Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Благовещенский, Обобщенный оператор Даламбера на компактифицированном псевдоевклидовом пространстве, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 5, 652–660

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6908>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 15:13:12

Обобщенный оператор Даламбера на компактифицированном псевдоевклидовом пространстве

А. С. Благовещенский

Доказывается, что оператор Даламбера в $\mathbb{R}^n$ с многомерным временем, окаймлением его операторами умножения на некоторую функцию и с постановкой квалифицированного условия на бесконечности является самосопряженным оператором с дискретным спектром. Спектр и собственные функции явно описываются.

Библиография: 8 названий.

Статья посвящена изучению дифференциального оператора Даламбера

$$\square_x = \sum_{j=1}^n \sigma_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \quad (1)$$

на $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{p,q}$. Здесь $\sigma_i = 1$ при $i = 1, \dots, p$, $\sigma_i = -1$ при $i = p+1, \dots, n$, $0 < p < n$, $q = n-p$, n предполагаем четным. Фигурирующее в заглавии прилагательное “обобщенный” означает, что не исключена многомерность “времени”. Доказано, что если окаймить оператор $\square_x$ операторами умножения на функцию $R(x)$ и включить в описание области определения этого оператора некоторые требования на поведение функций на бесконечности, то оператор $D := R \square_x R$ является в существенном самосопряженным в $L_2(\mathbb{R}^n)$ (самосопряженным с точностью до замыкания). Здесь

$$R(x) = \frac{1}{2}(1 + (r_p + r_q)^2)^{1/2}(1 + (r_p - r_q)^2)^{1/2} = \frac{1}{2}((1 + r_p^2 + r_q^2)^2 - 4r_p^2 r_q^2)^{1/2}, \quad (2)$$

где $r_p = (\sum_{i=1}^p x_i^2)^{1/2}$, $r_q = (\sum_{i=p+1}^{p+q} x_i^2)^{1/2}$.

Компактификация псевдоевклидова пространства сводится к присоединению к этому пространству некоторого многообразия бесконечно удаленных точек. Вышеупомянутые ограничения на поведение функций из области оператора M на бесконечности эквивалентны требованию непрерывности функций в бесконечно удаленных точках. Найдено полное описание спектра оператора D . Он дискретен. Построены явные выражения для собственных значений и собственных функций.

Введем в пространстве $\mathbb{R}^n$ псевдоевклидову метрику с помощью билинейной формы

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \sigma_i x_i y_i, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle x, x \rangle =: \gamma.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-816.2008.1).

Осуществим компактификацию пространства $\mathbb{R}^n$, присоединив к нему бесконечно удаленные точки с помощью следующей процедуры [1]. Будем говорить, что точка $x \in \mathbb{R}^{p,q}$ (s, ν) -стремится к бесконечности, если $x = x(t) = \nu t + \Delta x(t)$, $t \rightarrow \pm\infty$, где ν – фиксированный изотропный единичный вектор, т.е. такой, что $\sum_{i=1}^p \nu_i^2 = \sum_{i=p+1}^n \nu_i^2 = 1$, $\Delta x(t)$ удовлетворяет требованиям

- 1) $\Delta x(t) = o(t)$;
- 2) $2t\langle \nu, \Delta x \rangle + \langle \Delta x, \Delta x \rangle = 2st + o(t)$, где $s \in \mathbb{R}$.

Присоединим к пространству $\mathbb{R}^n$ множество бесконечно удаленных точек, получающихся при (s, ν) -стремлении точки к бесконечности, при этом отождествляем

- 1) точки, получающиеся при стремлении t к бесконечности любого знака;
- 2) точки, соответствующие парам (s, ν) и $(-s, -\nu)$.

Пары $(s, \nu) \in \mathbb{R} \times S_{p-1} \times S_{q-1}$ осуществляют параметризацию множества бесконечно удаленных точек. Все бесконечно удаленные точки, получающиеся при удалении на бесконечность не в направлении изотропного вектора, отождествим. Описанная компактификация псевдоевклидова пространства тесно связана с понятием инверсии. Назовем *инверсией* относительно точки x^* преобразование координат $x \rightarrow \xi$, где $\xi = (x - x^*) / \langle x - x^*, x - x^* \rangle$ (обратное преобразование: $x = x^* + \xi / \langle \xi, \xi \rangle$). Очевидно, при (s, ν) -стремлении точки к бесконечности $\langle x - x^*, x - x^* \rangle = 2(s - \langle \nu, x^* \rangle)t + o(t)$ и при $s \neq \langle \nu, x^* \rangle$

$$\xi = \frac{\nu t + \Delta x - x^*}{2(s - \langle \nu, x^* \rangle)t + o(t)} \rightarrow \xi^* = \frac{\nu}{2(s - \langle \nu, x^* \rangle)}.$$

Точки ξ^* лежат на конусе $\langle \xi^*, \xi^* \rangle = 0$; при $\langle \nu, \nu \rangle \neq 0$ предельная точка ξ^* является вершиной этого конуса. Ограничение $s \neq \langle \nu, x^* \rangle$ снимается произволом в выборе x^* . За окрестности бесконечно удаленных точек ξ^* примем евклидовы шары с центром ξ^* :

$$K_{\xi^*, \varepsilon} = \left\{ \xi : \sum_{i=1}^n (\xi_i - \xi_i^*)^2 < \varepsilon^2 \right\}.$$

В результате указанной компактификации получается гладкое компактное многообразие. Это многообразие топологически эквивалентно произведению p - и q -мерных сфер $S_p \times S_q$ с отождествленными противоположными точками $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n+1}\}$ и $-\Omega$. Здесь

$$\sum_{i=0}^p \omega_i^2 = \sum_{i=p+1}^{n+1} \omega_i^2 = 1.$$

Для установления этого факта удобно воспользоваться следующей конструкцией [2], [3], тесно связанной с задачей описания конформной группы преобразований псевдоевклидова пространства [4]. Сопоставим каждой точке $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ точку $X \in P \cap Q \subset \mathbb{R}^{n+2}$ с координатами $(x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$, где P – гиперплоскость $x_0 + x_{n+1} = 1$, Q – конус $\sum_{i=0}^{n+1} \sigma_i x_i^2 = 0$. Легко видеть, что $x_0 = (1 - \gamma)/2$, $x_{n+1} = (1 + \gamma)/2$. Сопоставим каждому $X \in P \cap Q$ образующую ℓ_X конуса Q , проходящую через эту точку. Очевидно, что отображение $x \rightarrow \ell_X$ есть биекция $\mathbb{R}^n$ на множество образующих конуса Q , не параллельных гиперплоскости P . Описанная выше компактификация эквивалентна присоединению к этому множеству прямых, параллельных P . Очевидно, множество всех образующих конуса Q эквивалентно

произведению p - и q -мерных единичных сфер

$$S_p \times S_q = \left\{ \Omega = (\omega_0, \dots, \omega_{n+1}) : \sum_{i=0}^p \omega_i^2 = \sum_{i=p+1}^{n+1} \omega_i^2 = 1 \right\}$$

с отождествленными противоположными точками – точками пересечения прямых ℓ_X с $S_p \times S_q$. Легко написать явный вид отображения $\Omega \rightarrow x$: для точек, у которых $\omega_0 + \omega_{n+1} \neq 0$,

$$x = (\omega_0 + \omega_{n+1})^{-1} \omega, \quad (3)$$

где $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$. Точкам, для которых $\omega_0 + \omega_{n+1} = 0$, соответствуют бесконечно удаленные точки. Обратное отображение

$$x \rightarrow X = \left(\frac{1-\gamma}{2}, x, \frac{1+\gamma}{2} \right) \rightarrow \Omega = R^{-1} \left(\frac{1-\gamma}{2}, x, \frac{1+\gamma}{2} \right), \quad (4)$$

где

$$R := \left(\left(\frac{1-\gamma}{2} \right)^2 + r_p^2 \right)^{1/2} = \left(\left(\frac{1+\gamma}{2} \right)^2 + r_q^2 \right)^{1/2}.$$

Для R справедливо также симметричное представление (2). Рассмотрим бесконечно удаленные точки. Пусть точка $x(t)$ (s, ν)-стремится к бесконечности. Тогда для соответствующей точки $\Omega(t)$

$$\lim \Omega(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} R^{-1}(t)X(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} R^{-1}(t) \left(\frac{1-\gamma}{2}, x, \frac{1+\gamma}{2} \right).$$

Так как $\gamma = 2st + o(t)$,

$$R = \left(\left(\frac{1-\gamma}{2} \right)^2 + r_p^2 \right)^{1/2} = ((-st + o(t))^2 + t^2 + o(t^2))^{1/2} = |t|(s^2 + 1)^{1/2} + o(t),$$

то

$$\lim \Omega(t) = \operatorname{sgn}(t)(s^2 + 1)^{-1/2}(-s, \nu, s).$$

Если $x(t) = \nu t + \Delta x(t)$, где $\langle \nu, \nu \rangle \neq 0$, $\Delta x = o(t)$, то $\gamma = \langle \nu, \nu \rangle t^2 + o(t^2)$,

$$R = \left(\left(\frac{\langle \nu, \nu \rangle t^2 + o(t^2)}{2} \right)^2 + O(t^2) \right)^{1/2} = \frac{|\langle \nu, \nu \rangle| t^2}{2} + o(t^2)$$

и $\Omega(t) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} \operatorname{sgn}(\langle \nu, \nu \rangle)(-1, 0, 1)$ – особой точке многообразия бесконечно удаленных точек.

Найдем связь между лебеговой мерой dx в $\mathbb{R}^n$ и произведением евклидовых мер $dS_p dS_q$ на $S_p \times S_q$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Имеем*

$$dS_p dS_q = \frac{dx}{R^n}. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим окрестность точки Ω , в которой $\omega_0 \omega_{n+1} \neq 0$. Тогда

$$dS_p dS_q = |\omega_0 \omega_{n+1}|^{-1} d\omega = |\omega_0 \omega_{n+1}|^{-1} d\omega_1 \cdots d\omega_n = |\omega_0 \omega_{n+1}|^{-1} |J| dx,$$

где J – якобиан замены переменных $\omega = x/R$. Элементы матрицы Якоби

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} = \frac{1}{R} \left(\delta_{ik} - \frac{x_i}{R} \cdot \frac{\partial R}{\partial x_k} \right) = \frac{1}{R} (\delta_{ik} - x_i y_k),$$

где $y_k = R^{-1} \partial R / \partial x_k$. Определитель такой матрицы есть

$$R^{-n} \cdot \left(1 - \sum_{k=1}^n x_k y_k \right).$$

Легко проверить, что

$$|\omega_0 \omega_{n+1}| = \left| 1 - R^{-1} \sum_{k=1}^n x_k R_{x_k} \right|,$$

а это и доказывает предложение 1.

Перейдем к рассмотрению функций на компактифицированном пространстве $\mathbb{R}^{pq}$. Введем преобразование Кельвина функции $u(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, относительно точки x^* – функцию

$$v(\xi) := \langle \xi, \xi \rangle^{1-n/2} u \left(x^* + \frac{\xi}{\langle \xi, \xi \rangle} \right), \quad (6)$$

определенную при $\langle \xi, \xi \rangle \neq 0$. Это преобразование замечательно тем, что если $u(x)$ удовлетворяет уравнению $\square_x u = 0$, то и $v(\xi)$ удовлетворяет уравнению $\square_\xi v = 0$ при $\langle \xi, \xi \rangle \neq 0$. Пусть точка ξ^* лежит на конусе $\langle \xi^*, \xi^* \rangle = 0$. Тогда она является образом точки, лежащей на бесконечности. Будем говорить, что функция $u(x)$ является непрерывной, гладкой, удовлетворяющей уравнению $\square_x u = 0$ и т.д. на бесконечности в точке ξ^* , если соответствующим свойствам удовлетворяет ее преобразование Кельвина. В частности, функция $u(x)$ непрерывна на бесконечности, если существует (s, ν) -предел функции $\langle x, x \rangle^{n/2-1} u(x)$, не зависящий от знака бесконечности и от выбора $\Delta x(t)$.

Перейдем теперь к изучению обобщенного оператора Даламбера. Пусть функция $u(x)$ является решением уравнения

$$\square_x u = F(x).$$

Функцию $u(x)$ будем считать непрерывной на бесконечности.

Введем функцию, определенную равенством

$$V(X), \quad X \in P \cap Q, \quad V \left(\frac{1-\gamma}{2}, x, \frac{1+\gamma}{2} \right) = u(x).$$

Перейдем вместо x_0, x_{n+1} к переменным $\eta = x_0 - x_{n+1}$, $\zeta = x_0 + x_{n+1}$. На плоскости P переменная $\zeta = 1$, V является функцией от (η, x) , определенной на параболоиде $\eta = -\gamma$. Будем предполагать, что V произвольным гладким образом продолжена с параболоида.

Справедливы следующие предложения. (Мы опускаем доказательства предложений 2–5; они элементарны и сводятся к заменам переменных в дифференциальных уравнениях).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Функция $V(\eta, x)$ при $\eta = -\gamma$ удовлетворяет уравнению

$$-4V_{\eta\eta}\eta - 2nV_{\eta} - 4\sum_{i=1}^n V_{x_i\eta}x_i + \square V = G(x, \eta),$$

$$\partial_e G(x, \eta)|_{\eta=-\gamma} = F(x).$$

Пусть $W(X)$ – однородная степени $1 - n/2$ функция, совпадающая с $V(X)$ при $X \in P$, т.е. в переменных η, ζ, x .

$$W = \zeta^{1-n/2} V\left(\frac{\eta}{\zeta}, \frac{x}{\zeta}\right). \quad (7)$$

Введем дифференциальный оператор

$$\square^{\sharp} = \sum_{i=0}^{n+1} \sigma_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Значение $\square^{\sharp}W$ на конусе Q однозначно определяется сужением $W|_Q$.

Смысл предложения 3 в том, что благодаря свойству однородности W значение $\square^{\sharp}W$ на Q не зависит от способа продолжения функции V с параболоида $P \cap Q$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Функция $W(X)$ является при $X \in Q$ решением уравнения

$$\square^{\sharp}W = H(X),$$

где $H(X)$ однородная степени $-1 - n/2$ функция, $H(X)|_{X \in P} = G$, т.е. в переменных η, ζ, x

$$H(\eta, \zeta, x) = \zeta^{-1-(n/2)} G\left(\frac{x}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta}\right).$$

Введем в $\mathbb{R}^{n+2}$ бисферические координаты

$$r_p^{\sharp} = \left(\sum_{i=0}^p x_i^2\right)^{1/2}, \quad r_q^{\sharp} = \left(\sum_{i=p+1}^{n+1} x_i^2\right)^{1/2}, \quad \omega^{(p)}, \quad \omega^{(q)},$$

где $\omega^{(p)} = (\omega_0, \dots, \omega_p)$, $\omega^{(q)} = (\omega_{p+1}, \dots, \omega_{n+1})$ – соответственно $(p+1)$ - и $(q+1)$ -мерные единичные векторы. Обозначим через $\Delta_{\omega}^{(p)}$ и $\Delta_{\omega}^{(q)}$ угловые части $(p+1)$ - и $(q+1)$ -мерных операторов Лапласа

$$\sum_{i=0}^p \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad \text{и} \quad \sum_{i=p+1}^{n+1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Пусть оператор L , определенный на гладких функциях от $\Omega \in S_p \times S_q$, есть

$$L = \Delta_{\omega}^{(p)} - \Delta_{\omega}^{(q)} - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2. \quad (8)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Оператор $\square^\sharp W$ на $S_p \times S_q$ при условии однородности W степени $1 - n/2$ есть $L\Phi$, где

$$\Phi(\Omega) = W|_{S_p \times S_q}.$$

Отметим, что определенная формулой (7) функция $W(X)$ обладает (в зависимости от n) свойством четности или нечетности: $W(-X) = (-1)^{1-n/2}W(X)$. Очевидно, $\Phi(\Omega)$ обладает тем же свойством:

$$\Phi(-\Omega) = (-1)^{1-n/2}\Phi(\Omega). \quad (9)$$

Обозначим через $\mathcal{H}$ гильбертово пространство квадратично суммируемых на $S_p \times S_q$ функций, обладающих свойством (9). Рассмотрим оператор $L: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, определенный на гладких функциях равенством (8). Оператор L самосопряжен с точностью до замыкания. Последний факт доказывается предъявлением в явном виде спектрального разложения оператора L .

Приведем некоторые факты [5]. Как известно, сферические функции $Y_{kp}(\omega^{(p)})$ (значения однородных гармонических полиномов на единичной сфере S_p) образуют полную систему собственных функций угловой части оператора Лапласа,

$$\Delta_\omega^{(p)} Y_{kp}(\omega^{(p)}) = \lambda_k Y_{kp}(\omega^{(p)}),$$

где $\lambda_k = -k(k+p-1)$. Кратность собственного значения λ_k есть

$$m_{kp} = \frac{(k+p-2)!}{k!(p-1)!} (2k+p-1).$$

Особо выделим сферические функции, зависящие лишь от одной из координат (например ω_0), – полиномы Гегенбауэра

$$C_k^{(p-1)/2}(\omega_0) = D_k^p (1 - \omega_0^2)^{1-p/2} \frac{d^k}{d\omega_0^k} (1 - \omega_0^2)^{p/2-1+k}.$$

Коэффициент

$$D_k^p = \frac{(-1)^k}{k! 2^{p/2-1+k}} \cdot \frac{\Gamma(p-1+k)\Gamma(p/2)}{\Gamma(p/2+1+k)\Gamma(p-1)}.$$

Интегральный оператор $P_k: L_2(S_p) \rightarrow L_2(S_p)$, сопоставляющий функции от $\omega^{(p)}$ функцию аргумента $\omega^{(p)*}$,

$$P_k = \frac{\Gamma((p-1)/2)(2k+p-1)}{4\pi^{(p+1)/2}} \int C_k^{(p-1)/2}((\omega^{(p)}, \omega^{(p)*}))(\cdot) dS_p,$$

где $(\cdot, \cdot)$ – стандартное произведение в $\mathbb{R}^{p+1}$, является ортопроектором на подпространство сферических функций порядка k . Система сферических функций полна в $L_2(S_p)$. Из этих результатов, очевидно, вытекает, что $\mathcal{H}$ является ортогональной суммой подпространств M_{kl} функций вида

$$Z_{kl}(\Omega) = Y_{kp}(\omega^{(p)})Y_{lq}(\omega^{(q)}), \quad (10)$$

k и l имеют одинаковую четность при нечетном $n/2$ и противоположную при четном $n/2$. Функции $Z_{kl}(\Omega)$ являются собственными функциями оператора L , соответствующими собственному значению

$$\begin{aligned}\lambda_{kl} &= \lambda_k - \lambda_l = l(l+q-1) - k(k+p-1) + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \\ &= \left(l + \frac{q-1}{2}\right)^2 - \left(k + \frac{p-1}{2}\right)^2 = \left(l + k + \frac{n}{2} - 1\right) \left(l - k + \frac{q-p}{2}\right).\end{aligned}$$

Первый сомножитель в последнем представлении для λ_{kl} является положительным четным числом. Так как $l - k + (q-p)/2 = l + k - 2k + q - n/2$ и $l + k - n/2$ всегда нечетно, второй сомножитель имеет четность, противоположную четности q . При четных p и q он всегда нечетен и потому не может быть нулем, т.е. нуль не является собственным значением оператора L . При нечетных p и q существует бесконечное множество пар k и l , для которых $\lambda_{kl} = 0$. Нуль является собственным значением бесконечной кратности. Спектр оператора неограничен в обе стороны. Спектр обладает свойством частичной симметрии: пусть, для определенности $q \geq p$; тогда для каждого отрицательного собственного числа λ_{kl} , $k > l + (q-p)/2$, собственным числом будет также $-\lambda_{kl} = \lambda_{l+(q-p)/2, k-(q-p)/2}$. Все ненулевые собственные значения имеют конечную кратность. Нетрудно подсчитать кратность каждого собственного значения λ . Она равна $\sum_{(k,l)} m_{kp} m_{lq}$, где суммирование производится по множеству всех пар (k, l) , $k \geq 0$, $l \geq 0$, для которых $(k + l + n/2 - 1)(l - k + (q-p)/2) = \lambda$. Оператор проектирования на подпространство произведений сферических функций $Y_{kp}(\omega^{(p)}) Y_{lq}(\omega^{(q)})$ задается произведением операторов $P_k P_l$, где первый сомножитель P_k действует на функцию как функцию от $\omega^{(p)}$, второй, P_l , – как на функцию от $\omega^{(q)}$.

Переформулируем полученные результаты в терминах пространства $\mathbb{R}^n$, используя в обратном порядке предложения 2–5. Далее встретятся следующие обозначения: $X = (x_0, x_1, \dots, x_{n+1})$; через $x^{(p)}$, $x^{(q)}$ обозначены вектора $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $(x_{p+1}, \dots, x_{p+q}) \in \mathbb{R}^q$; соответственно, через $x^{(p\sharp)}$, $x^{(q\sharp)}$ – вектора $(x_0, x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$, $(x_{p+1}, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{q+1}$. Пусть $Z(\Omega)$ – собственная функция оператора L , отвечающая собственному значению λ . Построим ее однородное продолжение степени $1 - n/2$ на конус Q и далее (произвольное) гладкое продолжение на $\mathbb{R}^{n+2}$. В качестве такого продолжения можно взять

$$W = (r_p^\sharp)^{1-n/2} Z\left(\frac{x^{(p\sharp)}}{r_p^\sharp}, \frac{x^{(q\sharp)}}{r_p^\sharp}\right). \quad (11)$$

Функция W удовлетворяет на конусе Q уравнению $\square^\sharp W = \lambda H$, где H – однородное продолжение степени $-1 - n/2$ функции Z на Q , т.е. $(r_p^\sharp)^{-2} W$. Далее, пусть $V((1-\gamma)/2, x, (1+\gamma)/2)$ – сужение $W|_{P \cap Q}$, сужение $r_p^\sharp|_{P \cap Q}$ есть R . Если выбрать на параболоиде $P \cap Q$ в качестве координат x и обозначить

$$V\left(\frac{1 - \langle x, x \rangle}{2}, x, \frac{1 + \langle x, x \rangle}{2}\right) =: \varphi(x),$$

то для $\varphi(x)$ справедливо уравнение

$$\square \varphi = \lambda R^{-2} \varphi. \quad (12)$$

Функция φ удовлетворяет требованию непрерывности на бесконечности.

Введем функцию $\psi = R^{-1}\varphi$. Тогда ψ есть решение уравнения

$$R\Box R\psi = \lambda\psi.$$

Суммируя полученные выше результаты, мы приходим к следующим теоремам.

ТЕОРЕМА 1. *Замыкание оператора $D = R\Box R$, определенного на гладких функциях ψ таких, что $R\psi$ удовлетворяет условию непрерывности в бесконечно удаленных точках, есть самосопряженный оператор в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$.*

Пусть $\overline{D}$ – замыкание оператора D .

ТЕОРЕМА 2. *Спектр оператора $\overline{D}$ дискретен, неограничен в обе стороны. Его собственные значения*

$$\lambda_{k,l} = \left(l + \frac{q-1}{2}\right)^2 - \left(k + \frac{p-1}{2}\right)^2,$$

где k и l – целые неотрицательные числа одинаковой четности при нечетном $n/2$ и противоположной при четном $n/2$. Все ненулевые собственные значения – конечной кратности. При четных p и q нуль не является собственным значением. При нечетных p и q нуль является собственным значением бесконечной кратности. Спектр обладает частичной симметрией: если $\lambda_{k,l}$ – собственное значение, то и $-\lambda_{k,l} = \lambda_{l+(q-p)/2, k+(p-q)/2}$ – собственное значение при условии, что $l+(q-p)/2 \geq 0$ и $k+(p-q)/2 \geq 0$. Собственными функциями, соответствующими собственному значению $\lambda_{k,l}$, являются функции

$$\psi_{kl} = R^{-n/2} Y_{kp} \left(\frac{1-\gamma}{2R}, \frac{x^{(p)}}{R} \right) Y_{lq} \left(\frac{x^{(q)}}{R}, \frac{1+\gamma}{2R} \right).$$

Функции $\psi_{k'l'}$ и $\psi_{k''l''}$, соответствующие несовпадающим парам (k', l') и (k'', l'') , ортогональны в $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Ортогональность следует из предложения 1 и ортогональности собственных функций оператора L .

ЗАМЕЧАНИЕ. Возникает естественное желание рассмотреть краевую задачу для обобщенного уравнения Даламбера в компактифицированном псевдоевклидовом пространстве с заданными граничными значениями функции в бесконечно удаленных точках. Эта задача тесно связана с задачей для этого уравнения с данными на характеристическом конусе, решенной в работе [6].

Близкой к нашей тематике посвящены работы [7], [8].

Автор благодарен С. Ю. Доброхотову и А. П. Киселеву за ряд полезных замечаний.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. С. Благовещенский, “О некоторых новых задачах для волнового уравнения”, *Труды V Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн* (Ленинград, 13–17 июня 1970 г.), Наука, Л., 1971, 29–36.

- [2] А. С. Благовещенский, А. Н. Васильев, “Некоторые новые корректные задачи для ультрагиперболического уравнения”, *Вестн. ЛГУ. Сер. матем., мех., astron.*, 1976, № 19, 152–153.
- [3] Р. Пенроуз, В. Риндлер, *Спиноры и пространство-время. Спинорные и твисторные методы в геометрии пространства-времени*, Мир, М., 1988.
- [4] В. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Г. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения*, Наука, М., 1986.
- [5] *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, ред. М. Абрамовиц, И. Стиган, Наука, М., 1979.
- [6] А. С. Благовещенский, “О характеристической задаче для ультрагиперболического уравнения”, *Матем. сб.*, **63**:1 (1964), 137–168.
- [7] И. В. Волович, В. В. Козлов, “О суммируемых с квадратом решениях уравнения Клейна–Гордона на многообразиях”, *Докл. РАН*, **408**:3 (2006), 317–320.
- [8] V. V. Kozlov, I. V. Volovich, “Finite action Klein–Gordon solutions on Lorentzian manifolds”, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, **3**:7 (2006), 1349–1357.

А. С. Благовещенский

Санкт-Петербургский государственный университет

E-mail: ablagoreshhenski.j@yandex.ru

Поступило

20.06.2008

Исправленный вариант

24.10.2008