при $n^2 < K \leq n^2 + n^2(n+1)$ и степени 4 при $n^2 + n^2(n+1) < K \leq n^2 + n^2(n+1) + n^2(n+1)(7n+11)/12$, однако здесь снова возникают ограничения на коразмерность. Там же предложены и модели CR -многообразий более высоких степеней, правда, без выполнения свойства 1, т.е. универсальности. Как показано в работе автора [5], уже для поверхностей типа $(1, 7)$ (минимальная ситуация, в которой не хватает четвертой степени, и появляется степень 5) не удастся в общем случае построить модель такого вида. Однако, если разрешить правой части зависеть от $\operatorname{Re} w$, мы снова можем построить модельную поверхность с требуемыми свойствами. Наличие $\operatorname{Re} w$ в уравнениях модели несколько меняет доказательство конечномерности алгебры инфинитезимальных автоморфизмов, так как, например, становится невозможным применение теоремы об экспоненциальном представлении [6], однако все свойства, аналогичные вышеперечисленным, продолжают выполняться. В данной работе снова изучается ситуация, в которой в уравнениях модели появляется степень 5, однако на этот раз в случае произвольной размерности комплексной касательной, т.е. CR -многообразия типа $(n, k_2 + k_3 + k_4 + k)$. (Здесь k_j – размерность пространства вещественных однородных многочленов степени j от $z, \bar{z}$, чье разложение по бистепеням не содержит компонент $(j, 0)$ и $(0, j)$; $k \leq k_5 + k_2 k_3$; как подсчитано в [4], $k_2 = n^2$, $k_3 = n^2(n+1)$, $k_4 = n^2(n+1)(7n+11)/12$, $k_5 = n^2(n+1)(n+2)(3n+5)$.) В п. 1 строятся модели степени 5. Невырожденность поверхности определим аналогично тому, как это сделано в работах [4], [5], [7]: после некоторых замен координат потребуем максимального ранга на уровне 4-струи и линейной независимости на уровне 5-струи.

Это условие можно переформулировать и в инвариантных терминах. Нужно потребовать принадлежности к минимально возможному при данной коразмерности (конечно-му) типу по Блуму–Грэхму [8], т.е. к типу $(l_1, l_2, \dots, l_K)$, где $l_j = 2$ при $j = 1, \dots, k_2$; $l_j = 3$ при $j = k_2 + 1, \dots, k_2 + k_3$; $l_j = 4$ при $j = k_2 + k_3 + 1, \dots, k_2 + k_3 + k_4$; $l_j = 5$ при $j = k_2 + k_3 + k_4 + 1, \dots, k_2 + k_3 + k_4 + k = K$. В п. 2 доказывается конечномерность алгебры инфинитезимальных автоморфизмов модели и полиномиальность касательных голоморфных векторных полей, выводятся оценки на степень полей и размерность алгебры. В п. 3 проверяются бирациональность автоморфизмов, экстремальное свойство модели, линейная эквивалентность биголоморфно эквивалентных моделей, а также свойство однородности. Таким образом, доказывается следующая основная

ТЕОРЕМА. *Невырожденная модельная поверхность пятой степени типа $(n, k_2 + k_3 + k_4 + k)$, $k \leq k_5 + k_2 k_3$, является “хорошей” модельной поверхностью, а именно:*

- 1) группа автоморфизмов невырожденной модели конечномерна (см. предложение 2.1);
- 2) всякому невырожденному порождающему ростку (или, что то же самое, ростку типа $(l_1, l_2, \dots, l_K)$ по Блуму–Грэхму, где $l_j = 2$ при $j = 1, \dots, k_2$,

- $l_j = 3$ при $j = k_2 + 1, \dots, k_2 + k_3$, $l_j = 4$ при $j = k_2 + k_3 + 1, \dots, k_2 + k_3 + k_4$, $l_j = 5$ при $j = k_2 + k_3 + k_4 + 1, \dots, k_2 + k_3 + k_4 + k = K$) соответствует касательная модельная поверхность пятой степени (см. в п. 1 определение 2 касательной модельной поверхности и предложение 1);
- 3) модельная поверхность пятой степени однородна, т.е. группа ее автоморфизмов транзитивна (см. предложение 3.2);
 - 4) алгебра инфинитезимальных автоморфизмов невырожденной модельной поверхности состоит из полей с полиномиальными коэффициентами, чья степень не превышает $k + 5$ (см. предложение 2.2);
 - 5) группа ее автоморфизмов есть подгруппа группы бирациональных преобразований объемлющего пространства; существует оценка на степени числителей и знаменателей, зависящая от размерности комплексной касательной и коразмерности данной модельной поверхности (см. предложение 3.4);
 - 6) невырожденная модельная поверхность обладает следующим экстремальным свойством: размерность группы произвольной поверхности мажорируется размерностью группы ее касательной модельной поверхности (см. предложение 3.1);
 - 7) если модельные поверхности биголоморфно эквивалентны, то они линейно эквивалентны (см. предложение 3.5);
 - 8) модельная поверхность обладает естественной структурой группы Ли (см. предложение 3.3).

ЗАМЕЧАНИЕ. Конечномерность алгебры можно было бы получить и с помощью теоремы 2 из [9].

Действительно, требование конечного типа по Блуму–Грэхму выполнено, а требование конечной невырожденности при нашем типе выполняется автоматически (уже форма Леви невырождена, а значит, у нас имеется 1-невырожденность). Однако чтобы получить полиномиальность полей, приходится заняться непосредственным вычислением алгебры.

1. Построение модели. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}^{n+k_2+k_3+k_4+k}$ с координатами $z \in \mathbb{C}^n$, $w_j = x_j + iy_j \in \mathbb{C}^{k_j}$, $j = 1, \dots, 4$; $w_5 = x_5 + iy_5 \in \mathbb{C}^k$ – порождающий росток вещественно-аналитического CR -многообразия типа (n, K) , $K = k_2 + k_3 + k_4 + k$ (т.е. с n -мерной комплексной касательной), заданный в нуле уравнениями

$$y = F(z, \bar{z}, x).$$

Применив, если нужно, аффинную замену координат, будем дальше считать, что функция F обращается в начале координат в нуль вместе со своими первыми производными.

Далее везде для записи степени будем использовать сокращенные обозначения. Так, запись $z^{\alpha_1} \bar{z}^{\alpha_2} x_2^{\beta_2} x_3^{\beta_3} x_4^{\beta_4} x_5^{\beta_5}$ будет означать полилинейную форму степени α_1 по $z_1, \dots, z_n$, степени α_2 по $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$, степеней β_j по переменным соответствующих групп x_j , $j = 2, \dots, 5$.

Введем градуировку, задавая веса переменных так: $[z] = [\bar{z}] = 1$, $[w_j] = [x_j] = j$, $j = 2, \dots, 5$.

Так как линейных членов F не содержит, компоненты веса 1 нет. Рассмотрим теперь вторую весовую компоненту F_2 . Она содержит члены, зависящие только от $z, \bar{z}$

вида z^2 , $\bar{z}^2$ и $z\bar{z}$. Квадратичной заменой $w \mapsto w + C_2(z, z)$, где C_2 – некоторая квадратичная форма от z , уберем члены при z^2 и $\bar{z}^2$. Оставшуюся (эрмитову) компоненту обозначим $F_{11}(z\bar{z})$. Так как y K -мерен, это K -компонентная эрмитова вектор-форма. Для невырожденности потребуем от координатных компонент этой формы, чтобы их вещественная линейная оболочка составляла все пространство эрмитовых форм от $z, \bar{z}$. Поскольку это пространство k_2 -мерно, а размерность y_2 в нашем случае также равна k_2 , то, перенумеровывая при необходимости координаты y , добьемся того, чтобы базис в пространстве эрмитовых форм образовывали именно те координатные компоненты, которые относятся к y_2 . Теперь, вычитая из уравнений для y_3, y_4, y_5 линейные комбинации уравнений для y_2 (т.е. совершая линейную замену $w_j \mapsto w_j + r_j w_2$, $j = 3, 4, 5$), уберем вторую весовую компоненту из уравнений для y_3, y_4, y_5 .

Дальше в уравнениях для y_3, y_4, y_5 преобразуем компоненту веса 3. Здесь у нас есть члены видов z^3 , $\bar{z}^3$, $z^2\bar{z}$, $z\bar{z}^2$, zx_2 и $\bar{z}x_2$. От компонент z^3 , $\bar{z}^3$ избавимся заменой $w \mapsto w + C_3(z, z, z)$, где C_3 – некоторая кубическая форма от z ; от zx_2 и $\bar{z}x_2$ – заменой $w \mapsto w + D_1(z, w_2)$, где D_1 – билинейная форма от z, w_2 . Теперь в весе 3 остаются только члены видов $z^2\bar{z}$ и $z\bar{z}^2$, которые будем обозначать через $F_{21}(z^2\bar{z})$ и $F_{12}(z\bar{z}^2)$ соответственно (здесь F_{21} и F_{12} – $(K - k_2)$ -мерные полилинейные формы от $z, \bar{z}$). Для невырожденности снова потребуем, чтобы вещественная линейная оболочка их координатных компонент составляла все пространство вещественных однородных многочленов степени 3 от $z, \bar{z}$, чье разложение по бистепеням не содержит компонент z^3 и $\bar{z}^3$. Снова, перенумеровывая при необходимости координаты y , добьемся того, чтобы базис образовывали именно те координатные компоненты, которые относятся к y_3 . Вычитая из уравнений для y_4, y_5 линейные комбинации уравнений для y_3 (т.е. совершая линейную замену $w_j \mapsto w_j + sw_3$, $j = 4, 5$), уберем компоненту веса 3 из уравнений для y_4, y_5 .

Преобразуем теперь компоненту веса 4 в уравнениях для y_4 и y_5 . Здесь есть z^4 , $\bar{z}^4$, $z^3\bar{z}$, $z\bar{z}^3$, $z^2\bar{z}^2$, z^2x_2 , $\bar{z}^2x_2$, $z\bar{z}x_2$, x_2^2 , zx_3 и $\bar{z}x_3$. От z^4 , $\bar{z}^4$ избавимся заменой $w \mapsto w + C_4(z, z, z, z)$, где C_4 – некоторая форма четвертой степени от z ; от z^2x_2 и $\bar{z}^2x_2$ – заменой $w \mapsto w + D_2(z, z, w_2)$, где D_2 – некоторая полилинейная форма второй степени по z и первой по w_2 ; от $z\bar{z}x_2$ и x_2^2 – заменой $w \mapsto w + D_3(z, w_3)$, где D_3 – некоторая билинейная форма от z и w_3 . От членов $z\bar{z}x_2$ и x_2^2 избавимся с помощью замены $w \mapsto w + D_4(w_2, w_2)$, где D_4 – некоторая квадратичная форма от w_2 . Остаются только члены видов $z^3\bar{z}$, $z\bar{z}^3$ и $z^2\bar{z}^2$, которые будем обозначать через $F_{31}(z^3\bar{z})$, $F_{13}(z\bar{z}^3)$ и $F_{22}(z^2\bar{z}^2)$ соответственно (здесь F_{31} , F_{13} и F_{22} – $(K - k_2 - k_3)$ -мерные полилинейные формы от $z, \bar{z}$). Опять потребуем для невырожденности, чтобы вещественная линейная оболочка их координатных компонент составляла все пространство вещественных однородных многочленов степени 4 от $z, \bar{z}$, чье разложение по бистепеням не содержит компонент z^4 и $\bar{z}^4$. И опять, перенумеровывая при необходимости координаты y , добьемся того, чтобы базис образовывали именно те координатные компоненты, которые относятся к y_4 . Затем вычитаем из уравнений для y_5 линейную комбинацию уравнений для y_4 , т.е. делаем замену $w_5 \mapsto w_5 + sw_3$.

Теперь разложение по весам уравнений для y_5 начинается с пятой компоненты. Преобразуем ее тоже. В весе 5 у нас есть члены следующих видов: z^5 , $\bar{z}^5$, $z^4\bar{z}$, $z\bar{z}^4$, $z^3\bar{z}^2$, $z^2\bar{z}^3$, $z^2\bar{z}x_2$, $z\bar{z}^2x_2$, zx_2^2 , $\bar{z}x_2^2$, z^2x_3 , $\bar{z}^2x_3$, $z\bar{z}x_3$, z^3x_2 , $\bar{z}^3x_2$, x_2x_3 , zx_4 и $\bar{z}x_4$. От z^5 и $\bar{z}^5$ избавимся заменой $w_5 \mapsto w_5 + C_5(z, z, z, z, z)$, где C_5 – некоторая форма пятой степени от z ; от z^3x_2 и $\bar{z}^3x_2$ – заменой $w_5 \mapsto w_5 + D_5(z, z, z, w_2)$, где D_5 – некоторая полилинейная форма третьей степени по z и первой по w_2 ; от z^2x_3 и $\bar{z}^2x_3$ – заменой $w_5 \mapsto w_5 + D_6(z, z, w_3)$, где D_6 – некоторая полилинейная форма второй степени по z ,

первой по w_3 ; от zx_2^2 и $\bar{z}x_2^2$ — заменой $w_5 \mapsto w_5 + D_7(z, w_2, w_2)$, где D_7 — некоторая полилинейная форма первой степени по z и второй по w_2 ; от zx_4 и $\bar{z}x_4$ — заменой $w_5 \mapsto w_5 + D_8(z, w_4)$, где D_8 — некоторая билинейная форма от z и w_4 . От членов $z\bar{z}x_3$, x_2x_3 избавимся заменой $w_5 \mapsto w_5 + D_9(w_2, w_3)$, где D_9 — некоторая билинейная форма от w_2 и w_3 . Теперь для невырожденности потребуем линейной независимости компонент веса 5 для y_5 .

Итак, в весе 5 остались члены видов $z^4\bar{z}$, $z\bar{z}^4$, $z^3\bar{z}^2$, $z^2\bar{z}^3$, $z^2\bar{z}x_2$ и $z\bar{z}^2x_2$. Обозначим их соответственно через $F_{41}(z^4\bar{z})$, $F_{14}(z\bar{z}^4)$, $F_{32}(z^3\bar{z}^2)$, $F_{23}(z^2\bar{z}^3)$, $F_{212}(x_2z^2\bar{z})$ и $F_{122}(x_2z\bar{z}^2)$. Это k -мерные полилинейные формы. По условию невырожденности координатные компоненты суммы $F_{41} + F_{14} + F_{32} + F_{23} + F_{212} + F_{122}$ линейно независимы как многочлены от $z, \bar{z}, x$. Рассмотрим еще сумму $F_{41} + F_{14} + F_{32} + F_{23}$ (ее компоненты могут и не оказаться линейно независимыми; например, они точно не будут линейно независимыми, если $k > k_5$). Рассмотрим вещественную линейную оболочку координатных компонент этой суммы. Выделим в ней базис, состоящий из некоторого набора этих координатных компонент (соответствующие этим выбранным компонентам переменные x_5, y_5, w_5 далее будем называть “жесткими”). Теперь из оставшихся уравнений для y_5 (их будем называть “нежесткими”) вычтем линейную комбинацию уравнений для “жестких” y_5 (такую, чтобы в этих “нежестких” уравнениях совсем избавиться от членов видов $z^4\bar{z}$, $z\bar{z}^4$, $z^3\bar{z}^2$ и $z^2\bar{z}^3$). Заметим, что теперь в “нежестких” уравнениях линейно независимы координатные компоненты $F_{212} + F_{122}$.

Преобразования завершены, дадим теперь

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть в пространстве $\mathbb{C}^{n+k_2+k_3+k_4+k}$ с координатами $z \in \mathbb{C}^n$, $w_j = x_j + iy_j \in \mathbb{C}^{k_j}$, $j = 1, \dots, 4$, $w_5 = x_5 + iy_5 \in \mathbb{C}^k$ задан порождающий росток вещественно-аналитического CR -многообразия типа (n, K) , $K = k_2 + k_3 + k_4 + k$, в окрестности нуля определяемый уравнениями

$$y = F(z, \bar{z}, x).$$

Выделим в этих уравнениях компоненты веса ≤ 5 и обозначим их через $\Phi(z, \bar{z}, x)$. Получим

$$y = \Phi(z, \bar{z}, x) + \dots$$

Пусть после описанных в этом пункте преобразований координатные компоненты $\Phi(z, \bar{z}, x)$ линейно независимы. Тогда будем называть это вещественно-аналитическое CR -многообразие типа $(n, k_2 + k_3 + k_4 + k)$ *невырожденным*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. В условиях и обозначениях определения 1 поверхность, заданную уравнениями

$$y = \Phi(z, \bar{z}, x),$$

будем называть (*невырожденной*) *касательной модельной поверхностью* для нашего ростка.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие линейной независимости форм веса 5 для y_5 (традиционное для модельных поверхностей условие невырожденности) в нашем случае (когда $l_j = 2$ при $j = 1, \dots, k_2$; $l_j = 3$ при $j = k_2 + 1, \dots, k_2 + k_3$; $l_j = 4$ при $j = k_2 + k_3 + 1, \dots, k_2 + k_3 + k_4$, т.е. формы для y степеней 2, 3, 4 образуют базис в соответствующих пространствах) равносильно принадлежности поверхности к типу $(l_1, l_2, \dots, l_K)$ по Блуму–Грэхму

(т.е. тому, что также $l_j = 5$ при $j = k_2 + k_3 + k_4 + 1, \dots, k_2 + k_3 + k_4 + k = K$). Действительно, если формы веса 5 оказываются линейно зависимы, это означает, что после некоторой линейной замены координат мы можем получить одну из координат y_j без весовых компонент 2, 3, 4, 5, что означает принадлежность к большему типу, конечно-му или бесконечному. Если же формы линейно независимы, то принадлежность к типу $(l_1, l_2, \dots, l_K)$ можно проверить, например, непосредственно вычисляя коммутаторы. (Или, зная наперед, что алгебра инфинитезимальных автоморфизмов конечномерна, а при доказательстве конечномерности мы будем пользоваться именно линейной независимостью, можно воспользоваться теоремой 3 работы [9] и получить конечность типа. А так как модельная поверхность задается однородными уравнениями веса 5, этот тип не может быть больше, чем $(l_1, l_2, \dots, l_K)$.) Заметим также, что требование линейной независимости (принадлежности к типу $(l_1, l_2, \dots, l_K)$) накладывает очередное ограничение на коразмерность: $K \leq k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_2 k_3$.

Итак, доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть M – росток порождающего вещественно-аналитического CR -многообразия типа $(n, k_2 + k_3 + k_4 + k)$, невырожденного в смысле определения 1. Тогда полиномиальной (степени не выше 5) заменой координат уравнения, задающие поверхность, приводятся к виду

$$\begin{aligned} y_2 &= F_{11}(z\bar{z}) + O(3), \\ y_3 &= 2 \operatorname{Re} F_{21}(z^2\bar{z}) + O(4), \\ y_4 &= 2 \operatorname{Re} F_{31}(z^3\bar{z}) + F_{22}(z^2\bar{z}^2) + O(5), \\ y_5 &= 2 \operatorname{Re}(F_{41}(z^4\bar{z}) + F_{32}(z^3\bar{z}^2) + F_{212}(x_2 z^2\bar{z})) + O(6). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $F_{pq}(z^p\bar{z}^q)$ обозначает полилинейную форму от $z = (z_1, \dots, z_n)$, $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$ степени p по z , степени q по $\bar{z}$; $F_{pqr}(x_{j_1}^{l_1} \dots x_{j_m}^{l_m} z^p\bar{z}^q)$ обозначает полилинейную форму от $z, \bar{z}$ степени p по z , степени q по $\bar{z}$, степеней l_t по $x_{j_t} = (x_{j_t,1}, \dots, x_{j_t,k_{j_t}})$ соответственно и степени по x , удовлетворяющей следующему ограничению на вес: $[x_{j_1}^{l_1} \dots x_{j_m}^{l_m}] \leq r$; $O(n)$ обозначает члены веса $\geq n$.

Отбрасывая в уравнениях старшие члены, получим касательную модельную поверхность Q .

2. Оценки для алгебры. Оценим размерности алгебры инфинитезимальных автоморфизмов ростка построенной невырожденной модельной поверхности в нуле $\operatorname{aut} Q_0$ и подалгебры $\operatorname{aut}_0 Q_0$ инфинитезимальных автоморфизмов, обращающихся в 0 в нуле. Пусть вещественное векторное поле

$$X = 2 \operatorname{Re} \left(f(z, w) \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=2}^5 g_j(z, w) \frac{\partial}{\partial w_j} \right) \quad (2)$$

принадлежит алгебре $\operatorname{aut} Q_0$. Это означает, что координатные компоненты вектор-функций f, g_j голоморфны в окрестности нуля и их ограничения на Q удовлетворяют соотношениям, определяющим касательную плоскость к Q :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(ig_2 + 2F_{11}(f\bar{z})) &= 0, \\ \operatorname{Re}(ig_3 + 2F_{12}(f\bar{z}^2) + 4F_{21}(fz\bar{z})) &= 0, \\ \operatorname{Re}(ig_4 + 2F_{13}(f\bar{z}^3) + 4F_{22}(fz\bar{z}^2) + 6F_{31}(fz^2\bar{z})) &= 0, \\ \operatorname{Re}(ig_5 + 8F_{41}(fz^3\bar{z}) + 6F_{32}(fz^2\bar{z}^2) + 4F_{212}(x_2 fz\bar{z}) + 2F_{14}(f\bar{z}^4) \\ + 4F_{23}(fz\bar{z}^3) + 2F_{122}(x_2 f\bar{z}^2)F_{212}(g_2 z^2\bar{z}) + F_{122}(g_2 z\bar{z}^2)) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Будем использовать обозначения $\Delta_{pq} f = \partial_{x_{p+q}} f(F_{pq})$, $\Delta_{pqr} f = \partial_{x_{p+q+r}} f(F_{pqr})$ (значение частного дифференциала на форме), а также разложения вида

$$\varphi(z, w) = \varphi(z, x) + \sum_{j=1}^K \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} i y_j + \cdots, \quad \varphi(z, x) = \sum_q \varphi_{(q)}(x, z^q),$$

где $\varphi_{(q)}(x, z^q)$ — форма степени q от $z_1, \dots, z_n$ с коэффициентами, являющимися функциями от x .

Будем выделять в выписанных соотношениях коэффициенты при $z^l \bar{z}^m$ (т.е. при мономах $z_1^{l_1} \dots z_n^{l_n} \bar{z}_1^{m_1} \dots \bar{z}_n^{m_n}$, где $\sum_{i=1}^n l_i = l$, $\sum_{i=1}^n m_i = m$).

Вначале рассмотрим случай $l = 0, m = 0$ (члены, не содержащие z и $\bar{z}$):

$$\operatorname{Im} g_{t(0)} = 0, \quad t = 2, \dots, 5;$$

при $l = 1, m = 0$ (линейные по z члены)

$$g_{2(1)} = 2iF_{11}(z\bar{f}_{(0)}),$$

$$g_{3(1)} = 0,$$

$$g_{4(1)} = 0,$$

$$g_{5(1)} = 0,$$

при $1 < l < 5, m = 0$ (коэффициенты при членах вида z^l)

$$g_{2(l)} = 0,$$

.....

$$g_{l+1(l)} = 2iF_{l1}(z^l \bar{f}_{(0)}),$$

$$g_{5(2)} = 2iF_{212}(x_2 z^2 \bar{f}_{(0)});$$

при $l = 1, m = 1$ (коэффициенты при $z\bar{z}$)

$$\Delta_{11}g_{2(0)} = 2 \operatorname{Re} F_{11}(f_{(1)}\bar{z}),$$

$$\Delta_{11}g_{3(0)} = 4\operatorname{Re} F_{21}(f_{(0)}z\bar{z}),$$

$$\Delta_{11}g_{4(0)} = 0,$$

$$\Delta_{11}g_{5(0)} = 4 \operatorname{Re} F_{212}(x_2 f_{(0)} z \bar{z});$$

при $l = 2, m = 1$ (коэффициенты при $z^2 \bar{z}$)

$$\Delta_{21}g_{2(0)} + \Delta_{212}g_{2(0)} = 2F_{11}(f_{(2)}\bar{z}) - 4iF_{11}(z\Delta_{11}\bar{f}_{(0)}),$$

$$\Delta_{21}g_{3(0)} + \Delta_{212}g_{3(0)} = 4F_{21}(f_{(1)}z\bar{z}) + 2F_{21}(z^2\bar{f}_{(1)}),$$

$$\Delta_{21}g_{4(0)} + \Delta_{212}g_{4(0)} = 6F_{31}(f_{(0)}z^2\bar{z}) + 4F_{22}(z^2\bar{z}\bar{f}_{(0)}),$$

$$\Delta_{21}g_{5(0)} + \Delta_{212}g_{5(0)} = 2F_{212}(\text{Re } g_2 z^2 \bar{z}) + 4F_{212}(x_2 f_{(1)} z \bar{z}) + 2F_{212}(x_2 z^2 \bar{f}_{(1)});$$

при $l = 3, m = 1$ (коэффициенты при $z^3 \bar{z}$)

$$\begin{aligned}\Delta_{31}g_{2(0)} &= 2F_{11}(f_{(3)}\bar{z}) - 4iF_{11}(z\Delta_{21}\bar{f}_{(0)}) - 4iF_{11}(z\Delta_{212}\bar{f}_{(0)}), \\ \Delta_{31}g_{3(0)} &= 4F_{21}(f_{(2)}z\bar{z}) - 4iF_{21}(z^2\Delta_{11}\bar{f}_{(0)}), \\ \Delta_{31}g_{4(0)} &= 6F_{31}(f_{(1)}z^2\bar{z}) + 2F_{31}(z^3\bar{f}_{(1)}), \\ \Delta_{31}g_{5(0)} &= 8F_{41}(f_{(0)}z^3\bar{z}) + 4F_{32}(z^3\bar{z}\bar{f}_{(0)}) + F_{212}(g_{2(1)}z^2\bar{z}) \\ &\quad + 4F_{212}(x_2f_{(2)}z\bar{z}) - 4iF_{212}(x_2z^2\Delta_{11}\bar{f}_{(0)}); \end{aligned}$$

при $l = 4, m = 1$ (коэффициенты при $z^4 \bar{z}$)

$$\begin{aligned}\Delta_{41}g_{2(0)} &= 2F_{11}(f_{(4)}\bar{z}) - 4iF_{11}(z\Delta_{31}\bar{f}_{(0)}), \\ \Delta_{41}g_{3(0)} &= 4F_{21}(f_{(3)}z\bar{z}) - 4iF_{21}(z^2\Delta_{21}\bar{f}_{(0)}) - 4iF_{21}(z^2\Delta_{212}\bar{f}_{(0)}), \\ \Delta_{41}g_{4(0)} &= 6F_{31}(f_{(2)}z^2\bar{z}) - 4iF_{31}(z^3\Delta_{11}\bar{f}_{(0)}), \\ \Delta_{41}g_{5(0)} &= 8F_{41}(f_{(1)}z^3\bar{z}) + 2F_{41}(z^4\bar{f}_{(1)}) + F_{212}(g_{2(2)}z^2\bar{z}) \\ &\quad + 4F_{212}(x_2f_{(3)}z\bar{z}) - 4iF_{212}(x_2z^2\Delta_{21}\bar{f}_{(0)}) - 4iF_{212}(x_2z^2\Delta_{212}\bar{f}_{(0)}); \end{aligned}$$

при $l = 5, m = 1$ (коэффициенты при $z^5 \bar{z}$)

$$\begin{aligned}F_{11}(f_{(5)}\bar{z}) &= 2iF_{11}(z\Delta_{41}\bar{f}_{(0)}), \\ 2F_{21}(f_{(4)}z\bar{z}) &= 2iF_{21}(z^2\Delta_{31}\bar{f}_{(0)}), \\ 3F_{31}(f_{(3)}z^2\bar{z}) &= 2iF_{31}(z^3\Delta_{21}\bar{f}_{(0)}) + 2iF_{31}(z^3\Delta_{212}\bar{f}_{(0)}), \\ 4F_{41}(f_{(2)}z^3\bar{z}) &= 2iF_{41}(z^4\Delta_{11}\bar{f}_{(0)}) - F_{212}(g_{2(3)}z^2\bar{z}) \\ &\quad - 4F_{212}(x_2f_{(4)}z\bar{z}) + 2iF_{212}(x_2z^2\Delta_{31}\bar{f}_{(0)}); \end{aligned}$$

при $l = 6, m = 1$ (коэффициенты при $z^6 \bar{z}$)

$$\begin{aligned}F_{11}(f_{(6)}\bar{z}) &= 0, \\ 2F_{21}(f_{(5)}z\bar{z}) &= 2iF_{21}(z^2\Delta_{41}\bar{f}_{(0)}), \\ 3F_{31}(f_{(4)}z^2\bar{z}) &= 2iF_{31}(z^3\Delta_{31}\bar{f}_{(0)}), \\ 4F_{41}(f_{(3)}z^3\bar{z}) &= 2iF_{41}(z^4\Delta_{21}\bar{f}_{(0)}) + 2iF_{41}(z^4\Delta_{212}\bar{f}_{(0)}) - F_{212}(g_{2(4)}z^2\bar{z}) \\ &\quad - 4F_{212}(x_2f_{(5)}z\bar{z}) + 2iF_{212}(x_2z^2\Delta_{41}\bar{f}_{(0)}); \end{aligned}$$

при $l = 7, m = 1$ (коэффициенты при $z^7 \bar{z}$)

$$\begin{aligned}F_{11}(f_{(7)}\bar{z}) &= 0, \\ F_{21}(f_{(6)}z\bar{z}) &= 0, \\ 3F_{31}(f_{(5)}z^2\bar{z}) &= 2iF_{31}(z^3\Delta_{41}\bar{f}_{(0)}), \\ 4F_{41}(f_{(4)}z^3\bar{z}) &= 2iF_{41}(z^4\Delta_{31}\bar{f}_{(0)}) - F_{212}(g_{2(5)}z^2\bar{z}) - 4F_{212}(x_2f_{(6)}z\bar{z}); \end{aligned}$$

при $l = 8, m = 1$ (коэффициенты при $z^8 \bar{z}$)

$$\begin{aligned}F_{11}(f_{(8)}\bar{z}) &= 0, \\ F_{21}(f_{(7)}z\bar{z}) &= 0, \\ F_{31}(f_{(6)}z^2\bar{z}) &= 0, \\ 4F_{41}(f_{(5)}z^3\bar{z}) &= 2iF_{41}(z^4\Delta_{41}\bar{f}_{(0)}) - F_{212}(g_{2(6)}z^2\bar{z}) - 4F_{212}(x_2f_{(7)}z\bar{z}); \end{aligned}$$

при $l \geq 6$, $m = 1$ (коэффициенты при $z^l \bar{z}$)

$$F_{11}(f_{(l)} \bar{z}) = 0,$$

откуда при $l \geq 6$ получаем $f_{(l)} = 0$ (мы воспользовались здесь тем, что для невырожденной поверхности координатные компоненты F_{11} составляют базис пространства $(1, 1)$ -форм).

Далее при нумерации выписанных соотношений используем тройную индексацию. Запись $(p, q|r)$ будет означать соотношение, относящееся к $z^p \bar{z}^q$ и g_r .

Помимо уже выписанных нам понадобятся соотношения $(2, 2|2)$, $(2, 2|3)$, $(2, 2|4)$, $(2, 2|5)$, $(3, 2|4)$, $(3, 2|5)$, $(4, 2|3)$, $(5, 2|3)$, $(3, 2|2)$ и $(3, 2|3)$, которые выпишем позже.

Рассмотрим соотношение $(5, 1|2)$. Оно должно выполняться с каждой из координат формы F_{11} и, следовательно, с любой эрмитовой формой от $z, \bar{z}$. Это равносильно тому, что оно выполняется для формы $z_j \bar{z}_l$ при любых j, l , т.е.

$$f_{j(5)}(z^5) \bar{z}_l = 2iz_j(\Delta_{41} \bar{f}_{(0)})_l,$$

откуда следует, что $f_{(5)}$ и $\Delta_{41} \bar{f}_{(0)}$ имеют следующий вид:

$$f_{(5)}(z^5) = 2i\psi_5(z^4)z, \quad \Delta_{41} \bar{f}_{(0)} = \psi_5(z^4)\bar{z},$$

где $\psi_5(z^4)$ – скалярный множитель, являющийся однородным многочленом степени 4 от z . Теперь подставим полученные выражения в соотношение $(6, 1|3)$. Получаем, что $\psi_5 = 0$, т.е. $f_{(5)} = 0$, $\Delta_{41} \bar{f}_{(0)} = 0$. Таким же образом из пар соотношений $(5, 1|3)$ и $(6, 1|4)$, $(5, 1|4)$ и $(6, 1|5)$ получаем $f_{(4)} = 0$, $f_{(3)} = 0$, $\Delta_{31} \bar{f}_{(0)} = 0$, $(\Delta_{21} + \Delta_{212})\bar{f}_{(0)} = 0$.

Теперь выпишем (с учетом полученного) соотношение $(2, 2|2)$ и $(2, 2|3)$:

$$\begin{aligned} \Delta_{22}g_{2(0)} &= F_{11}(zi\Delta_{11}\bar{f}_{(1)}) + F_{11}(i\Delta_{11}f_{(1)}\bar{z}), \\ \Delta_{22}g_{3(0)} &= F_{21}(z^2\bar{f}_{(2)}) + 2F_{21}(i\Delta_{11}f_{(0)}z\bar{z}) + 2F_{12}(z\bar{z}i\Delta_{11}\bar{f}_{(0)}) + F_{12}(f_{(2)}\bar{z}^2). \end{aligned}$$

Обозначим теперь $f_{(0)}$, $f_{(1)}$, $f_{(2)}$ через $A(x)$, $B(x)z$, $C(x)z^2$ соответственно, $g_{j(0)}$ через G_j . Пользуясь тем, что почти все Δ_{jk} и Δ_{jkl} попарно коммутируют (кроме пары Δ_{212} и Δ_{11} , коммутатор которых тоже легко вычисляется), будем исключать из наших соотношений G_j . Применяя $\Delta_{21} + \Delta_{212}$ к $(1, 1|4)$ и Δ_{11} к $(2, 1|4)$, получим

$$\frac{\partial G_4}{\partial x_5} \Delta_{11} F_{212}(x_2 z^2 \bar{z}) = \Delta_{11}(6F_{31}(Az^2 \bar{z}) + 4F_{22}(z^2 \bar{z} \bar{A})). \quad (4)$$

Применяя Δ_{31} к соотношениям $(1, 1|j)$ и Δ_{11} к $(3, 1|j)$, получим

$$\Delta_{31}(2 \operatorname{Re} F_{11}(Bz\bar{z})) = 0, \quad (5)$$

$$\Delta_{31}(2 \operatorname{Re} 2F_{21}(Az\bar{z})) = \Delta_{11}(2F_{21}(Cz^2 z\bar{z}) - 4iF_{21}(z^2 \Delta_{11} \bar{A})), \quad (6)$$

$$0 = \Delta_{11}(6F_{31}(Bz z^2 \bar{z}) + 2F_{31}(z^3 \bar{B}z)). \quad (7)$$

Применяя Δ_{31} к соотношениям $(2, 1|j)$ и $\Delta_{21} + \Delta_{212}$ к $(3, 1|j)$, получим

$$\Delta_{31}(2F_{11}(Cz^2 \bar{z}) - 4iF_{11}(z\Delta_{11}\bar{A})) = 0, \quad (8)$$

$$\Delta_{31}(4F_{21}(Bz z\bar{z}) + 2F_{21}(z^2 \bar{B}z)) = (\Delta_{21} + \Delta_{212})(2F_{21}(Cz^2 z\bar{z}) - 4iF_{21}(z^2 \Delta_{11} \bar{A})) = 0, \quad (9)$$

$$\Delta_{31}(6F_{31}(Az^2 \bar{z}) + 4F_{22}(z^2 \bar{z} \bar{A})) = (\Delta_{21} + \Delta_{212})(6F_{31}(Bz z^2 \bar{z}) + 2F_{31}(z^3 \bar{B}z)). \quad (10)$$

Применяя Δ_{22} к соотношениям $(2, 1|j)$ и $\Delta_{21} + \Delta_{212}$ к $(2, 2|j)$, получим

$$\Delta_{22}(2F_{11}(Cz^2\bar{z}) - 4iF_{11}(z\Delta_{11}\bar{A})) = 0, \quad (11)$$

$$\Delta_{22}(4F_{21}(Bzz\bar{z}) + 2F_{21}(z^2\bar{B}z)) = (\Delta_{21} + \Delta_{212})(F_{21}(z^2C\bar{z}^2) + 2F_{21}(i\Delta_{11}Az\bar{z}) + 2F_{12}(z\bar{z}i\Delta_{11}\bar{A}) + F_{12}(Cz^2\bar{z}^2)). \quad (12)$$

Применяя Δ_{41} к соотношениям $(2, 1|j)$ и $\Delta_{21} + \Delta_{212}$ к $(4, 1|j)$, получим

$$\Delta_{41}(2F_{11}(Cz^2\bar{z}) - 4iF_{11}(z\Delta_{11}\bar{A})) = 0, \quad (13)$$

$$\Delta_{41}(4F_{21}(Bzz\bar{z}) + 2F_{21}(z^2\bar{B}z)) = 0, \quad (14)$$

$$\Delta_{41}(6F_{31}(Az^2\bar{z}) + F_{22}(z^2\bar{z}\bar{A})) = (\Delta_{21} + \Delta_{212})(6F_{31}(Cz^2z^2\bar{z}) - 4iF_{31}(z^3\Delta_{11}\bar{A})) = 0. \quad (15)$$

Рассмотрим соотношение (4). Воспользовавшись $(1, 1|4)$, получим, что тейлоровское разложение A не содержит x_2 в степени выше первой.

Теперь из (6) получаем $C'_{x_2} = 0$, из (7) $B'_{x_2} = 0$. Из соотношения (15) имеем $(\Delta_{21} + \Delta_{212})C = 0$, откуда с учетом $C'_{x_2} = 0$ получаем $C'_{x_3} = 0$, $\Delta_{212}C = 0$. Из (8) и (11) получаем $C'_{x_4} = 0$. Из соотношения (10) имеем $(\Delta_{21} + \Delta_{212})B = 0$, откуда с учетом $B'_{x_2} = 0$ получаем $B'_{x_3} = 0$, $\Delta_{212}B = 0$. Из соотношений (9) и (12) получаем $B'_{x_4} = 0$. Из соотношения (13) имеем $\Delta_{41}C = 0$. Из соотношения (14) получаем $\Delta_{41}B = 0$.

Теперь с учетом всего полученного выпишем $(4, 2|3)$:

$$2iF_{21}(z^2\Delta_{22}\bar{A}) = 0.$$

Отсюда $\Delta_{22}A = 0$, т.е. A не зависит от переменных из группы x_4 .

Аналогично, выписав $(5, 2|3)$:

$$2iF_{21}(z^2\Delta_{32}\bar{A}) = 0,$$

получим $\Delta_{32}A = 0$. Вспоминая, что также $\Delta_{41}A = 0$, получаем, что A не зависит от “жестких” переменных из группы x_5 .

Итак, A у нас может зависеть только от x_2 , x_3 и “нежестких” переменных из группы x_5 , причем x_2 не может входить в тейлоровское разложение в степени выше первой.

Теперь посмотрим на соотношение

$$(\Delta_{21} + \Delta_{212})\bar{A} = 0$$

более внимательно, т.е. распишем его по степеням $z_{j_1}z_{j_2}\bar{z}_{j_3}$. Получим

$$\sum_q \frac{\partial \bar{A}}{\partial x_{3,q}} F_{21,q} + \sum_{q,l} p_{q,l}(x_2) \frac{\partial \bar{A}}{\partial x_{5,l}} F_{21,q} = 0;$$

здесь $x_{3,q}$, $x_{5,l}$, $F_{21,q}$ обозначают конкретные координатные компоненты из соответствующих групп переменных и полилинейных форм. Воспользовавшись тем, что $F_{21,q}$ образуют базис в пространстве форм бистепени $(2, 1)$, получим для всех q

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial x_{3,q}} + \sum_l p_{q,l}(x_2) \frac{\partial \bar{A}}{\partial x_{5,l}} = 0, \quad (16)$$

где $p_{q,l}$ – линейные функции от x_2 .

Заметим, что, так как A не зависит от “жестких” переменных из группы x_5 , в эти уравнения не входят $p_{ql}(x_2)$, относящиеся к “жестким” $x_{5,l}$. Поэтому можно считать, что для входящих в (16) $p_{ql}(x_2)$ система полиномов от x_2 , x_3 $\{\sum_q p_{ql}(x_2)x_{3,q}\}_l$ линейно независима.

ЛЕММА. Пусть $A(x_2, x_3, x_5)$ – вещественно-аналитическая функция, причем тейлоровское разложение A не содержит x_2 в степени выше первой. Пусть при всех q выполняется условие (16). Пусть также система $\{\sum_q p_{ql}(x_2)x_{3,q}\}_l$ линейно независима. Тогда A можно представить в виде

$$A = \varphi_0(x_5 - p(x_2, x_3)) + \sum_{q=1}^k x_{2,q} \varphi_q(x_5 - p(x_2, x_3)),$$

где $p(x_2, x_3)$ – билинейная вектор-функция от x_2, x_3 ; $\varphi_q, q = 0, \dots, k$, – многочлены степени, не превышающей k . Таким образом, $A(x_2, x_3, x_5)$ является многочленом степени не выше $2k + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $\bar{A}$ как функцию от x_3, x_5 с переменными из группы x_2 в качестве параметров, т.е. используем разложение

$$\bar{A} = \sum_{rs} c_{rs}(x_2) x_3^r x_5^s.$$

Сделаем замену $x_{3,q} = \xi_q, x_{5,l} = \eta_l + \sum_q p_{ql}(x_2)\xi_q$. Тогда соотношения (16) примут вид

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial \xi_q} = 0,$$

т.е. $\bar{A} = \bar{A}(\eta_1, \dots, \eta_k)$. Таким образом,

$$\bar{A} = \sum_{r_1, \dots, r_k} C_{r_1, \dots, r_k}(x_2) \left(x_{5,1} - \sum_q p_{q,1}(x_2)x_{3,q} \right)^{r_1} \cdots \left(x_{5,k} - \sum_q p_{q,k}(x_2)x_{3,q} \right)^{r_k}.$$

Переобозначим для краткости

$$x_2 = x, \quad x_3 = y, \quad x_5 = t, \quad \sum_q p_{q,j}(x)y_q = p^j(x, y) = \sum_{l,m} a_{lm}^j x_l y_m.$$

Заметим, что $p^j(x, y)$ по условию оказываются линейно независимы как многочлены от x и y . Введем функцию

$$\varphi(x, s) = \varphi(x, s_1, \dots, s_k) = \sum_{r_1, \dots, r_k} C_{r_1, \dots, r_k} s_1^{r_1} \cdots s_k^{r_k}$$

и векторные поля

$$X_j(y) = \sum_q \frac{\partial p^q}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial s_q} = \sum_{q,m} a_{jm}^q y_m \frac{\partial}{\partial s_q}.$$

Теперь вспомним, что тейлоровское разложение A не содержит x_2 в степени выше первой. В новых обозначениях это условие запишется так:

$$\varphi_{x_1 x_j}(x, s) - X_j \varphi_{x_i}(x, s) - X_i \varphi_{x_j}(x, s) + X_j X_i \varphi(x, s) = 0.$$

Выделим и приравняем к нулю член, свободный относительно переменных y . Получим

$$\varphi_{x_1 x_j}(x, s) = 0;$$

поэтому можно записать

$$\varphi(x, s) = \varphi_0(s) + \sum_{q=1}^{k_2} x_q \varphi_q(s).$$

Теперь выделим и приравняем к нулю квадратичный по y член. Получим

$$X_j X_i (\varphi_0(s) + \sum_{q=1}^{k_2} x_q \varphi_q(s)) = 0,$$

откуда

$$X_j X_i \varphi_q(s) = 0, \quad q = 0, 1, \dots, k_2.$$

Продифференцировав это равенство дважды по произвольным y_m, y_l , получим для любых i, j, q, l, m , что

$$\left(\frac{\partial X_j}{\partial y_m} \frac{\partial X_i}{\partial y_l} + \frac{\partial X_i}{\partial y_m} \frac{\partial X_j}{\partial y_l} \right) \varphi_q = 0.$$

Обозначим

$$\frac{\partial X_j}{\partial y_m} = \sum_q a_{jm}^q \frac{\partial}{\partial s_q} = X_{jm}^0.$$

Приняв $i = j, l = m$, получим

$$(X_{jm}^0)^2 \varphi_q(s) = 0.$$

Рассмотрим систему векторных полей X_{jq}^0 . Так как p^j линейно независимы, ее ранг будет равен рангу системы полей $\partial/\partial s_q$. Выберем в линейной оболочке системы $\{X_{jq}^0\}_{jq}$ базис и соответствующие ему координатные функции S_j , линейно связанные с s_j . Получим

$$\frac{\partial^2 \varphi_q}{\partial S_j^2} = 0,$$

откуда сразу следует, что все φ_q являются многочленами степени не выше k . Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Данную в лемме оценку на степень $A(x_2, x_3, x_5)$ можно улучшить. Вспомним снова, что A может зависеть от x_2 не более чем линейно. Значит, степенное разложение A по x_2, x_3, x_5 не может содержать членов степени выше первой по x_2 . В этом разложении присутствуют члены, полученные из произведений видов $x_5^l (p(x_2, x_3))^m$ и $x_2 x_5^l (p(x_2, x_3))^m$, где $l + m \leq k$, т.е. мономы степени l по x_5 , степени m по x_3 , степеней m и $m + 1$ соответственно по x_2 . Членов с $m > 1$ быть не должно. Поэтому $\deg A \leq k + 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Из доказательства легко получить оценку вещественной размерности пространства решений выписанных уравнений для $A = (A_1, \dots, A_n)$ (обозначим это пространство буквой L):

$$\dim L \leq 2n(k_2 + 1)2^k.$$

Вернемся к старым обозначениям.

Выпишем теперь соотношения $(3, 2|2)$ и $(3, 2|3)$:

$$\Delta_{32} G_2 = 0, \quad \Delta_{32} G_3 = 0.$$

Применим к ним $\Delta_{21} + \Delta_{212}$; применим Δ_{32} к $(2, 1|2)$ и $(2, 1|2)$. Получаем $\Delta_{32}B = 0$, $\Delta_{32}C = 0$. Вспомнив, что $\Delta_{212}B = 0$, $\Delta_{212}C = 0$, получаем, что B и C не зависят от переменных группы x_5 .

Итак, получили, что

$$A = \varphi_0(x_5 - p(x_2, x_3)) + \sum_{q=1}^k x_{2,k} \varphi_q(x_5 - p(x_2, x_3)),$$

B и C от x не зависят.

Если выписать теперь недостающие соотношения $(2, 2|4)$, $(2, 2|5)$, $(3, 2|4)$, $(3, 2|5)$, все G_j можно выразить через вещественный постоянный $(k_2 + k_3 + k_4 + k)$ -мерный вектор G_0 , A , B и C .

Итак, вспомнив, что B – комплексная матрица размера $n \times n$ и задается $2n^2$ вещественными параметрами, C – квадратичная форма от z со значениями в $\mathbb{C}^n$ ($n^2(n+1)$ вещественных параметров), а также оценки на размерность пространства решений для A и значения k_2, k_3, k_4 , мы можем получить следующие оценки.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть Q – невырожденная модельная поверхность пятой степени. Тогда

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{aut} Q &\leq 2n(n^2 + 1)2^k + 2n^2 + n^2(n + 1) \\ &\quad + \left(n^2 + n^2(n + 1) + \frac{1}{12}n^2(n + 1)(n + 2)(3n + 5) + k \right), \\ \dim \operatorname{aut}_0 Q &\leq 2n(n^2 + 1)2^k - 2n + 2n^2 + n^2(n + 1). \end{aligned}$$

(Параметры, определяющие эти алгебры, связаны соотношениями (3), обеспечивающими касание.)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Степени инфинитезимальных автоморфизмов модельной поверхности не превышают $k + 5$. Точнее, для инфинитезимального автоморфизма (f, g_2, g_3, g_4, g_5) верны следующие оценки:

$$\deg f \leq k + 1, \quad \deg g_2 \leq k + 2, \quad \deg g_3 \leq k + 3, \quad \deg g_4 \leq k + 4, \quad \deg g_5 \leq k + 5.$$

Итак, алгебра Ли $\operatorname{aut} Q$ инфинитезимальных автоморфизмов поверхности Q – это подалгебра алгебры полиномиальных векторных полей, чьи степени ограничены некоторой константой, зависящей только от n и k . Векторные поля, образующие $\operatorname{aut} Q$ имеют вид (2), где коэффициенты $(f, g_2, \dots, g_5)$ голоморфны в окрестности нуля. Назначая веса следующим естественным образом:

$$[z] = 1, \quad \left[\frac{\partial}{\partial z} \right] = -1, \quad [w_j] = j, \quad \left[\frac{\partial}{\partial w_j} \right] = -j,$$

сделаем $\operatorname{aut} Q$ градуированной алгеброй Ли со следующим, непосредственно проверяемым свойством: если некоторое поле содержится в $\operatorname{aut} Q$, то каждая его градуированная компонента – тоже. Можно написать, что

$$\operatorname{aut} Q = g_{-5} + \dots + g_{-1} + g_0 + g_1 + \dots + g_D.$$

Подалгебре $\text{aut}_+ Q = g_1 + \dots + g_D$ соответствует подгруппа $\text{Aut}_+ Q$ нелинейных преобразований Q , сохраняющих начало координат на месте. Подалгебре g_0 соответствует подгруппа $\text{LAut } Q$ линейных автоморфизмов Q , сохраняющих начало координат на месте. Эта подгруппа, в любом случае, содержит преобразования вида

$$z \mapsto tz, \quad w_j \mapsto t^j w_j, \quad j = 2, \dots, 5, \quad t \in \mathbb{R};$$

g_0 , в свою очередь, всегда содержит соответствующий инфинитезимальный автоморфизм вида $(z, 2w_2, \dots, 5w_5)$. О подалгебре $\text{aut}_- Q = g_{-5} + \dots + g_{-1}$ и соответствующей ей подгруппе еще вспомним ниже в п. 3.

3. Некоторые итоги. Покажем, что модельная поверхность обладает экстремальным свойством: размерность группы голоморфных автоморфизмов невырожденного порождающего ростка вещественно-аналитического CR -многообразия не превосходит размерности группы его касательной модельной поверхности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Пусть M_0 – невырожденный порождающий росток типа $(n, k_2 + k_3 + k_4 + k)$, а Q – его касательная модельная поверхность. Тогда $\dim \text{Aut } M_0 \leq \dim \text{Aut } Q$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вполне аналогично доказательству соответствующих оценок для квадррики и кубики (см., например, [7]) и представляет собой некоторую версию теоремы о неявной функции для формальных рядов с оценкой числа параметров. Показывается, что отображение

$$f = z + f_2 + \dots, \quad g_j = w_j + g_{j,j+1}$$

(здесь $f_m, g_{j,m}$ означает компоненту веса m) ростка

$$\begin{aligned} y_2 &= F_{11}(z\bar{z}) + \Phi_{2,3}, \\ y_3 &= 2 \operatorname{Re} F_{21}(z^2\bar{z}) + \Phi_{3,4}, \\ y_4 &= 2 \operatorname{Re} F_{31}(z^3\bar{z}) + F_{22}(z^2\bar{z}^2) + \Phi_{4,5}, \\ y_5 &= 2 \operatorname{Re}(F_{41}(z^4\bar{z}) + F_{32}(z^3\bar{z}^2) + F_{212}(x_2 z^2\bar{z})) + \Phi_{5,6} \end{aligned} \tag{17}$$

в росток

$$\begin{aligned} y_2 &= F_{11}(z\bar{z}) + \tilde{\Phi}_{2,3}, \\ y_3 &= 2 \operatorname{Re} F_{21}(z^2\bar{z}) + \tilde{\Phi}_{3,4}, \\ y_4 &= 2 \operatorname{Re} F_{31}(z^3\bar{z}) + F_{22}(z^2\bar{z}^2) + \tilde{\Phi}_{4,5}, \\ y_5 &= 2 \operatorname{Re}(F_{41}(z^4\bar{z}) + F_{32}(z^3\bar{z}^2) + F_{212}(x_2 z^2\bar{z})) + \tilde{\Phi}_{5,6} \end{aligned} \tag{18}$$

задается не большим числом параметров, чем автоморфизм соответствующей невырожденной модельной поверхности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Модельная поверхность однородна, т.е. голоморфные автоморфизмы действуют на ней транзитивно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. За координаты на поверхности можно принять (z, x_2, x_3, x_4, x_5) . Надо проверить, что при произвольных $p \in \mathbb{C}^n$, $q \in \mathbb{R}^k$ точку с координатами (z, x_2, x_3, x_4, x_5) биголоморфным преобразованием можно перевести в точку с координатами $(z+p, x_2+q_2, x_3+q_3, x_4+q_4, x_5+q_5)$.

Сделаем подстановку $z \mapsto z+p$, $x \mapsto x+q$. В уравнениях поверхности тогда появятся члены меньшего веса. Теперь применим те же (полиномиальные) преобразования, что и в п. 1 при приведении уравнений поверхности к виду (1). Получим уравнения в прежнем виде.

Преобразования, упомянутые в доказательстве (называемые треугольно-полиномиальными), образуют в группе автоморфизмов Q $\text{Aut } Q$ подгруппу, действующую на Q транзитивно и без неподвижных точек. Эта подгруппа соответствует подалгебре $\text{aut}_- Q = g_{-5} + \dots + g_{-1}$. Можно сформулировать следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Модельная поверхность обладает естественной структурой группы Ли, действующей в $\mathbb{C}^{n+K}$ треугольно-полиномиальными преобразованиями.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отождествление $Q \simeq \text{Aut}_- Q$ можно задать так: $\xi \mapsto \varphi_\xi$, где φ_ξ — единственное преобразование из $\text{Aut}_- Q$, переводящее начало координат в точку ξ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Группа голоморфных преобразований невырожденной модельной поверхности $\text{Aut } Q$ является подгруппой группы бирациональных преобразований $\mathbb{C}^{n+K}$, чьи степени не превосходят $(n+K+1)(k+5)+4$. Точнее, для произвольного автоморфизма Q с компонентами $Z(z, w)$, $W_2(z, w)$, $W_3(z, w)$, $W_4(z, w)$, $W_5(z, w)$ верны следующие оценки:*

$$\begin{aligned} \deg Z &\leq (n+K+1)(k+5), \\ \deg W_2 &\leq (n+K+1)(k+5)+1, \\ \deg W_3 &\leq (n+K+1)(k+5)+2, \\ \deg W_4 &\leq (n+K+1)(k+5)+3, \\ \deg W_5 &\leq (n+K+1)(k+5)+4. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО использует полученные в предложении 2.2 оценки на степени инфинитезимальных автоморфизмов, а также гарантированное наличие инфинитезимальных автоморфизмов из g_0 и $\text{aut}_- Q$. Ход рассуждений почти дословно повторяет ход доказательства бирациональности в [3] и [4]. Рассматривается действие группы $\text{Aut } Q$ на алгебре $\text{aut } Q$ и образы инфинитезимальных автоморфизмов из g_0 и $\text{aut}_- Q$ при этом действии. Так как эти образы также лежат в $\text{aut } Q$, и, следовательно, являются полиномиальными векторными полями ограниченной степени, из соответствующих матричных соотношений получаются рациональность и оценки на степени производных

$$\frac{\partial Z}{\partial z}, \quad \frac{\partial W}{\partial w}, \quad \frac{\partial Z}{\partial w}, \quad \frac{\partial W}{\partial z}$$

и самих $Z(z, w)$, $W(z, w)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. *Если две модельные поверхности биголоморфно эквивалентны, то они линейно эквивалентны.*

Доказательство проводится так же, как для квадрики и кубики (см., например, [7]). У отображающих функций выделяется линейная часть, которая сама осуществляет отображение между модельными поверхностями.

Таким образом, можно видеть, что в нашей ситуации выполняются обычные свойства модельной поверхности. Тем самым основная теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Chern S. S., Moser J. K. Real hypersurfaces in complex manifolds // Acta Math. 1974. V. 133. №3–4. P. 219–271.
- [2] Белошадка В. К. О голоморфных преобразованиях квадрики // Матем. сб. 1991. Т. 182. №2. С. 203–219.
- [3] Туманов А. Е. Конечномерность группы CR -автоморфизмов стандартного CR -многообразия и собственные голоморфные отображения областей Зигеля // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. №3. С. 651–659.
- [4] Белошадка В. К. Полиномиальные модели вещественных многообразий // Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. №4. С. 3–20.
- [5] Шананина Е. Н. Модели CR -многообразий типа $(1, K)$ при $3 \leq K \leq 7$ и их автоморфизмы // Матем. заметки. 2000. Т. 67. №3. С. 452–459.
- [6] Паламолов В. П. Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М.: Наука, 1967.
- [7] Белошадка В. К. Кубическая модель вещественного многообразия // Матем. заметки. 2001. Т. 70. №4. С. 503–519.
- [8] Bloom T., Graham I. On type conditions for generic real submanifolds of $\mathbb{C}^n$ // Invent. Math. 1977. V. 40. P. 217–243.
- [9] Baouendi M. S., Ebenfelt P., Rothschild L. P. CR -automorphisms of real analytic manifolds in complex space // Comm. Anal. Geom. 1998. V. 6. №2. P. 291–315.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
02.09.2003