Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Крупи, Г. Рестуччия, Мономиальные модули и градуированные числа Бетти, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 5, 721–736

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6909>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 13:53:24

Мономиальные модули и градуированные числа Бетти

М. Крупи, Г. Рестучия

Пусть K – поле, $S = K[x_1, \dots, x_n]$ – кольцо многочленов над K и F – конечно порожденный градуированный свободный S -модуль с однородным базисом. Изучаются некоторые инварианты, такие как регулярность по Кастельнуово–Мамфорду и градуированные числа Бетти подмодулей F ; в частности, покомпонентно линейные подмодули модуля F охарактеризованы в терминах их градуированных чисел Бетти.

Библиография: 12 названий.

Введение. Пусть K – поле и $S = K[x_1, \dots, x_n]$ – кольцо многочленов над K от n переменных. Применяя базисы Грёбнера из коммутативной алгебры и используя деформации, можно перенести многие рассуждения на случай мономиальных идеалов в S , который может быть исследован комбинаторными методами. Эта стратегия весьма успешно применялась в последние годы. Если F – конечно порожденный градуированный свободный S -модуль с однородным базисом $\mathbf{g} = g_1, \dots, g_m$, то вычисления для подмодулей S -модуля F можно производить по аналогии с вычислениями для идеалов; в этом случае присутствуют все ингредиенты, нужные для применения метода базисов Грёбнера, такие как мономиальные порядки и понятие мономиальных подмодулей, которое обобщает понятие мономиальных идеалов в кольце многочленов. А именно, мономиальный S -модуль – это градуированный S -модуль, изоморфный мономиальному S -подмодулю S -модуля F , т.е. подмодулю $M \subset F$ типа $\bigoplus_{j=1}^m I_j g_j$, где I_j – мономиальные идеалы в S , порожденные теми мономами m_1 из S , для которых $m_1 g_j \in M$ [1]. Некоторые пути применения техники базисов Грёбнера в конструктивной теории модулей описаны в книге Эйзенбада [1; гл. 15], в которой освещены все главные вопросы. В настоящей статье мы продолжаем это исследование с целью продемонстрировать, сколь многие утверждения об идеалах в кольцах многочленов переносятся на подмодули конечно порожденных градуированных свободных модулей над кольцом многочленов. На основополагающую роль этого класса подмодулей мы указывали в нашей недавней статье [2]. Все реализации идеи применения базисов Грёбнера основаны на сравнении сначала произвольного идеала с соответствующим “исходным идеалом”, который является мономиальным идеалом, а затем подмодуля конечно порожденного градуированного свободного модуля над кольцом многочленов с соответствующим “исходным” подмодулем, который является мономиальным подмодулем. Многие результаты получаются естественным образом. Однако они еще раз подтверждают, что класс подмодулей конечно порожденного градуированного свободного модуля над кольцом многочленов очень близок классу идеалов кольца многочленов.

Главная цель этой работы состоит в переносе утверждения из [3] о покомпонентно линейных идеалах в S на покомпонентно линейные подмодули конечно порожденных градуированных свободных модулей над S .

В п. 1 мы напоминаем определения и факты, связанные с подмодулями конечно порожденного градуированного свободного S -модуля F с однородным базисом $\mathbf{g} = g_1, \dots, g_m$, такие как мономиальные порядки и метод базисов Грёбнера (см. [1]). Кроме того, мы анализируем класс S -подмодулей $N \subset F$, называемых неподвижными по Борелю подмодулями. Этот класс мономиальных S -модулей был введен в [4]. Мы исследуем основные свойства этих модулей и рассматриваем конструкцию генерического исходного модуля $\text{Gin}(N)$ подмодуля N модуля F , являющегося неподвижным по Борелю модулем относительно порядка degrevlex на F . Наконец, мы вычисляем степень регулярности по Кастельнуово–Мамфорду для неподвижных по Борелю подмодулей.

В п. 2 мы изучаем градуированные числа Бетти градуированных подмодулей M конечно порожденных градуированных свободных S -модулей F с однородным базисом. Мы показываем, что градуированные числа Бетти модуля $F/\text{in}_<(M)$ не меньше градуированных чисел Бетти модуля F/M относительно одночленного линейного порядка (term order) $<$ с помощью обобщения метода, используемого в случае идеалов в кольцах многочленов (см. [1]).

В п. 3 рассматриваются градуированные подмодули конечно порожденного градуированного свободного S -модуля F с однородным базисом, которые являются покомпонентно линейными модулями в смысле работы [5]. Мы исследуем градуированные числа Бетти $\beta_{i,j}$, $i, j \geq 0$, этих модулей в терминах свойств диаграмм Бетти их генерических исходных модулей. Такие модули являются покомпонентно линейными, если $\text{char}(K) = 0$.

Для $S = K[x_1, \dots, x_n]$, где $\text{char}(K) = 0$, конечно порожденного градуированного свободного S -модуля F с базисом и градуированного S -подмодуля $M \subset F$ мы доказываем, что

$$\beta_{i,j}(M) = \beta_{i,j}(\text{Gin}(M))$$

для всех i и j , если и только если M покомпонентно линеен.

Как известно, градуированные числа Бетти модуля M ограничены сверху градуированными числами Бетти модуля $\text{Gin}(M)$. Сформулированный выше результат – новое подтверждение того факта, что класс покомпонентно линейных модулей обладает тем замечательным свойством, что поведение градуированных чисел Бетти каждого модуля M из этого класса можно восстановить по поведению градуированных чисел Бетти его генерического исходного модуля.

Как следствие в случае $\text{char}(K) = 0$ мы получаем следующие результаты:

- (i) если M – покомпонентно линейный модуль, то

$$Z_i(M) \simeq Z_i(\text{Gin}(M)),$$

где $Z_i(M)$ (соответственно, $Z_i(\text{Gin}(M))$) – i -й модуль сизигий модуля M (соответственно, модуля $\text{Gin}(M)$);

- (ii) модуль M покомпонентно линеен тогда и только тогда, когда

$$\beta_{0,j}(M) = \beta_{0,j}(\text{Gin}(M)) \quad \text{для всех } j \quad \text{и} \quad Z_0(M) = Z_0(\text{Gin}(M)).$$

1. Предварительные сведения и обозначения. Пусть K – поле и $S = K[x_1, \dots, x_n]$ – кольцо многочленов над K . Мы рассматриваем K как $\mathbb{N}$ -градуированное кольцо, в котором все $\deg x_i$ равны 1.

Пусть F – конечно порожденный градуированный свободный S -модуль с однородным базисом $\mathbf{g} = g_1, \dots, g_m$. Элементы вида $m_1 = x^a g_i$, где $x^a = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$ для $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n$, называются *мономами* модуля F ; мы будем также говорить, что m_1 зависит от базисного элемента g_i . Любой моном m_1 модуля F , умноженный на скаляр, называется *одночленом* в F .

Положим

$$\deg(x^a g_j) = \deg(x^a) + \deg(g_j) = \sum_{i=1}^n a_i + \deg(g_j).$$

Если $\deg(g_i) = c \in \mathbb{N}_0$ для каждого g_i , то мы говорим, что базис $\mathbf{g}$ является равностепенно градуированным степени c и что модуль F равностепенно порожден.

В частности, если $F \simeq S^n$ и $g_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, где 1 стоит на i -м месте, имеем

$$\deg(x^a g_j) = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Поскольку мономы образуют базис в F , рассматриваемом как K -векторное пространство, любой элемент f модуля F единственным образом представляется как конечная сумма разных ненулевых мономов с коэффициентами из поля K .

Мономиальный подмодуль M модуля F – это подмодуль, порожденный мономами, т.е. $M = \bigoplus_{j=1}^m I_j g_j$, где I_j – мономиальные идеалы в кольце многочленов S , порожденные мономами m_1 из S , удовлетворяющими условию $m_1 g_j \in M$ (см. [1]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Мономиальный S -модуль* – это градуированный S -модуль, изоморфный мономиальному подмодулю конечно порожденного градуированного свободного S -модуля с однородным базисом.

Более подробно поведение мономиальных модулей рассматривается в [2].

Пусть F – конечно порожденный градуированный свободный S -модуль с однородным базисом $\mathbf{g} = g_1, \dots, g_m$.

Мы рассматриваем порядок *degrevlex* на множестве мономов в F , который определяется так: для $m_1 = x^a g_i$ и $m_2 = x^b g_j$, где $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_n)$, мы полагаем

$$m_1 > m_2, \quad \text{если} \quad \begin{cases} \deg(x^a g_i) > \deg(x^b g_j) & \text{или} \\ \deg(x^a g_i) = \deg(x^b g_j) \text{ и выполнено одно из условий:} \\ \quad \text{(i) существует } r, \text{ для которого } a_r < b_r \\ \quad \quad \text{и } a_s = b_s \text{ для } s > r; \\ \quad \text{(ii) } x^a = x^b \text{ и } i < j. \end{cases}$$

Любой элемент f модуля F единственным образом представляется в виде линейной комбинации мономов с коэффициентами из K . Максимальный моном в этом представлении называется *исходным мономом* для f и обозначается символом $\text{in}(f)$.

Для градуированного подмодуля $M \subset F$ *исходный модуль* определяется как $\text{in}(M) = \{\text{in}(f) : f \in M\}$.

Пусть $>$ – мономиальный порядок на F . Для $f, f_1, \dots, f_t \in F$ имеем (см. [1; предложение 15.6, алгоритм деления 15.7])

$$f = \sum p_i f_i + f', \quad f' \in F, \quad p_i \in S,$$

где ни один из мономов в f' не принадлежит множеству $(\text{in}(f_1), \dots, \text{in}(f_t))$ и $\text{in}(f) \geq \text{in}(p_i f_i)$ для каждого i . Любой такой элемент f' называется *остатком* элемента f относительно $f_1, \dots, f_t$, а выражение $f = \sum p_i f_i + f'$ называется *стандартным выражением* f через f_i .

Пусть $f_1, \dots, f_t$ – ненулевые элементы F , $\oplus S\varepsilon_i$ – свободный модуль с базисом $\{\varepsilon_i\}$, соответствующим элементам $\{f_i\}$ модуля F , и

$$\phi: \oplus S\varepsilon_i \rightarrow F, \quad \phi(\varepsilon_i) = f_i$$

– соответствующее отображение.

Для каждой пары индексов i, j , для которых $\text{in}(f_i)$ и $\text{in}(f_j)$ зависят от одного и того же базисного элемента F , мы полагаем

$$m_{ij} = \text{in}(f_i) / \text{НОД}(\text{in}(f_i), \text{in}(f_j)) \in S$$

и

$$\sigma_{ij} = m_{ji}\varepsilon_i - m_{ij}\varepsilon_j,$$

так что σ_{ij} порождают сизигии мономов $\text{in}(f_i)$.

Для каждой такой пары i, j выберем стандартное выражение

$$S(f_i, f_j) = m_{ji}f_i - m_{ij}f_j = \sum p_u^{(ij)} f_u + h_{ij}$$

для $S(f_i, f_j)$ относительно $f_1, \dots, f_t$.

Для удобства мы считаем, что $h_{ij} = 0$, если $\text{in}(f_i)$ и мономы $\text{in}(f_j)$ зависят от разных базисных элементов F . Имеет место следующая теорема ([1; теорема 15.8]).

ТЕОРЕМА 1.2 (Критерий Бухбергера). *Элементы $f_1, \dots, f_t$ образуют базис Грёбнера тогда и только тогда, когда $h_{ij} = 0$ для всех i и j .*

Отсюда вытекает такое следствие.

СЛЕДСТВИЕ 1.3. *Предположим, что выполнены условия теоремы 1.2 и M является подмодулем F , порожденным элементами $f_1, \dots, f_t \in M$. Тогда $f_1, \dots, f_t$ образуют базис Грёбнера в M , если и только если $S(f_i, f_j)$ редуцируются к 0 относительно множества $\{f_1, \dots, f_t\}$ для всех i и j .*

Всюду ниже мы предполагаем, что каждый элемент g_i базиса $\mathbf{g}$ модуля F однороден степени d_i , причем $d_1 \leq \dots \leq d_m$.

Пусть $\text{Gl}(n)$ – группа обратимых матриц размера $n \times n$ с элементами из K . Группа $\text{Gl}(n)$ является также группой градуированных автоморфизмов K -алгебры S ; для $\gamma = (a_{ij}) \in \text{Gl}(n)$ имеем $\gamma(x_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij}x_i$. Любой такой автоморфизм индуцирует естественное согласованное с ним действие на F по правилу $\gamma(\sum_{i=1}^m f_i g_i) = \sum_{i=1}^m \gamma(f_i)g_i$.

Пусть $\text{Gl}(F)$ – группа градуированных автоморфизмов S -модуля F . Тогда полупрямое произведение $G = \text{Gl}(n) \rtimes \text{Gl}(F)$ действует на F посредством автоморфизмов F , рассматриваемых как градуированное K -векторное пространство; это действие переводит подмодули в подмодули.

Пусть B – подгруппа группы G , состоящая из всех автоморфизмов, переводящих элементы g_i в S -линейные комбинации $g_1, \dots, g_i$, а элементы x_i – в K -линейные комбинации $x_1, \dots, x_i$. Группа B является борелевской группой группы G , и она допускает естественное представление верхнетреугольными матрицами. Обозначим через U унипотентную подгруппу B , т.е. подгруппу, состоящую из верхнетреугольных матриц с единицами на диагонали.

Подмодуль N модуля F называется *неподвижным по Борелю*, если $\gamma(N) = N$ для всякого $\gamma \in B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Пусть p – простое число, $k = \sum_i k_i p^i$ и $\ell = \sum_i \ell_i p^i$, где $0 \leq k_i, \ell_i \leq p-1$. Мы будем писать $k \leq_p \ell$, если $k_i \leq \ell_i$ для каждого i . Мы всегда будем предполагать, что p – характеристика поля K . Для $p = 0$ порядок $\leq_0$ совпадает с обычным порядком на множестве натуральных чисел.

Следующий результат характеризует неподвижные по Борелю подмодули.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. *Подмодуль N модуля F является неподвижным по Борелю, если и только если*

- (1) $N = I_1 g_1 \oplus \dots \oplus I_m g_m$ – мономиальный подмодуль;
- (2) для любого монома $u \in N$ из того, что $x_j^\ell \mid u$, $x_j^{\ell+1} \nmid u$ и $i < j$ вытекает, что $(x_i/x_j)^k u \in N$ для каждого $k \leq_p \ell$;
- (3) $(x_1, \dots, x_n)^{d_j-d_i} I_j \subseteq I_i$ для каждого $i < j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [4; предложение 6].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Подмодуль $N \subseteq F$ называется *стандартным неподвижным по Борелю* подмодулем, если N удовлетворяет условиям (1) и (3) предложения 1.5 и для каждого монома $u g_i \in N$ из $x_j \mid u$ вытекает $(x_i/x_j) u g_i \in N$, как только $i < j$.

Всякий стандартный неподвижный по Борелю подмодуль неподвижен по Борелю. Если поле K имеет нулевую характеристику, то любой неподвижный по Борелю подмодуль стандартен.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.7. Если $F = S = K[x_1, \dots, x_n]$ и $B(n) \subset \text{Gl}(n)$ – борелевская группа треугольных матриц, то элемент группы $B(n)$ переводит x_k в линейную комбинацию элементов $x_1, \dots, x_k$.

Идеал $I \subseteq S$ называется *неподвижным по Борелю*, если он инвариантен относительно $B(n)$, т.е. $\gamma(I) = I$ для каждого $\gamma \in B(n)$. Это свойство эквивалентно следующим условиям:

- (i) I является мономиальным идеалом;
- (ii) для всякого монома $u \in I$ из условий $x_j^\ell \mid u$, $x_j^{\ell+1} \nmid u$ и $i < j$ вытекает, что $(x_i/x_j)^k u \in I$ для каждого $k \leq_p \ell$.

Идеал $I \subseteq S$ является *стандартным неподвижным по Борелю* идеалом в S , если I – мономиальный идеал и для каждого монома $u \in I$ из $x_j \mid u$ вытекает $(x_i/x_j) u \in I$, как только $i < j$.

Таким образом, из определения 1.6 следует, что всякий стандартный неподвижный по Борелю подмодуль $N \subseteq F$ имеет структуру

$$N = I_1 g_1 \oplus \dots \oplus I_m g_m,$$

где каждый мономиальный идеал I_j является стандартным неподвижным по Борелю идеалом в S и $(x_1, \dots, x_n)^{d_j-d_i} I_j \subseteq I_i$ для любых $i < j$.

Если базис $\mathbf{g} = \{g_1, \dots, g_m\}$ является равностепенно градуированным, то условие (3) предложения 1.5 эквивалентно включениям $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_m$.

ПРИМЕР 1.8. Пусть $S = K[X, Y, Z]$ и $F = S^2$ – градуированный свободный S -модуль с базисом $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ (K – поле). Тогда мономиальный S -подмодуль $M = (X^2, XY, Y^3, Y^2Z)e_1 \oplus (X^2, XY^2)e_2$ модуля F является стандартным неподвижным по Борелю подмодулем модуля F .

Следующий результат содержится в [4; предложение 5].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.9. Пусть N – подмодуль модуля F и G , B и U – те же, что и выше. Обозначим символом $>$ порядок degrevlex . Тогда найдется открытое в топологии Зарисского множество $\mathcal{G} \subseteq G$ со следующими свойствами:

- (1) $\text{in}(\gamma_1(N)) = \text{in}(\gamma_2(N))$ для всех $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{G}$;
- (2) модуль $\text{in}(\gamma(N))$ неподвижен по Борелю для каждого $\gamma \in \mathcal{G}$;
- (3) $\mathcal{G} \cap U \neq \emptyset$.

Если $\gamma \in \mathcal{G}$ удовлетворяет условиям предложения 1.9, то неподвижный по Борелю подмодуль $\text{in}(\gamma(N))$ называется *генерическим исходным модулем* подмодуля N относительно выбранного порядка; его обозначают $\text{Gin}(N)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.10. Если N – неподвижный по Борелю подмодуль модуля F , то $\text{Gin}(N) = N$.

Действительно, если N – неподвижный по Борелю подмодуль модуля F , то имеем $\gamma(N) = N$ для всех $\gamma \in B$, в частности, для всех $\gamma \in \mathcal{U}$. Согласно предложению 1.9 имеем $\text{in}(\gamma(N)) = \text{in}(N) = N$, откуда и вытекает требуемое утверждение.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.11. Заметим, что $\text{in}(N) \neq \text{Gin}(N)$. Действительно, если $S = K[X, Y, Z]$, $F = S^2$ – градуированный свободный S -модуль с базисом $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, K – поле и $N = (X^2, X^2Z + Y^3, Z^3)e_1 \oplus (X^2 + Y^2)e_2$ – подмодуль модуля F над S , то относительно порядка degrevlex

$$\text{in}(N) = (X^2, Y^3, Z^3)e_1 \oplus (X^2)e_2,$$

тогда как

$$\text{Gin}(N) = (X^2, XY^2, Y^3, XYZ^2, Y^2Z^2, XZ^4, YZ^4, Z^6)e_1 \oplus (X^2)e_2.$$

Пусть M – градуированный конечно порожденный S -модуль. Тогда M имеет минимальную градуированную свободную S -резольвенту вида

$$F.: 0 \longrightarrow F_s \longrightarrow \dots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

где $F_i = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} S(-j)^{\beta_{i,j}}$.

Целые числа $\beta_{i,j} = \beta_{i,j}(M) = \dim_K \text{Tor}_i(M, K)_j$ называются *градуированными числами Бетти* модуля M , а числа $\beta_i(M) = \sum_j \beta_{i,j}(M)$ называются *числами Бетти* модуля M .

Напомним, что для конечно порожденного градуированного S -модуля M *степень регулярности по Кастельнуово–Мамфорду* модуля M определяется формулой

$$\text{reg}(M) = \max\{j - i : \text{Tor}_i^S(K, M)_j \neq 0\} = \max\{j : \beta_{i,i+j}(M) \neq 0\}.$$

ТЕОРЕМА 1.12. Пусть F – конечно порожденный градуированный свободный S -модуль с базисом $\mathbf{g} = \{g_1, \dots, g_m\}$, $M = \bigoplus_{k=1}^m I_k g_k$ – мономиальный подмодуль модуля F и d – максимальная степень мономиального порождающего модуля M .

Тогда если все I_k являются стандартными неподвижными по Борелю идеалами в S , то $\text{reg}(M) = d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\text{reg}(M) = \text{reg}\left(\bigoplus_{k=1}^m I_k g_k\right) = \max\{\text{reg}(I_k g_k), k = 1, \dots, m\},$$

где

$$\text{reg}(I_k g_k) = \max\{j : \beta_{i,i+j}(I_k g_k) \neq 0\}$$

для каждого k .

Поскольку I_k является стандартным неподвижным по Борелю идеалом, из того, что $q_k = \deg(g_k)$ – максимальная степень мономиального порождающего идеала I_k , получаем $\text{reg}(I_k g_k) = q_k$ [6; предложение 2.11].

Значит,

$$\text{reg}(M) = \max\{q_1, \dots, q_m\},$$

и это число равно максимальной степени мономиального порождающего модуля M .

СЛЕДСТВИЕ 1.13. Если выполнены условия теоремы 1.12 и базис $\mathbf{g} = \{g_1, \dots, g_m\}$ равностепенно градуирован степени $c \geq 0$, то

$$\text{reg}(M) = \max\{\text{reg}(I_k), i = 1, \dots, m\} + c.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.14. В случае, когда M является стандартным неподвижным по Борелю подмодулем модуля F , утверждение теоремы 1.12 становится очевидным.

2. Градуированные числа Бетти. Пусть F – конечно порожденный градуированный $S = K[x_1, \dots, x_n]$ -модуль с однородным базисом $\mathbf{g} = g_1, \dots, g_m$.

Рассмотрим групповой гомоморфизм $\lambda: \mathbb{Z}^{n+m} \rightarrow \mathbb{Z}$.

Вес монома $m_1 = x^a g_i \in F$ определяется как

$$\lambda(m_1) = \lambda(a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0),$$

где $a = (a_1, \dots, a_n)$ и 1 стоит на $(n+i)$ -м месте [7].

Любой групповой гомоморфизм λ определяет частичный порядок $>_\lambda$, который называется *весовым порядком*, ассоциированным с λ , по правилу

$$m_1 >_\lambda m_2 \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad \lambda(m_1) > \lambda(m_2).$$

Скажем, что гомоморфизм λ *согласован* с данным мономиальным порядком $>$ на F , если из неравенства $m_1 >_\lambda m_2$ вытекает неравенство $m_1 > m_2$.

Для данного весового порядка λ на F и произвольного $f \in F$ определим $\text{in}_\lambda(f)$ как сумму всех максимальных относительно $>_\lambda$ слагаемых в f . Для подмодуля N модуля F через $\text{in}_\lambda(N)$ мы обозначаем подмодуль, порожденный элементами $\text{in}_\lambda(f)$ для всех $f \in N$.

ПРИМЕР 2.1. Пусть $S = K[X, Y]$, $F = S^2$ – градуированный свободный S -модуль с базисом $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, K – поле и

$$N = (X^5Y^2 + X^4Y^4 + X^4 + X^2Y^5 + XY^2 + Y^6 + Y)e_1 \oplus (X^3Y + X^3Y^5)e_2$$

– градуированный S -подмодуль модуля F .

Рассмотрим $\lambda = (1, 1, 1, 1) \in \mathbb{Z}^{2+2}$. Для каждого элемента $f \in F$, который имеет вид

$$f = \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j_i} c_{j_i} X^{a_{1j_i}} Y^{a_{2j_i}} \right) e_i, \quad c_{j_i} \in K \setminus \{0\}, \quad a_{1j_i}, a_{2j_i} \in \mathbb{N}_0,$$

$\text{in}_\lambda(f)$ представляет собой сумму всех слагаемых $c_{j_i} X^{a_{1j_i}} Y^{a_{2j_i}} e_i$ элемента f , для которых скалярное произведение

$$\lambda \cdot \lambda(X^{a_{1j_i}} Y^{a_{2j_i}} e_i) = \begin{cases} \lambda \cdot (a_{1j_i}, a_{2j_i}, 1, 0), & \text{если } i = 1, \\ \lambda \cdot (a_{1j_i}, a_{2j_i}, 0, 1), & \text{если } i = 2, \end{cases}$$

максимально (относительно обычного порядка на $\mathbb{Z}$).

Непосредственные вычисления показывают, что скалярные произведения

$$\lambda \cdot \lambda(X^4Y^4e_1) = (1, 1, 1, 1) \cdot (4, 4, 1, 0) = 9,$$

$$\lambda \cdot \lambda(X^3Y^5e_2) = (1, 1, 1, 1) \cdot (3, 5, 0, 1) = 9$$

максимальны, так что

$$\text{in}_\lambda(N) = \langle \text{in}_\lambda(f), \quad f \in N \rangle = (X^4Y^4)e_1 \oplus (X^3Y^5)e_2,$$

и эта прямая сумма является мономиальным подмодулем модуля F .

Пусть $S[t]$ – кольцо многочленов от одной переменной над S . Для каждого

$$f = \sum_{j=1}^m u_{aj} x^a g_j \in F, \quad u_{aj} \in K \setminus \{0\},$$

определим $\tilde{f} \in F \otimes S[t] = \bigoplus_{j=1}^m S[t]g_j = \tilde{F}$ следующим образом. Положим $b = \max\{\lambda(x^a g_j), j = 1, \dots, m\}$ и

$$\tilde{f} = t^b \left(\sum_{j=1}^m u_{aj} x^a t^{-\lambda(x^a g_j)} g_j \right).$$

По определению числа b $\tilde{f}$ есть сумма монома $\text{in}_\lambda(f)$ и t , умноженного на элемент F .

Полагая $\tilde{N} = \langle \tilde{f}, f \in N \rangle$ для подмодуля N модуля F , имеем

$$\tilde{F}/(t\tilde{F} + \tilde{N}) = \left(\bigoplus_{j=1}^m S[t]g_j \right) / (t\tilde{F} + \tilde{N}) \simeq \left(\bigoplus_{j=1}^m Sg_j \right) / \text{in}_\lambda(N) = F / \text{in}_\lambda(N).$$

Отсюда вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.2. *Во введенных выше обозначениях для любого подмодуля $N \subset F$ $K[t]$ -модуль $\tilde{F}/\tilde{N}$ является свободным, а значит, и плоским (как $K[t]$ -модуль). Более того,*

- (1) $\tilde{F}/\tilde{N} \otimes_{K[t]} K[t]/(t) \simeq F/\text{in}_\lambda(N)$;
- (2) $\tilde{F}/\tilde{N} \otimes_{K[t]} K[t, t^{-1}] \simeq F/N \otimes_{K[t]} K[t, t^{-1}]$,

где $K[t, t^{-1}]$ – кольцо многочленов Лорана.

Мы не приводим доказательства этой теоремы, поскольку оно проводится так же, как в случае $F = S$, рассмотренном в [1; теорема 15.17].

ТЕОРЕМА 2.3. *Пусть N – градуированный подмодуль конечно порожденного градуированного свободного S -модуля F с однородным базисом $\mathbf{g} = g_1, \dots, g_m$.*

Тогда для любого одночленного порядка (term order) $<$ выполнено неравенство

$$\beta_{i,j}(F/N) \leq \beta_{i,j}(F/\text{in}_<(N)) \quad \text{для всех } i, j.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть t – неопределенная величина степени 0, и пусть $\tilde{F} = \bigoplus_{j=1}^m S[t]g_j$ – конечно порожденный градуированный свободный $S[t]$ -модуль.

По теореме 2.2 существует градуированный подмодуль $\tilde{N}$ модуля $\tilde{F}$, для которого $K[t]$ -модуль $\tilde{F}/\tilde{N}$ является свободным (а значит, и плоским над $K[t]$) $K[t]$ -модулем, причем

- (1) $\tilde{F}/\tilde{N} \otimes_{K[t]} K[t]/(t) \simeq F/\text{in}_<(N)$;
- (2) $\tilde{F}/\tilde{N} \otimes_{K[t]} K[t, t^{-1}] \simeq F/N \otimes_K K[t, t^{-1}]$.

Пусть F – минимальная градуированная свободная $S[t]$ -резольвента модуля $\tilde{F}/\tilde{N}$. Тогда из (1) вытекает, что $F \otimes K[t]/(t)$ – минимальная градуированная свободная S -резольвента модуля $F/\text{in}_<(N)$. Значит, $\beta_{i,j}(\tilde{F}/\tilde{N}) = \beta_{i,j}(F/\text{in}_<(N))$ для всех i, j .

Кроме того, из (2) вытекает, что $F \otimes K[t, t^{-1}]$ является градуированной (не обязательно минимальной) свободной $S \otimes K[t, t^{-1}]$ -резольвентой модуля $F/N \otimes K[t, t^{-1}]$.

Таким образом,

$$\beta_{i,j}(F/N) \leq \beta_{i,j}(\tilde{F}/\tilde{N}) = \beta_{i,j}(F/\text{in}_<(N)).$$

3. Покомпонентно линейные модули. В работе [5] было введено понятие покомпонентно линейных модулей над алгеброй Кошуля R , которое представляет собой обобщение понятия покомпонентно линейных идеалов, введенного в [3].

Пусть M – конечно порожденный градуированный модуль над алгеброй Кошуля R . Для каждого i обозначим через $M_{\langle i \rangle}$ R -подмодуль модуля M , порожденный всеми элементами M степени i .

Кроме того, для каждого i обозначим через $M_{\leq i}$ (соответственно $M_{\geq i}$) R -подмодуль модуля M , порожденный элементами степени $\leq i$ (соответственно $\geq i$) в M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть M – конечно порожденный градуированный R -модуль. Будем говорить, что M *покомпонентно линейен*, если для всех $M_{\langle i \rangle}$ существуют линейные резольвенты.

В следующем предложении (см. [5; предложение 3.2]) утверждается, что градуированные числа Бетти покомпонентно линейного модуля определяются градуированными числами Бетти его компонент.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть M – покомпонентно линейный модуль над R . Тогда

$$\beta_{i,i+j}(M) = \beta_i(M_{\langle j \rangle}) - \beta_i(mM_{\langle j-1 \rangle}).$$

Здесь t обозначает несущественный идеал $(x_1, \dots, x_n)$ в R .

Всюду ниже мы предполагаем, что рассматриваемая алгебра Кошуля – это кольцо многочленов $S = k[x_1, \dots, x_n]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть F – конечно порожденный градуированный свободный S -модуль с однородным базисом $\mathbf{g} = g_1, \dots, g_m$ и $M = \bigoplus_{j=1}^m I_j g_j$ – мономиальный подмодуль модуля F .

Предположим, что каждый идеал I_j является стандартным неподвижным по Борелю идеалом в S . Тогда M является покомпонентным линейным S -модулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всякого ℓ имеем

$$\beta_{i,i+k}(M_{(\ell)}) = \beta_{i,i+k} \left(\bigoplus_{j=1}^m (I_j g_j)_{(\ell)} \right) = \sum_{j=1}^m \beta_{i,i+k}((I_j g_j)_{(\ell)}).$$

Поскольку каждый идеал I_j является стандартным неподвижным по Борелю идеалом, $I_j g_j$ – стандартный неподвижный по Борелю подмодуль модуля F , так что $(I_j g_j)_{(\ell)}$ является стандартным неподвижным по Борелю подмодулем модуля F , порожденным в степени ℓ . Поэтому $(I_j g_j)_{(\ell)}$ допускает линейную резольвенту [8], т.е. для каждого j существует такое $m_j = \ell \geq 1$, что $\beta_{i,i+k}((I_j g_j)_{(\ell)}) = 0$ для всех i и $k \neq m_j = \ell$. Значит, $\beta_{i,i+k}(M_{(\ell)}) = 0$ для всех i и $k \neq \ell$, и M является покомпонентно линейным модулем над алгеброй Кошуля S .

Отсюда вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Если выполнены условия предложения 3.3 и $\text{char}(K) = 0$, то $\text{Gin}(M)$ является покомпонентно линейным S -модулем.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. В случае, когда M является стандартным неподвижным по Борелю подмодулем модуля F , предложение 3.3 становится очевидным.

ПРИМЕР 3.6. Пусть $S = \mathbb{Q}[X, Y, Z]$ и $F = S^2$ – градуированный свободный S -модуль с базисом $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ ($\mathbb{Q}$ – поле рациональных чисел).

Минимальная градуированная свободная S -резольвента неподвижного по Борелю S -подмодуля

$$M = (X^2, XY, Y^3, Y^2 Z)e_1 \oplus (X^2, XY^2)e_2$$

модуля F имеет вид

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow S(-5) \longrightarrow S(-3) \oplus S(-4)^4 \\ \longrightarrow S(-2)^3 \oplus S(-3)^3 \longrightarrow M \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим минимальную градуированную свободную резольвенту модуля $M_{(j)}$ при $j \geq 2$.

Для

$$M_{(2)} = (X^2, XY)e_1 \oplus (X^2)e_2$$

она имеет вид

$$0 \longrightarrow S(-3) \longrightarrow S(-2)^3 \longrightarrow M_{(2)} \longrightarrow 0;$$

для

$$M_{(3)} = (X^3, X^2 Y, X^2 Z, XY^2, XYZ, Y^3, Y^2 Z)e_1 \oplus (X^3, X^2 Y, X^2 Z, XY^2)e_2$$

она имеет вид

$$0 \longrightarrow S(-5)^4 \longrightarrow S(-4)^{13} \longrightarrow S(-3)^{11} \longrightarrow M_{\langle 3 \rangle} \longrightarrow 0$$

и т.д. Таким образом, M является покомпонентно линейным S -модулем.

Заметим, что $\text{reg}(M) = 3$ и 3 является максимальной степенью мономиального порождающего модуля M (по теореме 1.12).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.7. Заметим, что если F – конечно порожденный градуированный свободный S -модуль с равностепенно градуированным однородным базисом $\mathbf{g} = g_1, \dots, g_m$ степени c , $M = \bigoplus_{j=1}^m I_j g_j$ – подмодуль модуля F , где каждый идеал I_j является мономиальным идеалом в S , и s является наименьшей степенью мономиального порождающего, принадлежащего объединению $G(I_1) \cup G(I_1) \cup \dots \cup G(I_m)$, где $G(I_i)$ – единственная минимальная система мономиальных порождающих идеала I_i для каждого i , причем $c < s$, то

$$M_{\langle i \rangle} = I_{1\langle i-c \rangle} g_1 \oplus \dots \oplus I_{m\langle i-c \rangle} g_m,$$

где $I_{j\langle i-c \rangle}$ обозначает идеал, порожденный всеми мономами в S степени $i - c$, принадлежащими идеалу I_j .

Действительно, если $f \in M$, то f можно единственным образом записать в виде $f = \sum_{j=1}^m f_j g_j$, где f_j – полином из S , принадлежащий идеалу I_j . Значит, элемент $f_{\langle i \rangle}$ модуля $M_{\langle i \rangle}$ имеет вид

$$f_{\langle i \rangle} = f_{1\langle i-c \rangle} g_1 + \dots + f_{m\langle i-c \rangle} g_m,$$

где $f_{j\langle i-c \rangle}$ обозначает однородный многочлен из S степени $i - c$, принадлежащий идеалу I_j , т.е. элемент идеала $I_{j\langle i-c \rangle}$.

Следующая лемма доказывается так же, как лемма 1.1 в [9], однако ее доказательство в данном контексте представляет интерес. Ключевой момент доказательства опирается на следующую лемму из [10].

ЛЕММА 3.8. Пусть $\text{char}(K) = 0$, F – конечно порожденный градуированный свободный S -модуль с однородным базисом и $M \subset F$ – градуированный S -подмодуль, порожденный в степени d . Тогда

- (i) если $\beta_{i,i+j}(\text{Gin}(M)) \neq 0$, то $\beta_{i',i'+j}(\text{Gin}(M)) \neq 0$ для всех $i' < i$;
- (ii) если $\beta_{0,j}(\text{Gin}(M)) \neq 0$, то $\beta_{0,j'}(\text{Gin}(M)) \neq 0$ для всех $d \leq j' < j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Имеем $\text{Gin}(M) = \bigoplus_{j=1}^m I_j g_j$, где I_j – неподвижные по Борелю идеалы в S и

$$\beta_{i,i+k}(\text{Gin}(M)) = \sum_{j=1}^m \beta_{i,i+k}(I_j g_j).$$

Поскольку I_j – стандартные неподвижные по Борелю идеалы в S , те же рассуждения, что и в [10; лемма 2.1], приводят к неравенству $\beta_{i',i'+k}(I_j g_j) \neq 0$ для всех $i' < i$. Значит, $\beta_{i',i'+k}(\text{Gin}(M)) \neq 0$ для всех $i' < i$.

(ii) Пусть $e_1, \dots, e_n$ – порождающие модуля M степени d . Предположим, что $\beta_{0,j-1}(\text{Gin}(M)) = 0$. Рассмотрим $M_{\geq j-2}$.

Поскольку $\text{Gin}(M_{\geq j-2}) = \text{Gin}(M)_{\geq j-2}$, можно считать, что $\beta_{0,d+1}(\text{Gin}(M)) = 0$.

Нам надо доказать, что модуль $\text{Gin}(M)$ порожден в степени d .

Из равенства $\beta_{0,d+1}(\text{Gin}(M)) = 0$ вытекает, что все S -многочлены степени $d + 1$ редуцируются к нулю относительно $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Согласно [1; лемма 15.1] и следствию 1.3 множество порождающих $G = \{e_1, \dots, e_n\}$ модуля N является базисом Грёбнера в модуле N тогда и только тогда, когда каждый S -многочлен из минимального множества однородных порождающих первого модуля сизигий подмодуля $\langle \text{in}(e_1), \dots, \text{in}(e_n) \rangle$ редуцируется к нулю относительно G .

Значит, $\{e_1, \dots, e_n\}$ – базис Грёбнера в модуле M . Это равносильно утверждению, что модуль $\text{Gin}(M)$ порожден в степени d .

Действительно, выбрав координаты в общем положении, мы можем считать, что $\text{Gin}(M) = \text{in}(M)$ и $\text{in}(M) = \langle \text{in}(e_1), \dots, \text{in}(e_n) \rangle$, где каждый моном $\text{in}(e_i)$ имеет степень d ; поэтому модуль $\text{Gin}(M)$ порожден в степени d .

ЛЕММА 3.9. Пусть M и N – градуированные конечно порожденные S -модули в степени d с одними и теми же градуированными числами Бетти. Тогда $M_{\geq d+1}$ и $N_{\geq d+1}$ имеют одни и те же градуированные числа Бетти.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [9; лемма 1.2].

Наконец, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.10. Пусть $S = K[x_1, \dots, x_n]$, где $\text{char}(K) = 0$, и пусть F – конечно порожденный градуированный свободный S -модуль с однородным базисом, а $M \subset F$ – градуированный S -подмодуль. Тогда

$$\beta_{i,j}(M) = \beta_{i,j}(\text{Gin}(M))$$

для всех i и j , если и только если модуль M покомпонентно линеен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.1 из [9], но мы приведем его первую часть.

Предположим, что модуль M покомпонентно линеен. Тогда из предложения 3.2 получаем

$$\beta_{i,i+j}(M) = \beta_i(M_{\langle j \rangle}) + \beta_i(mM_{\langle j-1 \rangle}),$$

где m – несущественный максимальный идеал $(x_1, \dots, x_n)$ в S .

Поскольку модуль $\text{Gin}(M)$ покомпонентно линеен (см. следствие 3.4), та же формула верна для $\text{Gin}(M)$. Следовательно, для доказательства равенства $\beta_{i,i+j}(M) = \beta_{i,i+j}(\text{Gin}(M))$ достаточно проверить, что $\beta_i(M_{\langle j \rangle}) = \beta_i(\text{Gin}(M)_{\langle j \rangle})$ и $\beta_i(mM_{\langle j-1 \rangle}) = \beta_i(m\text{Gin}(M)_{\langle j-1 \rangle})$.

Согласно [11] степень регулярности градуированного подмодуля градуированного свободного S -модуля равна степени регулярности его генерического исходного подмодуля. Поскольку модуль M покомпонентно линеен, а значит, $M_{\langle j \rangle}$ обладает линейной резольвентой, можно считать, что $\text{Gin}(M_{\langle j \rangle}) = \text{Gin}(M)_{\langle j \rangle}$.

С другой стороны, модули $M_{\langle j \rangle}$ и $\text{Gin}(M_{\langle j \rangle})$ имеют одну и ту же гильбертову функцию, и из того, что числа Бетти модуля с линейной резольвентой определяются его гильбертовой функцией, получаем $\beta_{i,i+j}(M_{\langle j \rangle}) = \beta_{i,i+j}(\text{Gin}(M_{\langle j \rangle}))$.

Те же рассуждения в применении к модулю $mM_{\langle j \rangle}$, обладающему линейной резольвентой, приводят к равенству $\beta_{i,i+j}(mM_{\langle j-1 \rangle}) = \beta_{i,i+j}(m\text{Gin}(M_{\langle j-1 \rangle}))$.

Предположим теперь, что $\beta_{i,i+j}(M) = \beta_{i,i+j}(\text{Gin}(M))$.

Доказательство того, что модуль M покомпонентно линеен, содержится в [9; теорема 1.1]. Оставшаяся часть доказательства легко сводится к случаю модулей.

Доказанная теорема имеет такое следствие.

СЛЕДСТВИЕ 3.11. Пусть $S = K[x_1, \dots, x_n]$, где $\text{char}(K) = 0$, и пусть F – конечно порожденный градуированный свободный S -модуль с однородным базисом, а $M \subset F$ – покомпонентный линейный модуль. Тогда

$$\beta_{0,j}(\text{Gin}(Z_i(M))) = \beta_{0,j}(\text{Gin}(Z_i(\text{Gin}(M)))) \quad \text{для всех } i, j,$$

где $Z_i(M)$ (соответственно, $Z_i(\text{Gin}(M))$) – i -й модуль сизигий модуля M (соответственно, модуля $\text{Gin}(M)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, заметим, что

$$\beta_{i,j}(M) = \beta_{0,j}(Z_i(M)) \quad \text{для всех } i, j.$$

Согласно теореме 3.10 имеем

$$\beta_{0,j}(Z_i(M)) = \beta_{i,j}(\text{Gin}(M)) = \beta_{0,j}(Z_i(\text{Gin}(M))).$$

С другой стороны (см. [12; теорема 3.2.8]), если модуль M покомпонентно линеен, то модуль $Z_i(M)$ тоже покомпонентно линеен. Значит,

$$\begin{aligned} \beta_{0,j}(Z_i(M)) &= \beta_{0,j}(\text{Gin}(Z_i(M))), \\ \beta_{0,j}(Z_i(\text{Gin}(M))) &= \beta_{0,j}(\text{Gin}(Z_i(\text{Gin}(M)))). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$\beta_{0,j}(\text{Gin}(Z_i(M))) = \beta_{0,j}(\text{Gin}(Z_i(\text{Gin}(M)))).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ. Если K – поле характеристики 0 и M – покомпонентно линейный модуль, то $\text{Gin}(Z_i(M)) = \text{Gin}(Z_i(\text{Gin}(M)))$.

Это утверждение верно для неподвижного по Борелю подмодуля M . Действительно, в этом случае $\text{Gin}(M) = M$ (см. замечание 1.10).

ТЕОРЕМА 3.12. Пусть $S = K[x_1, \dots, x_n]$, где $\text{char}(K) = 0$, и пусть F – конечно порожденный градуированный свободный S -модуль с однородным базисом, а $M \subset F$ – покомпонентно линейный модуль. Тогда

$$Z_i(M) \simeq Z_i(\text{Gin}(M)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку модуль M покомпонентно линеен, имеем $\beta_{i,j}(M) = \beta_{i,j}(\text{Gin}(M))$ для всех i и j .

Значит, M и $\text{Gin}(M)$ имеют следующие минимальные градуированные свободные S -резольвенты:

$$0 \longrightarrow \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{m,j}} \xrightarrow{f_m} \dots \xrightarrow{f_1} \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{0,j}} \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0, \quad (3.1)$$

$$0 \longrightarrow \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{m,j}} \xrightarrow{f'_m} \dots \xrightarrow{f'_1} \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{0,j}} \xrightarrow{f'_0} \text{Gin}(M) \longrightarrow 0. \quad (3.2)$$

Для упрощения обозначений положим $F_i = \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{i,j}}$.

Таким образом, модули $Z_i(M) = \text{Ker } f_{i-1}$ и $Z_i(\text{Gin}(M)) = \text{Ker } f'_{i-1}$ имеют одно и то же число порождающих в каждой степени, что позволяет определить естественный S -изоморфизм ϕ_i между $Z_i(M)$ и $Z_i(\text{Gin}(M))$, который переводит порождающие данной степени в порождающие той же степени.

Из точных последовательностей (3.1) и (3.2) получаем

$$Z_m(M) = \text{im } f_m \simeq F_m \simeq \text{im } f'_m = Z_m(\text{Gin}(M)).$$

Рассмотрим коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F_m & \xrightarrow{f_m} & F_{m-1} & \xrightarrow{f_{m-1}} & \text{im } f_{m-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow 1_{F_m} & & \downarrow 1_{F_{m-1}} & & \downarrow \phi_{m-1} \\ 0 & \longrightarrow & F_m & \xrightarrow{f'_m} & F_{m-1} & \xrightarrow{f'_{m-1}} & \text{im } f'_{m-1} \longrightarrow 0, \end{array}$$

где 1_{F_m} и $1_{F_{m-1}}$ – тождественные отображения.

Поскольку 1_{F_m} и $1_{F_{m-1}}$ – изоморфизмы, отображение ϕ_{m-1} тоже является изоморфизмом, а потому $Z_{m-1}(M) = \text{im } f_{m-1} \simeq \text{im } f'_{m-1} = Z_{m-1}(\text{Gin}(M))$.

Теперь рассмотрим коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Z_{m-1}(M) & \xrightarrow{i_{m-1}} & F_{m-2} & \xrightarrow{f_{m-2}} & \text{im } f_{m-2} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \phi_{m-1} & & \downarrow 1_{F_{m-2}} & & \downarrow \phi_{m-2} \\ 0 & \longrightarrow & Z_{m-1}(\text{Gin}(M)) & \xrightarrow{j_{m-1}} & F_{m-2} & \xrightarrow{f'_{m-2}} & \text{im } f'_{m-2} \longrightarrow 0, \end{array}$$

где i_{m-1} и j_{m-1} – погружения. Поскольку ϕ_{m-1} и $1_{F_{m-2}}$ – изоморфизмы, отображение ϕ_{m-2} тоже является изоморфизмом, а потому $Z_{m-2}(M) = \text{im } f_{m-2} \simeq \text{im } f'_{m-2} = Z_{m-2}(\text{Gin}(M))$.

Аналогичные рассуждения приводят к заключению, что $Z_i(M) \simeq Z_i(\text{Gin}(M))$ для всех $i \geq 0$.

ПРИМЕР 3.13. Пусть $S = \mathbb{Q}[X, Y, Z]$ и $F = S^2$ – градуированный свободный S -модуль с базисом $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ ($\mathbb{Q}$ – поле рациональных чисел), и пусть $M = (X^3, X^2Z)e_1 \oplus (X^2 + Y^2)e_2$ – S -подмодуль модуля F .

Минимальная градуированная свободная S -резольвента модуля M имеет вид

$$0 \longrightarrow S(-4) \xrightarrow{f_1} S(-2) \oplus S(-3)^2 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0.$$

Рассмотрим минимальные градуированные свободные S -резольвенты модулей $M_{\langle j \rangle}$ для $j \geq 2$: для

$$M_{\langle 2 \rangle} = (X^2 + Y^2)e_2$$

имеем

$$0 \longrightarrow S(-2) \longrightarrow M_{\langle 2 \rangle} \longrightarrow 0;$$

для

$$M_{\langle 3 \rangle} = (X^3, X^2Z)e_1 \oplus (X^3 + XY^2, X^2Y + Y^3, X^2Z + Y^2Z)e_2$$

имеем

$$0 \longrightarrow S(-5) \longrightarrow S(-4)^4 \longrightarrow S(-3)^5 \longrightarrow M_{\langle 3 \rangle} \longrightarrow 0;$$

для

$$\begin{aligned} M_{\langle 4 \rangle} = & (X^4, X^3Z, X^3Y, X^2YZ, X^2Z^2)e_1 \\ & \oplus (X^4 + X^2Y^2, X^3Y + XY^3, X^3Z + XY^2Z, \\ & X^2Y^2 + Y^4, X^2YZ + Y^3Z, X^2Z^2 + Y^2Z^2)e_2 \end{aligned}$$

имеем

$$0 \longrightarrow S(-6)^5 \longrightarrow S(-5)^{14} \longrightarrow S(-4)^{11} \longrightarrow M_{\langle 4 \rangle} \longrightarrow 0,$$

и т.д. Значит, M является покомпонентно линейным S -модулем.

В частности, из минимальной градуированной свободной резольвенты модуля M получаем

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ -z \end{pmatrix}.$$

Минимальная градуированная свободная S -резольвента модуля

$$\text{Gin}(M) = (X^3, X^2Y)e_1 \oplus (X^2)e_2$$

имеет вид

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow S(-4) \xrightarrow{f'_1} S(-2) \oplus S(-3)^2 \xrightarrow{f'_0} \text{Gin}(M) \longrightarrow 0, \\ f'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ -y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Из определения матриц, ассоциированных с отображениями f_1 и f'_1 , немедленно вытекает, что модули $Z_1(M)$ и $Z_1(\text{Gin}(M))$ изоморфны.

Заметим, что $\text{reg}(M) = \text{reg}(\text{Gin}(M)) = 3$ и 3 является максимальной степенью мономиального образующего неподвижного по Борелю S -модуля $\text{Gin}(M)$ (см. теорему 1.12).

СЛЕДСТВИЕ 3.14. В предположениях теоремы 3.12 выполнено равенство

$$\text{Gin}(Z_i(M)) = \text{Gin}(Z_i(\text{Gin}(M))).$$

СЛЕДСТВИЕ 3.15. В предположениях теоремы 3.12 следующие условия равносильны:

- (i) модуль M покомпонентно линеен;
- (ii) $\beta_{0,j}(M) = \beta_{0,j}(\text{Gin}(M))$ для всех j , и $Z_0(M) = Z_0(\text{Gin}(M))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\Rightarrow$ (ii): следует из теоремы 3.12.

(ii) $\Rightarrow$ (i): по предположению имеем

$$M \simeq \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{0,j}} / Z_0(M) \simeq \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{0,j}} / Z_0(\text{Gin}(M)) \simeq \text{Gin}(M).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. Eisenbud, *Commutative Algebra. With a view towards algebraic geometry*, Grad. Texts in Math., **150**, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [2] M. Crupi, G. Restuccia, “Monomial modules and graphs”, *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl.*, **77** (2006), 203–216.
- [3] J. Herzog, T. Hibi, “Componentwise linear ideals”, *Nagoya Math. J.*, **153** (1999), 141–153.
- [4] K. Pardue, “Deformation classes of graded modules and maximal Betti numbers”, *Illinois J. Math.*, **40**:4 (1996), 564–585.
- [5] J. Herzog, G. Restuccia, “Regularity functions for homogeneous algebras”, *Arch. Math. (Basel)*, **76**:2 (2001), 100–108.
- [6] M. L. Green, “Generic initial ideals”, *Six Lectures on Commutative Algebra* (Bellaterra, 1996), Progr. Math., **166**, Birkhäuser, Basel, 1998, 119–186.
- [7] K. Pardue, “Deformation of graded modules and connected loci on the Hilbert scheme”, *The Curves Seminar at Queen’s*, Vol. XI (Kingston, ON, 1997), Queen’s Papers in Pure and Appl. Math., **105**, Queen’s Univ., Kingston, ON, 1997, 131–149.
- [8] Sh. Eliahou, M. Kervaire, “Minimal resolutions of some monomial ideals”, *J. Algebra*, **129**:1 (1990), 1–25.
- [9] A. Aramova, J. Herzog, T. Hibi, “Ideals with stable Betti numbers”, *Adv. Math.*, **152**:1 (2000), 72–77.
- [10] M. Crupi, R. Utano, “Extremal Betti numbers of lexsegment ideals”, *Geometric and Combinatorial Aspects of Commutative Algebra* (Messina, 1999), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **217**, Marcel Dekker, New York, 2001, 159–164.
- [11] D. Bayer, M. Stillman, “A criterion for detecting m -regularity”, *Invent. Math.*, **87**:1 (1987), 1–11.
- [12] T. Römer, *On minimal graded free resolutions*, Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades, Univ. Duisburg-Essen, 2001.

М. Крупи

Университет Мессины, Италия

Поступило

18.01.2008

Г. Рестуччия

Университет Мессины