Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, О многообразии Фано одного класса вещественных четырехмерных кубик, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 5, 711–720

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6910>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 16:49:10

О многообразии Фано одного класса вещественных четырехмерных кубик

В. А. Краснов

Вычисляется топологический тип вещественной части многообразия Фано, параметризующего множество прямых на неособой вещественной гиперповерхности третьей степени в пятимерном проективном пространстве из одного специального грубого проективного класса. В работе С. Финашина и В. Харламова о грубой проективной классификации вещественных четырехмерных кубик этот класс называется иррегулярным. Также применяются результаты В. А. Краснова из работы, посвященной эквивариантной топологической классификации многообразий Фано вещественных четырехмерных кубик.

Библиография: 10 названий.

Формулировка основного результата. Далее $\mathbb{P}^5$ – пятимерное комплексное проективное пространство, т.е. $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^6)$ – проективизация $\mathbb{C}^6$. Алгебраические гиперповерхности третьей степени в $\mathbb{P}^5$ называются *четырёхмерными кубиками*; далее мы называем их просто *кубиками*. Множество кубик образует 55-мерное комплексное проективное пространство, которое мы обозначаем через $\mathcal{B}$. Если $b \in \mathcal{B}$, то через C_b обозначается соответствующая кубика. Через $\mathcal{B}^*$ обозначается множество неособых кубик. Пусть $C \subset \mathbb{P}^5$ – неособая кубика; тогда через $F = F(C)$ обозначается многообразие Фано кубики C . Его точками являются прямые в $\mathbb{P}^5$, лежащие на кубике C . Многообразие Фано F является неособым четырехмерным подмногообразием многообразия Грассмана $\mathcal{G} = G(6, 2)$ (см. [1]).

На многообразиях $\mathbb{P}^5$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{G}$ определена инволюция комплексного сопряжения, которую мы обозначаем через τ . Инвариантные относительно этой инволюции кубики называются *вещественными кубиками*. Множество вещественных кубик обозначается через $\mathbb{R}\mathcal{B}$, оно равно множеству неподвижных точек инволюции $\tau: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$. Если C – вещественная кубика, то на ней индуцируется инволюция комплексного сопряжения $\tau: C \rightarrow C$. Поэтому вещественную кубика C будем также обозначать через (C, τ) . На многообразии Фано F вещественной кубики C также индуцируется инволюция комплексного сопряжения $\tau: F \rightarrow F$, поэтому его обозначаем (F, τ) .

Множество $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$ является несвязным в евклидовой топологии. Компоненты связности топологического пространства $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$ называются *жесткими изотопическими классами* неособых вещественных кубик в $\mathbb{P}^5$ (см. [2]).

Пусть $b \in \mathcal{B}^*$; тогда через F_b будем обозначать многообразие Фано кубики C_b . Заметим, что если точки b' , b'' принадлежат одной компоненте связности пространства $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$, т.е. кубики $C_{b'}$, $C_{b''}$ принадлежат одному классу жесткой изотопической

эквивалентности, то вещественные многообразия Фано $(F_{b'}, \tau)$, $(F_{b''}, \tau)$ эквивариантно диффеоморфны. Действительно, тотальное пространство многообразий Фано неособых кубик

$$\mathfrak{F}^* = \bigcup_{b \in \mathcal{B}^*} F_b$$

является неособым многообразием, а проекция $\mathfrak{F}^* \rightarrow \mathcal{B}^*$ является локально тривиальным дифференцируемым расслоением (см. [3]). Положим

$$\mathfrak{F}_{\mathbb{R}}^* = \bigcup_{b \in \mathbb{R}\mathcal{B}^*} F_b.$$

Тогда получим, что проекция $\mathfrak{F}_{\mathbb{R}}^* \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{B}^*$ является локально тривиальным эквивариантным расслоением. Поэтому вещественные многообразия Фано $(F_{b'}, \tau)$, $(F_{b''}, \tau)$ эквивариантно диффеоморфны, если точки b' , b'' принадлежат одной компоненте связности пространства $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$.

Группа $\mathrm{PGL}(6, \mathbb{R})$ вещественных автоморфизмов пространства $\mathbb{P}^5$ действует на $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$. Эта группа несвязная, она состоит из двух компонент связности, поэтому она может переставлять компоненты связности многообразия $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$. Проективная классификация вещественных четырехмерных кубик состоит в описании факторпространства $\mathbb{R}\mathcal{B}^* / \mathrm{PGL}(6, \mathbb{R})$. Его компоненты связности будем называть *грубыми проективными классами* вещественных кубик (см. [4]). Множество таких классов обозначим через $\mathcal{V}$. Заметим, что выполняется равенство

$$\mathcal{V} = \pi(\mathbb{R}\mathcal{B}^*) / \mathrm{PGL}(6, \mathbb{R}),$$

где $\pi(\mathbb{R}\mathcal{B}^*)$ – множество компонент связности многообразия $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$, т.е. множество классов жесткой изотопической эквивалентности вещественных кубик.

Таким образом, две вещественные кубики $C_{b'}$, $C_{b''}$ грубо проективно эквивалентны, если существует проективное преобразование $g \in \mathrm{PGL}(6, \mathbb{R})$ такое, что точки $g(b')$, b'' принадлежат одной компоненте связности многообразия $\mathbb{R}\mathcal{B}^*$.

В работе [5] показано, что число элементов во множестве $\mathcal{V}$ грубых проективных классов вещественных четырехмерных кубик равно 75, а также изучен граф примыканий вещественных четырехмерных кубик. Этот граф изображен на рис. 1.

Вершины обозначают классы грубой проективной эквивалентности вещественных кубик, т.е. множество вершин равно $\mathcal{V}$. На рис. 1 не изображена ориентация ребер, но граф ориентирован таким образом, что параметр r на каждом ребре возрастает, если двигаться от начала ребра к концу. Подробно этот граф описан в первом разделе.

В работе [6] изучен топологический тип вещественной части многообразия Фано для 73 классов грубой проективной эквивалентности вещественных четырехмерных кубик (см. подробности в разделе 1). Осталось два класса, для которых в статье [6] нет описания топологического типа вещественной части многообразия Фано. Один из этих классов в работе [5] назван *иррегулярным* (см. его определение в разделе 1).

В данной статье мы вычисляем топологический тип вещественной части многообразия Фано вещественной четырехмерной кубики, принадлежащей иррегулярному грубому проективному классу. Прежде чем сформулировать полученный результат, нужно изложить конструкцию, которая сопоставляет компактной комплексной поверхности S с вещественной структурой $\tau: S \rightarrow S$ некоторое четырехмерное гладкое

многообразие $M = M(S)$, если множество вещественных точек $\mathbb{R}S = S^\tau$ состоит из сфер $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$.

Так как индексы самопересечения (Σ_i, Σ_i) , $i = 1, \dots, k$, равны -2 , можно изменить в окрестности каждой сферы Σ_i инволюцию $\tau: S \rightarrow S$, чтобы получилась гладкая инволюция $\hat{\tau}: S \rightarrow S$, для которой множество неподвижных точек $S^{\hat{\tau}}$ стало пустым. Тогда многообразие $M(S)$ равно фактормногообразию $S/\hat{\tau}$. Если поверхность S является КЗ-поверхностью, то вполне возможно, что многообразие $M(S)$ диффеоморфно фактормногообразию S_1/τ , где (S_1, τ) – вещественная КЗ-поверхность без вещественных точек.

Полученный в настоящей статье результат содержит следующая

ТЕОРЕМА 0.1. *Если вещественная четырехмерная кубика принадлежит иррегулярному классу грубой проективной эквивалентности, то вещественная часть ее многообразия Фано имеет топологический тип $6\Sigma^2 \sqcup M$, где Σ – двумерная сфера, $\Sigma^2 = \Sigma \times \Sigma$, $6\Sigma^2$ – несвязное объединение шести Σ^2 , а многообразие M получается конструкцией, описанной выше, из вещественной КЗ-поверхности S , вещественная часть которой состоит из трех сфер.*

Скажем несколько слов о структуре статьи. Кроме введения, она содержит три раздела, первый из которых посвящен описанию графа примыканий и формулировке результатов статьи [6]. Во втором разделе рассматривается многообразие Фано кубики, которая имеет единственную особую точку, причем эта особая точка является простой двойной точкой. Идея построения многообразия Фано такой кубики изложена в [1], но там она применяется только к трехмерной кубике, а в работе [7] эта идея применена к четырехмерной кубике. Третий пункт статьи посвящен доказательству теоремы 0.1. Это доказательство использует метод малого возмущения.

1. Граф примыканий вещественных четырехмерных кубик. Описание грубого проективного класса фиксированной вещественной четырехмерной кубики C дается с помощью решетки $(H_4(C, \mathbb{Z}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – билинейная форма, определенная индексом пересечения циклов. Эту решетку будем обозначать через $\Lambda(C)$. Рассмотрим подрешетки $\Lambda_\pm(C)$; они получаются из решетки $\Lambda(C)$ заменой группы $H_4(C, \mathbb{Z})$ на подгруппы $H_4(C, \mathbb{Z})_\pm$, состоящие из элементов $a \in H_4(C, \mathbb{Z})$ таких, что $\tau_*(a) = \pm a$.

Параметр r на рис. 1 равен рангу решетки $\Lambda_-(C)$, где C – кубика, представляющая данный класс эквивалентности. Параметр d равен размерности $\mathbb{F}_2$ -пространства

$$\Lambda_-(C)^*/\Lambda_-(C),$$

где $\Lambda_-(C)^* = \text{Hom}(\Lambda_-(C), \mathbb{Z})$.

Вершины, которые изображены рядом, имеют одинаковые значения параметров r, d . Они различаются типом решетки $\Lambda_-(C)$. Решетка $\Lambda_-(C)$ имеет тип I , если квадратичная форма на группе $\Lambda_-(C)^*$, полученная продолжением квадратичной формы решетки $\Lambda_-(C)$, принимает только целые значения. В противном случае решетка $\Lambda_-(C)$ имеет тип II .

Среди каждой пары вершин на рис. 1, которые имеют одинаковые значения параметров r, d , вершина, не являющаяся вершиной квадрата, имеет тип I , а другая вершина, т.е. та, которая является вершиной квадрата, имеет тип II . Если две

Рис. 1. Граф примыканий

вершины имеют одинаковые значения параметров r, d , то они обозначаются через $(r, d)_I, (r, d)_{II}$ в зависимости от типа. Остальные вершины обозначаются через (r, d) . Заметим, что вершины $(2, 0), (6, 2), (10, 0), (14, 2), (18, 0)$ имеют тип I , все остальные не упомянутые вершины имеют тип II .

Пусть S – вещественная КЗ-поверхность. Тогда можно рассмотреть аналогичную решетку $(H_2(S, \mathbb{Z}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ и подрешетки $(H_2(S, \mathbb{Z})_{\pm}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Будем их обозначать через $L(S), L_{\pm}(S)$, соответственно.

Обозначим через $-L_+(S)$ решетку, которая получается из решетки $L_+(S)$, заменой формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на форму $-\langle \cdot, \cdot \rangle$. Грубый проективный класс $[C]$ вещественной кубики C называется *регулярным*, если существует КЗ-поверхность S такая, что решетки $\Lambda_-(C), -L_+(S)$ изоморфны. Оказывается, что существует только один иррегулярный элемент множества $\mathcal{V}$, это класс грубой проективной эквивалентности $(14, 8)_I$ (см. [5]).

Перейдем к определению ребер графа примыканий. На самом деле, ребра в графе примыканий трех типов, но нам не потребуется это разделение ребер (см. подробности в [5]).

Через Δ^* обозначим множество неособых точек на дискриминантной гиперповерхности $\Delta \subset \mathcal{B}$. Если $b \in \Delta^*$, то кубика C_b имеет единственную особую точку, которая является простой двойной точкой. Особая точка a кубики C_b называется *каспом*, если в окрестности точки a на $\mathbb{P}^5$ существуют комплексно аналитические координаты $z_1, \dots, z_5$ такие, что кубика C_b в этой окрестности задается уравнением $z_1^3 + z_2^2 + \dots + z_5^2 = 0$. Ко множеству $\Delta^* \subset \mathcal{B}$ добавим точки $b \in \Delta$ такие, что кубика C_b имеет единственную особую точку, причем она является каспом. Полученное множество точек обозначим через Δ_0 . Если $b \in \Delta_0$ и кубика C_b имеет касп в качестве единственной особой точки, то в окрестности точки b на $\mathcal{B}$ существуют комплексно аналитические координаты $w_1, \dots, w_{55}$ такие, что множество Δ_0 задается уравнением $w_1^3 + w_2^2 = 0$ (см., например, [8]). Если точка $b \in \Delta_0$ вещественная, то кроме этого, координаты $w_1, \dots, w_{55}$ удовлетворяют условию $w_k \circ \tau = \overline{w_k}, k = 1, \dots, 55$, где черта

означает комплексное сопряжение. Из этих утверждений вытекает, что множество вещественных точек $\mathbb{R}\Delta_0$ является топологическим многообразием.

Компоненты связности факторпространства $\mathbb{R}\Delta_0/\mathrm{PGL}(6, \mathbb{R})$ являются ребрами графа примыканий. Множество таких ребер равно множеству классов грубой проективной эквивалентности 6-поляризованных вещественных КЗ-поверхностей (см. [5]).

Основной результат статьи [6] – это следующая

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть вещественная четырехмерная кубика C и вещественная КЗ-поверхность S такие, что существует изоморфизм решеток $\Lambda_-(C)$, $-\Lambda_+(S)$, причем множество вещественных точек $\mathbb{R}S$ КЗ-поверхности S не гомеоморфно несвязному объединению десяти сфер. Тогда многообразие Фано F кубики C эквивариантно диффеоморфно многообразию $S^{[2]}$, которое получается из симметрического квадрата $S^{(2)}$ разрешением особенностей, т.е. раздутием диагонали.*

Далее мы хотим привести следствие теоремы 1.1 об устройстве вещественной части $\mathbb{R}F$ многообразия Фано F , которое сформулировано в работе [6]. Но сначала мы изложим одну конструкцию, которая сопоставляет компактной комплексной поверхности S с вещественной структурой $\tau: S \rightarrow S$ специальное четырехмерное гладкое многообразие $M = M(S)$. (Если множество вещественных точек $\mathbb{R}S = S^\tau$ поверхности S состоит из сфер, то эта конструкция совпадает с конструкцией, изложенной во введении).

Если T – касательное расслоение на вещественной части $\mathbb{R}S$ поверхности S , то умножив его на мнимую единицу i , получим нормальное расслоение N_1 к гладкой поверхности $\mathbb{R}S$ на четырехмерном гладком многообразии S . Построим теперь канонический изоморфизм касательного расслоения T на нормальное расслоение N_2 к диагонали в произведении $\mathbb{R}S \times \mathbb{R}S$. Возьмем произвольную точку (p, p) из диагонали произведения $\mathbb{R}S \times \mathbb{R}S$. Касательное пространство в этой точке ко всему произведению равно прямой сумме $T_p \oplus T_p$. Произвольный касательный вектор к диагонали в точке (p, p) имеет вид (v, v) , где $v \in T_p$. Тогда этому вектору сопоставляется нормальный вектор $(v, -v)$. Таким образом, нормальные расслоения N_1 , N_2 канонически изоморфны. Выберем эрмитову метрику на поверхности S , инвариантную относительно инволюции $\tau: S \rightarrow S$. Из этой эрмитовой метрики получается риманова метрика на вещественной части $\mathbb{R}S$, с помощью которой строится риманова метрика на несвязном объединении произведений $P_1 \times P_1 \sqcup \dots \sqcup P_k \times P_k$, где $P_1, \dots, P_k$ – связные компоненты множества $\mathbb{R}S$. Заметим, что такая риманова метрика инвариантна относительно инволюции, переставляющей сомножители. Изоморфизмы $T \cong N_1$, $T \cong N_2$ определяют изоморфизм $N_1 \cong N_2$. Построенный изоморфизм нормальных расслоений N_1 , N_2 будет сохранять римановы метрики на этих расслоениях. Поэтому трубчатая окрестность вещественной части $\mathbb{R}S$ на поверхности S канонически диффеоморфна трубчатой окрестности диагонали в несвязном объединении произведений $P_1 \times P_1 \sqcup \dots \sqcup P_k \times P_k$, причем диффеоморфизм согласован с инволюциями. Вырежем эти окрестности и склеим полученные четырехмерные многообразия по краям. Тогда получится многообразие $\widehat{M}$, на котором определена инволюция $\widehat{\tau}: \widehat{M} \rightarrow \widehat{M}$, действующая без неподвижных точек. Эта инволюция устроена следующим образом. На части поверхности S она совпадает с инволюцией $\tau: S \rightarrow S$, а на части несвязного объединения произведений эта инволюция совпадает с инволюцией перестановки сомножителей. Тогда многообразие M

равно фактормногообразию $\widehat{M}/\widehat{\tau}$. Заметим, что в случае пустого множества $\mathbb{R}S$ многообразие $\widehat{M}$ равно S , а многообразие M равно S/τ .

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Пусть кубика C и КЗ-поверхность S удовлетворяют условиям теоремы 1.1, а кроме этого, вещественная часть $\mathbb{R}S$ поверхности S диффеоморфна несвязному объединению гладких поверхностей $P_1 \sqcup \dots \sqcup P_k$. Тогда вещественная часть $\mathbb{R}F$ многообразия Фано F кубики C диффеоморфна несвязному объединению

$$\left(\prod_{1 \leq i < j \leq k} P_i \times P_j \right) \prod M(S).$$

Таким образом, в статье [6] только для двух классов грубой проективной эквивалентности вещественных четырехмерных кубик не была исследована топология вещественных частей их многообразий Фано. Во-первых, это единственный иррегулярный класс эквивалентности кубик, а во-вторых, класс кубики C , для которой существует КЗ-поверхность S такая, что вещественная часть $\mathbb{R}S$ состоит из десяти сфер, а решетки $\Lambda_-(C)$, $-L_+(S)$ изоморфны. Заметим, что эти классы равны $(14, 8)_I$, $(20, 2)$, соответственно.

2. Многообразие Фано особой кубики. Если $b \in \Delta^*$, то соответствующая кубика C_b имеет единственную особую точку $a \in C_b$, которая является простой двойной точкой. Заметим, что точка $a \in C_b$ однозначно определяется точкой $b \in \Delta^*$. Пусть $\mathbb{P}(a)$ – четырехмерное проективное пространство, точками которого являются прямые в $\mathbb{P}^5$, проходящие через точку a . Обозначим через Q_b неособую quadriку в $\mathbb{P}(a)$, точками которой являются прямые, проходящие через точку $a \in C_b$ и касающиеся кубики C_b в этой точке. На quadriке $Q_b \subset \mathbb{P}(a)$ лежит неособая КЗ-поверхность, точками которой являются прямые в $\mathbb{P}^5$, проходящие через точку $a \in C_b$ и лежащие на кубике C_b . Эту КЗ-поверхность будем обозначать через S_b ; она является кубическим сечением quadriки $Q_b \subset \mathbb{P}(a)$, т.е. S – 6-поляризованная КЗ-поверхность. Далее кубику C_b , quadriку Q_b , КЗ-поверхность S_b будем обозначать также через C , Q , S , соответственно. Через F обозначается многообразие Фано кубики C , его точками являются прямые на C . Из определения поверхности S следует, что она лежит на многообразии F . Справедлива следующая (см. [1], [3], [7])

ЛЕММА 2.1. Многообразие Фано F особой кубики C имеет особенности вдоль КЗ-поверхности $S \subset F$, других особенностей нет. Эти особенности являются обыкновенными коразмерности 2 двойными точками. Раздутие $\text{Bl}_S F \rightarrow F$ разрешает особенности многообразия F . Если КЗ-поверхность $S \subset \mathbb{P}(a)$ не содержит прямых, то многообразие $\text{Bl}_S F$ изоморфно многообразию $S^{[2]}$, которое получается из симметрического квадрата $S^{(2)}$ раздутием диагонали.

Заметим, что если точка $b \in \Delta^*$ вещественная, то кубика C , quadriка Q , КЗ-поверхность S , многообразия $\text{Bl}_S F$, $S^{[2]}$ все будут вещественными многообразиями. Также будет вещественным изоморфизм $\text{Bl}_S F \cong S^{[2]}$. Еще заметим, что если КЗ-поверхность S содержит прямые, то можно немного сдвинуть точку b , чтобы новая КЗ-поверхность S_b не содержала прямых. (Заметим, что на общей 6-поляризованной КЗ-поверхности $S \subset \mathbb{P}^4$ группа Пикара порождается классом гиперплоскости, поэтому общая 6-поляризованная КЗ-поверхность не содержит прямых.) Далее мы предполагаем, что поверхность S не содержит прямых.

Из леммы 2.1 следует, что существует бирациональный морфизм $\pi: S^{[2]} \rightarrow F$; нам потребуется конкретное описание этого морфизма. Прежде всего заметим, что многообразие $S^{[2]}$ совпадает со множеством геометрических $\mathbb{C}$ -точек схемы Гильберта $\text{Hilb}^2(S)$. Каждая $\mathbb{C}$ -точка $p \in \text{Hilb}^2(S)$ является нульмерным комплексно аналитическим подмногообразием поверхности S , структурный пучок которого как векторное пространство изоморфен $\mathbb{C}^2$. Имеются два типа таких точек $p \in \text{Hilb}^2(S)$: или p_{red} состоит из двух различных точек $p_1, p_2 \in S$, или p_{red} состоит из одной точки $p \in S$. В первом случае точка $p \in \text{Hilb}^2(S)$ определяет секущую $\overline{p_1 p_2}$ поверхности S , а во втором случае эта точка определяет касательную к поверхности S , которую мы обозначим через $\overline{pp}$ (эта прямая не определяется однозначно точкой $p \in S$).

Таким образом, точками многообразия $S^{[2]}$ являются прямые $\overline{p_1 p_2}$ (где точки $p_1, p_2 \in S$ могут совпадать) в проективном пространстве $\mathbb{P}(a)$. Каждая такая прямая определяет плоскость $\widehat{p_1 p_2}$ в касательном пространстве $\mathbb{T}_a C$. Плоскость $\widehat{p_1 p_2}$ пересекает кубик C по трем прямым (с учетом кратности), две из которых отвечают точкам $p_1, p_2 \in S$, а третью прямую обозначим через $\pi(p)$. Итак, получили отображение

$$\pi: S^{[2]} \rightarrow F, \quad S^{[2]} \ni p \mapsto \pi(p) \in F;$$

оно является бирациональным морфизмом, разрешающим особенности многообразия Фано F . Особые точки многообразия Фано F составляют поверхность $S \subset F$; опишем ее прообраз $\pi^{-1}(S)$.

Возьмем точку $s \in Q$ и рассмотрим касательное пространство $\mathbb{T}_s Q$ к квадрике Q в точке s . Это касательное пространство пересекает квадрiku Q по двумерному конусу K_s . Если $s \in S$, то проективизация $\mathbb{P}(K_s)$ конуса K_s определяет конику q_s , которая совпадает с прообразом $\pi^{-1}(s)$. Действительно, каждая прямая l на конусе K_s , проходящая через точку s , пересекает поверхность $S \subset Q$ по трем точкам (могут быть кратные точки, если прямая l касается поверхности S), одна из которых равна s . Две другие точки p_1, p_2 (может быть одна, но кратная) задают прямую $\overline{p_1 p_2} \in S^{[2]}$, причем выполняется равенство $\pi(\overline{p_1 p_2}) = s$. Рассмотрим тотальное пространство конусов K_s

$$K_S = \bigcup_{s \in S} K_s \times s \subset Q \times S,$$

его проективизация $\mathbb{P}(K_S)$ равна прообразу $\pi^{-1}(S)$.

Если особая кубика C вещественная, то на прообразе $\pi^{-1}(S) = \mathbb{P}(K_S)$ определена вещественная структура $\tau: \pi^{-1}(S) \rightarrow \pi^{-1}(S)$. Рассмотрим случай, когда вещественная часть $\mathbb{R}Q$ квадрики Q является эллипсоидом. В этом случае инволюция на конусе $\tau: K_s \rightarrow K_s$, $s \in \mathbb{R}S$, переставляет прямые, проходящие через вершину конуса. Следовательно, коника $q_s = \mathbb{P}(K_s)$ не имеет вещественных точек. Поэтому весь прообраз $\pi^{-1}(S) = \mathbb{P}(K_S)$ не имеет вещественных точек.

3. Доказательство основного результата. Пусть $b_0 \in \mathbb{R}\Delta^*$ – фиксированная точка. Тогда в $\mathcal{B}$ существует неособая комплексно аналитическая параметрическая кривая $b = \beta(t)$, $|t| < 1$, удовлетворяющая свойствам

- 1) $\beta(0) = b_0$, $\beta(t) \notin \Delta$ при $t \neq 0$;
- 2) кривая $b = \beta(t)$ проходит через точку b_0 трансверсально к Δ ;
- 3) кривая $b = \beta(t)$ эквивариантная, т.е. выполняется равенство $\beta(\bar{t}) = \tau(\beta(t))$, где черта означает комплексное сопряжение.

Через C_t будем обозначать семейство кубик $C_{\beta(t)}$. Кубика C_0 особая, имеющая единственную особую точку $a \in C_0$, которая является простой двойной точкой. Через Q будем обозначать квадрику $Q_{b_0} \subset \mathbb{P}(a)$, а через S обозначим КЗ-поверхность $S_{b_0} \subset Q$. При $t \neq 0$ кубики C_t неособые. Будем предполагать, что КЗ-поверхность $S \subset \mathbb{P}(a)$ не содержит прямых, в противном случае сдвинем точку $b_0 \in \mathbb{R}\Delta^*$ в $\mathbb{R}\Delta^*$.

Через F_t будем обозначать семейство многообразий Фано кубик C_t . Многообразие Фано F_0 особое, причем особые точки на нем образуют простую двойную КЗ-поверхность S , которая образована прямыми на кубике C_0 , проходящими через особую точку $a \in C_0$ (см. [1]). Поверхности Фано F_t неособые при $t \neq 0$ (см. [1]). Топальное пространство этого семейства многообразий Фано обозначим через Φ , т.е.

$$\Phi = \bigcup_{|t| < 1} F_t \times t \subset \mathcal{G} \times \{|t| < 1\}.$$

В работе [6] доказана

ЛЕММА 3.1. *Пространство Φ является неособым комплексно аналитическим пятимерным многообразием.*

Топальное пространство семейства кубик C_t

$$\mathfrak{C} = \bigcup_{|t| < 1} C_t \times t \subset \mathbb{P}^5 \times \{|t| < 1\}$$

является неособым комплексно аналитическим пятимерным многообразием с вещественной структурой $\tau: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}$, заданной инволюцией комплексного сопряжения.

Пусть точка $t \neq 0$ вещественная. Тогда существует непрерывное отображение

$$\varrho: C_t \rightarrow C_0,$$

удовлетворяющее свойствам (см., например, [9], [10])

- 1) прообраз особой точки a гомеоморфен четырехмерной сфере Σ_t ;
- 2) отображение $\varrho: C_t \setminus \Sigma_t \rightarrow C_0 \setminus \{a\}$ является гомеоморфизмом;
- 3) отображение $\varrho: C_t \rightarrow C_0$ τ -эквивариантное, т.е. коммутирует с комплексным сопряжением.

Сферу $\Sigma_t \subset C_t$ будем называть *исчезающей сферой*. Она инвариантна относительно инволюции τ . Далее мы будем рассматривать маленькое число $0 < \varepsilon < 1$, которое будем уменьшать, если потребуется. Заметим, что многообразия $(C_{\pm t}, \tau)$, $(C_{\pm \varepsilon}, \tau)$ эквивариантно диффеоморфны при $0 < t < 1$. Обозначим кубики $C_{\pm \varepsilon}$ кратко через $C_{\pm}$, а исчезающие сферы на них обозначим через $\Sigma_{\pm}$.

Классы гомологий $[\Sigma_{\pm}] \in H_4(C_{\pm}, \mathbb{Z})$ обладают следующим свойством: один из них инвариантен относительно инволюции τ_* , а на другой класс гомологий эта инволюция действует умножением на -1 . Мы можем считать, что выполняется равенство

$$\tau_*([\Sigma_{\pm}]) = \mp[\Sigma_{\pm}]; \quad (3.1)$$

заменяем в противном случае t на $-t$. Из этого предположения вытекает (см. [5]), что существует изоморфизм решеток

$$\Lambda_-(C_-) = -\Lambda_-(S), \quad (3.2)$$

где $S \subset Q \subset \mathbb{P}(a)$ – КЗ-поверхность, построенная выше. Из равенства (3.2) следует, что (см. теорему 1.1, следствие 1.2) существует диффеоморфизм

$$\mathbb{R}F_- = \left(\prod_{1 \leq i < j \leq k} P_i \times P_j \right) \prod M(S), \quad (3.3)$$

где $P_1, \dots, P_k$ – компоненты связности вещественной части $\mathbb{R}S$ поверхности S .

ЛЕММА 3.2. Пусть вещественная часть $\mathbb{R}Q$ квадрики Q является эллипсоидом и выполняются равенства (3.1). Тогда существует изоморфизм

$$\mathbb{R}F_+ = \left(\prod_{1 \leq i < j \leq k} P_i \times P_j \right) \prod \left(\prod_{i=1}^k P_i \times \Sigma \right) \prod M(S), \quad (3.4)$$

где $P_1, \dots, P_k$ – компоненты связности вещественной части $\mathbb{R}S$ поверхности S , Σ – двумерная сфера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.2. Нужно проследить за перестройкой многообразий $\mathbb{R}F_t$ при переходе через особое многообразие $\mathbb{R}F_0$. Прежде всего выясним устройство этого особого многообразия. Для этого рассмотрим стягивание $\pi: S^{[2]} \rightarrow F_0$. Оно является разрешением особенностей многообразия F_0 , а именно, обратным преобразованием к моноидальному преобразованию с центром в поверхности $S \subset F_0$. Многообразие F_0 имеет особенности вдоль поверхности $S \subset F_0$, причем эти особенности являются обыкновенными коразмерности 2 двойными точками (см. лемму 2.1), поэтому раздутие поверхности $S \subset F_0$ разрешает особенности многообразия F_0 . Так как вещественная часть $\mathbb{R}Q$ квадрики Q является эллипсоидом, то прообраз $\pi^{-1}(S)$ не содержит вещественных точек. Следовательно, выполняется равенство для вещественных частей многообразий $F_0, S^{[2]}$

$$\mathbb{R}F_0 = \mathbb{R}S^{[2]} \sqcup \mathbb{R}S.$$

Из теоремы 1.1 получаем диффеоморфизм $\mathbb{R}F_- = \mathbb{R}S^{[2]}$. Применим лемму 3.1; тогда получим, что перестройка многообразий $\mathbb{R}F_t$ при переходе через особое многообразие $\mathbb{R}F_0$ происходит следующим образом:

$$\mathbb{R}F_+ = \mathbb{R}F_- \sqcup \pi^{-1}(\mathbb{R}S). \quad (3.5)$$

Из равенств (3.3), (3.5) следует, что если расслоение $\pi: \pi^{-1}(\mathbb{R}S) \rightarrow \mathbb{R}S$ тривиально, то выполняется равенство (3.4).

Зафиксируем точку $s_0 \in \mathbb{R}Q \setminus \mathbb{R}S$ и рассмотрим тотальные пространства конусов

$$K_{\mathbb{R}S} = \bigcup_{s \in \mathbb{R}S} K_s \times s \subset Q \times \mathbb{R}S, \quad K = \bigcup_{s \in \mathbb{R}Q \setminus \{s_0\}} K_s \times s \subset Q \times \mathbb{R}Q.$$

Они расслаиваются на конусы, причем первое расслоение будет ограничением на $\mathbb{R}S \subset \mathbb{R}Q$ второго расслоения. Так как многообразие $\mathbb{R}Q$ является эллипсоидом, то разность $\mathbb{R}Q \setminus \{s_0\}$ диффеоморфна $\mathbb{R}^3$, а поэтому многообразие $\mathbb{R}Q \setminus \{s_0\}$ стягивается в точку. Следовательно, расслоение на комплексные конусы $\pi_K: K \rightarrow \mathbb{R}Q \setminus \{s_0\}$ тривиально. Поэтому тривиальны расслоения

$$\pi_K: K_{\mathbb{R}S} \rightarrow \mathbb{R}S, \quad \pi_K: \mathbb{P}(K_{\mathbb{R}S}) \rightarrow \mathbb{R}S.$$

Осталось заметить, что выполняется равенство расслоений на коники $\mathbb{P}(K_{\mathbb{R}S}) = \pi^{-1}(\mathbb{R}S)$. Лемма 3.2 доказана.

Чтобы закончить доказательство теоремы 0.1, возьмем точку $b_0 \in \mathbb{R}\Delta^*$, отвечающую ребру в графе присоединений на рис. 1, соединяющему вершину $(13, 9)$ с вершиной $(14, 8)_I$. В этом случае вещественная часть $\mathbb{R}S$ 6-поляризованной КЗ-поверхности S состоит из трех сфер. Можно выбрать такую точку $b_0 \in \mathbb{R}\Delta^*$, отвечающую верхнему ребру, чтобы вещественная часть $\mathbb{R}Q$ квадрики Q была эллипсоидом.

Действительно, рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + u^2 - v^2 = 0, \\ x(2x - v)(2x + v) = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Множество решений системы уравнений (3.6) в $\mathbb{RP}^4$ состоит из трех сфер. Теперь нужно немного изменить коэффициенты кубического уравнения в системе (3.6), чтобы новая система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + u^2 - v^2 = 0, \\ f_3(x, y, z, u, v) = 0 \end{cases}$$

задавала неособую поверхность S в $\mathbb{P}^4$. Тогда возьмем точку $b_0 \in \mathbb{R}\Delta^*$, отвечающую вещественной кубике в $\mathbb{P}^5$

$$w(x^2 + y^2 + z^2 + u^2 - v^2) + f_3(x, y, z, u, v) = 0.$$

Рассмотрим кривую $b = \beta(t)$, удовлетворяющую предыдущим условиям (в частности равенству (3.1)); тогда получим, что классы грубой проективной эквивалентности кубик C_- , C_+ равны $(13, 9)$, $(14, 8)_I$, соответственно. Применим теперь лемму 3.2; из нее вытекает, что теорема 0.1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] C. H. Clemens, P. A. Griffiths, “The intermediate Jacobian of the cubic threefold”, *Ann. of Math.* (2), **95**:2 (1972), 281–356.
- [2] В. А. Рохлин, “Комплексные топологические характеристики вещественных алгебраических кривых”, *УМН*, **33**:5 (1978), 77–89.
- [3] A. B. Altman, S. L. Kleiman, “Foundations of the theory of Fano schemes”, *Compositio Math.*, **34**:1 (1977), 3–47.
- [4] В. В. Никулин, “Целочисленные симметрические билинейные формы и некоторые их геометрические приложения”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43**:1 (1979), 111–177.
- [5] S. Finashin, V. Kharlamov, “Deformation classes of real four-dimensional cubic hypersurfaces”, *J. Algebraic Geom.*, **17**:4 (2008), 677–707; [arXiv:math AG/0607137v1](#).
- [6] В. А. Краснов, “Эквивариантная топологическая классификация многообразий Фано вещественных четырехмерных кубик”, *Матем. заметки*, **85**:4 (2009), 603–615.
- [7] B. Hassett, “Special cubic fourfolds”, *Compositio Math.*, **120**:1 (2000), 1–23.
- [8] В. А. Краснов, “Жесткая изотопическая классификация вещественных трехмерных кубик”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:4 (2006), 91–134.
- [9] Дж. Милнор, *Особые точки комплексных гиперповерхностей*, Мир, М., 1971.
- [10] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотика интегралов*, Наука, М., 1984.

В. А. Краснов

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: krasnov@uniyar.ac.ru

Поступило

11.03.2008

Исправленный вариант

27.05.2008