Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. И. Григорчук, П. де ля Арп, Группы с одним определяющим соотношением экспоненциального роста обладают равномерно экспоненциальным ростом, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 4, 628–630

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm690>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 12:11:04

ГРУППЫ С ОДНИМ ОПРЕДЕЛЯЮЩИМ СООТНОШЕНИЕМ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РОСТА ОБЛАДАЮТ РАВНОМЕРНО ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ РОСТОМ

Р. И. Григорчук, П. де ля Арп

Мы придерживаемся терминологии и обозначений, принятых в [1]. Напомним, что если задана группа Γ , порожденная конечным множеством S , то определены: *словарная длина* $\ell_S: \Gamma \rightarrow \mathbb{N}$, где $\ell_S(\gamma)$ – наименьшее число n такое, что найдутся $s_1, \dots, s_n \in S \cup S^{-1}$, удовлетворяющие соотношению $\gamma = s_1 \cdots s_n$, *функция роста* $\beta_S: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, где $\beta_S(k)$ – число элементов $\gamma \in \Gamma$ длины $\ell_S(\gamma) \leq k$, и *показатель экспоненциального роста*

$$\omega(\Gamma, S) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\beta_S(k)}.$$

Легко видеть, что $\omega(\Gamma, S) > 1$ в том и только том случае, когда $\omega(\Gamma, S') > 1$ для *любой* другой системы S' порождающих Γ . Пусть $\omega(\Gamma)$ обозначает минимум чисел $\omega(\Gamma, S)$, взятый по всем порождающим множествам S . Группа Γ называется *группой экспоненциального роста*, если $\omega(\Gamma, S) > 1$ для некоторой (а, следовательно, для любой) конечной порождающей системы S , и называется *группой равномерно экспоненциального роста*, если $\omega(\Gamma) > 1$. М. Громов поставил вопрос о существовании конечно-порожденной группы экспоненциального, но не равномерно экспоненциального роста (см. [2, замечание 5.12]). Однако вопрос остается открытым. Более подробно об этом написано в [3] и [4, гл. VII].

Целью этой короткой заметки является вывести простое следствие из публикации [1], в которой для почти всех групп, являющихся свободными произведениями с объединением, и HNN-расширений доказано, что они обладают равномерно экспоненциальным ростом. Таким образом, мы даем полный ответ на вопросы, оставшиеся открытыми после публикации [5], где для некоторых классов (но не всех) групп с одним определяющим соотношением экспоненциального роста доказано, что они обладают равномерно экспоненциальным ростом.

ТЕОРЕМА. *Группа с одним определяющим соотношением экспоненциального роста Γ обладает также равномерно экспоненциальным ростом, причем $\omega(\Gamma) \geq \sqrt[4]{2}$.*

Группа с одним определяющим соотношением обладает экспоненциальным ростом, если только она не изоморфна группе из следующего списка: циклические группы, свободная абелева группа ранга 2, фундаментальная группа бутылки Клейна $\langle a, b \mid aba^{-1}b = 1 \rangle$. Это было установлено в [6], а принадлежность групп к этому списку устанавливается по заданию группы с одним определяющим соотношением с помощью алгоритма, описанного в [5].

Было бы желательно найти максимальное значение константы (у нас она равна $\sqrt[4]{2}$), оценивающей показатель экспоненциального роста снизу, как в предыдущей теореме.

Работа выполнена при поддержке Национального научного фонда Швейцарии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пусть Γ – группа с одним определяющим соотношением. Если Γ имеет три или более порождающих, то известно, что Γ содержит подгруппу конечного индекса, обладающего гомоморфизмом на свободную неабелеву группу (см. [7] или [8, с. 82–83]). В этом случае Γ имеет равномерно экспоненциальный рост, так как этим свойством обладают неабелевы свободные группы (см. [2, пример 5.13]) и так как оно сохраняется при переходе к подгруппам конечного индекса (ввиду предложения 3.3 из [9]).

Эти рассуждения можно обобщить и дополнить оценками, используя результат из [10], согласно которому любая конечно представленная группа, обладающая заданием, у которого число порождающих как минимум на 2 больше числа соотношений, может быть представлена в виде свободного произведения с объединением $A *_C B$, где A, B являются группами с общей подгруппой C , а их индексы (которые могут быть бесконечными) удовлетворяют неравенству

$$([A : C] - 1)([B : C] - 1) \geq 2.$$

Из [1] следует, что в этом случае $\omega(A *_C B) \geq \sqrt[4]{2}$.

Поэтому, начиная с этого момента, без потери общности можно предположить, что Γ имеет два порождающих и одно соотношение:

$$\Gamma = \langle a, b \mid R(a, b) = 1 \rangle,$$

где R есть циклически несократимое слово в a и b . Изменив в случае необходимости это задание, можно предположить, что сумма показателей вхождений символа a в R равна нулю (см., например, [5, лемма 1.1]). Положим $b_i = a^i b a^{-i}$, где $i \in \mathbb{Z}$, так что R может быть записано (стандартным образом) как циклически приведенное слово R' в алфавите этих новых символов, скажем $R' = R'(b_m, \dots, b_M)$, где $m \leq M$, причем b_m, b_M входят в R' . Если $m = M$, то $R(a, b) = b^m$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$; следовательно, либо $\Gamma \approx \mathbb{Z}$, либо Γ является нетривиальным свободным произведением и $\omega(\Gamma) \geq \sqrt[4]{2}$, как показано в [1]. Следовательно, можно предположить, что $m < M$.

Положим

$$H = \langle b_m, \dots, b_M \mid R'(b_m, \dots, b_M) = 1 \rangle, \\ A = \langle b_m, \dots, b_{M-1} \rangle_H, \quad B = \langle b_{m-1}, \dots, b_M \rangle_H,$$

где использованы обозначения, означающие, что A является подгруппой группы с одним определяющим соотношением H , порожденной $b_m, \dots, b_{M-1}$, и, аналогично, для B . Заметим, что A и B являются свободными группами ранга $M - m$ по теореме Магнуса о свободе. Пусть $\theta: A \rightarrow B$ обозначает изоморфизм, определенный как $\theta(b_i) = b_{i+1}$, где $i \in \{m, \dots, M-1\}$. Известно, что Γ изоморфно HNN-расширению

$$\Gamma \approx H *_A^\theta \langle t, b_m, \dots, b_M \mid R'(b_m, \dots, b_M) = 1, t b_i t^{-1} = b_{i+1} (m \leq i < M) \rangle;$$

см., например, доказательство теоремы о свободе [11, теорема IV.5.1]. Если $[H : A] + [H : B] \geq 3$, то $\omega(\Gamma) \geq \sqrt[4]{2}$, опять-таки ввиду [1].

Если $[H : A] + [H : B] < 3$, то $H = A = B$ и существует точная короткая последовательность

$$1 \rightarrow H \rightarrow \Gamma \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 1.$$

Если $M - m = 1$, то группа Γ имеет полиномиальный рост, так как является расширением $\mathbb{Z}$ с помощью $\mathbb{Z}$. Если $M - m \geq 2$, то группа H является свободной неабелевой и $\omega(\Gamma) \geq \sqrt[6]{3}$, как доказано в [3, раздел 2]. Наконец, заметим, что $81 = (\sqrt[6]{3})^{24} > (\sqrt[4]{2})^{24} = 64$; следовательно, $\omega(\Gamma) > \sqrt[4]{2}$.

В качестве следствия из приведенного доказательства получаем следующее утверждение. Подробный анализ понятия дефекта (т.е. разности между числом порождающих и соотношений) приведен в [12].

СЛЕДСТВИЕ. Пусть Γ – конечно представленная группа. Если существует конечная система порождающих S группы G такая, что $\omega(\Gamma, S) < \sqrt[4]{2}$, то Γ имеет дефект, не превосходящий 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bucher M., de la Harpe P. Free products with amalgamation and HNN-extensions which are of uniformly exponential growth // Math. Notes. 2001 (to appear).
2. Gromov M., Lafontaine J., Pansu P. Structures métriques pour les variétés riemanniennes: Cedic/F. Nathan, 1981.
3. Grigorchuk R. I., de la Harpe P. // J. Dynamical Control Systems. 1997. V. 3. № 1. P. 51–89.
4. de la Harpe P. Topics in Geometric Group Theory: University of Chicago Press (to appear).
5. Ceccherini-Silberstein T. G., Grigorchuk R. I. // Enseign. Math. 1997. V. 43. P. 337–354.
6. Karras A., Solitar D. // Canad. J. Math. 1971. V. 23. P. 627–643.
7. Baumslag B., Pride S. J. // J. London Math. Soc. 1978. V. 17. P. 435–436.
8. Gromov M. // Publ. Math. IHES. 1982. V. 56. P. 5–100.
9. Shalen P. B., Wagreich P. // Trans. Amer. Math. Soc. 1992. V. 331. P. 895–917.
10. Baumslag G., Shalen P. B. // Comment. Math. Helvetici. 1990. V. 65. P. 243–254.
11. Lyndon R. C., Schupp P. E. Combinatorial Group Theory. Ergeb. Math. Grenzgeb. V. 89. Berlin: Springer, 1977.
12. Epstein D. B. A. // Quart. J. Math. Oxford. 1961. V. 12. P. 205–212.

(Р. И. Григорчук) Математический институт им. В. А. Стеклова
(П. де ля Арп) Section de Mathématiques, Université de Genève, C.P. 240
E-mail: grigorch@mi.ras.ru, Pierre.delaHarpe@math.unige.ch

Поступило
22.03.2000