Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Конягин, О расстояниях между точками на плоскости,
Матем. заметки, 2001, том 69, выпуск 4, 630–633

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm691>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 16:27:46

О РАССТОЯНИЯХ МЕЖДУ ТОЧКАМИ НА ПЛОСКОСТИ

С. В. Конягин

1. Введение. Через $\{x\}$ мы будем обозначать дробную часть действительного числа x , а через $\|x\|$ – расстояние от x до ближайшего целого числа. Расстояние между точками P и Q на плоскости обозначается $d(P, Q)$. Для $X > 0$ и $\delta \in (0, 1/2)$ через $N(X, \delta)$ обозначим максимальное количество точек $P_1, \dots, P_n$, которые можно выбрать в круге радиуса X так, чтобы выполнялось условие

$$\|d(P_i, P_j)\| \geq \delta \quad (1 \leq i < j \leq n). \quad (1)$$

Легко показать, что равномерно по $X \geq 1$ и δ справедлива оценка $N(X, \delta) = O(X/\delta^2)$. П. Эрдеш предложил усилить это неравенство для любого δ , т.е. показать, что $N(X, \delta) = o(X)$ при $X \rightarrow \infty$. Эта гипотеза была доказана А. Шаркози [1], установившим, что $N(X, \delta) = O(X/\log \log X)$ для фиксированного δ и $X \geq 3$. Другая гипотеза Эрдеша, состоявшая в том, что $N(X, \delta) \rightarrow \infty$ при $X \rightarrow \infty$, доказана Р. Л. Грэмом. Наилучшие известные оценки снизу принадлежат Шаркози [2], доказавшему, что $N(X, \delta) > X^{c(\delta)}$ ($c(\delta) > 0$); более того, $N(X, \delta) > X^{1/2-\delta^{1/7}}$ при $0 < \delta \leq 1/(6 \cdot 8^4)$ и $X \geq X(\delta)$. Последний результат инициировал следующий вопрос Эрдеша и Грэма [3]: верно ли, что $N(X, \delta) < X^{1/2+\varepsilon}$ для любых $\varepsilon > 0$ и $X \geq X(\delta, \varepsilon)$? Целью данной работы является положительный ответ на этот вопрос.

ТЕОРЕМА. Для любого $\delta > 0$ существует число $C(\delta)$ такое, что $N(X, \delta) < C(\delta)X^{1/2}$ при $X \geq 1$.

2. Начало доказательства теоремы. Пусть точки P_j с координатами (x_j, y_j) ($j = 1, \dots, n$) расположены в круге радиуса X и удовлетворяют условию (1). Для натурального числа k и $\varphi \in [0, 2\pi)$ положим

$$A_k(\varphi) = \sum_{j=1}^n e(kz_j(\varphi)),$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 99-01-00357 и № 00-15-96109.

где $e(u) = \exp(2\pi i u)$, $z_j(\varphi) = x_j \cos \varphi + y_j \sin \varphi$. Пусть $d_1, \dots, d_m$ — произвольные неотрицательные числа. Доказательство основано на неравенстве

$$\sum_{k=1}^m d_k \int_0^{2\pi} |A_k(\varphi)|^2 d\varphi \geq 0. \quad (2)$$

Мы имеем

$$\int_0^{2\pi} |A_k(\varphi)|^2 d\varphi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^{2\pi} e(k(z_i(\varphi) - z_j(\varphi))) d\varphi. \quad (3)$$

Пусть $x_i - x_j = d(P_i, P_j) \cos \varphi_0$, $y_i - y_j = d(P_i, P_j) \sin \varphi_0$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e(k(z_i(\varphi) - z_j(\varphi))) d\varphi &= \int_0^{2\pi} e(k(d(P_i, P_j) \cos(\varphi - \varphi_0))) d\varphi \\ &= 2 \int_0^{\pi} \cos(2\pi k d(P_i, P_j) \cos \varphi) d\varphi = 2\pi J_0(2\pi k d(P_i, P_j)) \end{aligned} \quad (4)$$

(см. [4, с. 36]). Объединение (2), (3) и (4) дает

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m d_k 2\pi J_0(2\pi k d(P_i, P_j)) \geq 0. \quad (5)$$

Заметим, что

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m d_k 2\pi J_0(2\pi k d(P_i, P_i)) = 2\pi n \sum_{k=1}^m d_k. \quad (6)$$

Нам нужно оценить вклад в (5) слагаемых с $i \neq j$. Из асимптотической формулы для J_0 :

$$J_0(u) = \left(\frac{2}{\pi u}\right)^{1/2} \cos\left(u - \frac{\pi}{4}\right) + O(u^{-3/2})$$

(см. [4, с. 175]) вытекает, что

$$2\pi J_0(2\pi v) = \left(\frac{2}{v}\right)^{1/2} (\cos(2\pi v) + \sin(2\pi v)) + O(v^{-3/2}).$$

Подставляя последнюю оценку и (6) в (5), получаем

$$\begin{aligned} 0 \leq & 2\pi n \sum_{k=1}^m d_k + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n d(P_i, P_j)^{-1/2} \sum_{k=1}^m \left(\frac{2}{k}\right)^{1/2} d_k (\cos(2\pi k d(P_i, P_j)) + \sin(2\pi k d(P_i, P_j))) \\ & + O\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n d(P_i, P_j)^{-3/2}\right), \end{aligned} \quad (7)$$

где постоянная в O зависит от коэффициентов $d_1, \dots, d_m$. Коэффициенты d_k , при которых второе слагаемое в правой части (7) мало, мы будем подбирать с помощью нижеследующей леммы.

3. Тригонометрические полиномы со специальными свойствами.

ЛЕММА 1. Для любого $\delta \in (0, 1/2)$ существует тригонометрический полином

$$T(x) = \sum_{k=1}^m c_k \cos(kx)$$

с неотрицательными коэффициентами c_k такой, что сопряженный полином

$$\tilde{T}(x) = \sum_{k=1}^m c_k \sin(kx)$$

удовлетворяет неравенству

$$-A = \max_{x \in [2\pi\delta, 2\pi(1-\delta)]} (T(x) + |\tilde{T}(x)|) < 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим функцию комплексного переменного z :

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Для любого $z \neq 1$, $|z| = 1$, имеем

$$f(z) = \frac{1}{z + 1/z - 2} = \frac{1}{z + \bar{z} - 2} = \frac{1}{2 \operatorname{Re} z - 2} < 0.$$

Кроме того, функции $f(ue^{ix})$ равномерно сходятся к $f(e^{ix})$ на $[2\pi\delta, 2\pi(1-\delta)]$ при $u \rightarrow 1$. Следовательно, для действительного $u < 1$, достаточно близкого к 1, имеет место неравенство

$$\max_{x \in [2\pi\delta, 2\pi(1-\delta)]} (\operatorname{Re} f(ue^{ix}) + |\operatorname{Im} f(ue^{ix})|) < 0. \quad (8)$$

Рассмотрим разложение Тейлора

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$$

функции $f(uz)$, и пусть

$$S_m(z) = \sum_{k=1}^m c_k z^k.$$

Из (8) и равномерной сходимости частных сумм $S_m(z)$ к $f(uz)$ в единичном круге мы имеем

$$\max_{x \in [2\pi\delta, 2\pi(1-\delta)]} (\operatorname{Re} S_m(ue^{ix}) + |\operatorname{Im} S_m(ue^{ix})|) < 0.$$

Таким образом, тригонометрический полином $T(x) = \operatorname{Re} S_m(ue^{ix})$ удовлетворяет требуемому неравенству. Остается заметить, что все коэффициенты c_k положительны, и лемма доказана.

4. Завершение доказательства теоремы. Возьмем $d_k = (k/2)^{1/2} c_k$ ($k = 1, \dots, m$), где m и c_k определены в лемме 1. С учетом (1) мы имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} d(P_i, P_j)^{-1/2} \sum_{k=1}^m \left(\frac{2}{k}\right)^{1/2} d_k (\cos(2\pi k d(P_i, P_j)) + \sin(2\pi k d(P_i, P_j))) \\ & \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (2X)^{-1/2} (-A) = -A(2X)^{-1/2} n^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Для любого $i = 1, \dots, n$ и $u > 0$ обозначим $N_i(u) = |\{j \neq i : d(P_i, P_j) \leq u\}|$. Заметим, что $N_i(u) \leq N(u, \delta)$. Мы используем оценку $N(u, \delta) = O(1 + u)$, более слабую, чем в [1]; здесь и ниже постоянные в O зависят от δ . Мы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq i} d(P_i, P_j)^{-3/2} &= \int_{\delta}^{\infty} u^{-3/2} dN_i(u) = - \int_{\delta}^{\infty} N_i(u) d(u^{-3/2}) \\ &= \int_{\delta}^{\infty} O(u) \frac{3}{2} u^{-5/2} du = O(1). \end{aligned}$$

Из (7), (9) и последней оценки следует, что

$$O(n) - A(2X)^{-1/2} n^2 \geq 0,$$

т.е. $n = O(X^{1/2})$, что и требовалось доказать.

Автор благодарен профессорам А. Шаркози и В. Тотуку за интерес к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sárközy A. // Studia Sci. Math. Hungar. 1976. V. 11. P. 37–50. 2. Sárközy A. // Studia Sci. Math. Hungar. 1976. V. 11. P. 105–111. 3. Erdős P., Graham R. L. Old and New Problems and Results in Combinatorial Number Theory. Geneva, 1980. 4. Коренев В. Г. Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука, 1971.