Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Ляпин, О предельном поведении траекторного аттрактора нелинейного гиперболического уравнения, содержащего малый параметр при старшей производной, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 5, 745–753

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6911>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 15:37:22

О предельном поведении траекторного аттрактора нелинейного гиперболического уравнения, содержащего малый параметр при старшей производной

А. С. Ляпин

В настоящей работе исследуется траекторный аттрактор нелинейного неавтономного гиперболического уравнения с диссипацией и зависящего от малого параметра. Причем, для нелинейной функции, входящей в это уравнение, не выполняется условие Липшица. В работе показано, что при стремлении малого параметра к нулю траекторный аттрактор гиперболического уравнения сходится к траекторному аттрактору предельного параболического уравнения в соответствующей топологии.

Библиография: 6 названий.

В ряде работ (см., например, [1]–[3]) изучался вопрос о сходимости аттрактора нелинейного автономного гиперболического уравнения, содержащего малый параметр при второй производной по времени, к аттрактору предельного (при $\varepsilon = 0$) параболического уравнения. При этом предполагалось, что задача Коши для предельного параболического уравнения имеет единственное решение. В настоящей работе основное внимание уделяется тому случаю, когда не имеет место единственность решения задачи Коши для этих уравнений. В работе показано, что траекторный аттрактор гиперболического уравнения сходится к траекторному аттрактору предельного параболического уравнения в соответствующей топологии.

Рассматриваемое гиперболическое уравнение имеет следующий вид:

$$\varepsilon^2 u_{tt} + \gamma u_t + f(u; x; t) = \Delta u + g_\varepsilon(x; t), \quad (1)$$

где $x \in \Omega \in \mathbb{R}^n$, $\gamma > 0$ и $\varepsilon > 0$. Задается граничное условие $u|_{\partial\Omega} = 0$. Ранее, в работе [4] было показано, что для любого $\varepsilon > 0$ при выполнении некоторых условий относительно функции $f(u; x; t)$ существует траекторный аттрактор $A^{(\varepsilon)}$ уравнения (1). При $\varepsilon = 0$ уравнение (1) совпадает со следующим параболическим уравнением:

$$\gamma v_t + f(v; x; t) = \Delta v + g_0(x; t). \quad (2)$$

Уравнение (2) при выполнении указанных выше условий имеет траекторный аттрактор A . В работе [5] было доказано, что если уравнение (2) удовлетворяет условиям теоремы единственности решения задачи Коши, то траекторный аттрактор $A^{(\varepsilon)}$ сходится к траекторному аттрактору A в соответствующей топологии (т.е. произвольная окрестность A содержит $A^{(\varepsilon)}$, когда ε достаточно мало). Мы докажем этот факт и в том случае, когда для предельного уравнения не имеет место единственность решения задачи Коши.

Существование решения гиперболического уравнения. Пусть функция $f(v; x; t)$ и ее первообразная $F(v; x; t) = \int_0^v f(\xi; x; t) d\xi$ непрерывны и удовлетворяют условиям

$$F(v; x; t) \geq \gamma_1 |v|^p - C_1, \quad (3)$$

$$C_3 |v|^p - C_4 \leq f(v; x; t)v \leq C_5 |v|^p + C_6, \quad (4)$$

$$\alpha f(v; x; t)v - \frac{\partial F(v; x; t)}{\partial t} \geq \alpha \gamma_2 F(v; x; t) - \alpha C_2. \quad (5)$$

Здесь $\alpha > 0$, $C_i > 0$, $\gamma_i > 0$, $p > 2$ — не зависят от x и t . Внешняя сила $g_\varepsilon(x; t)$ удовлетворяет условию

$$\int_t^{t+1} \|g_\varepsilon(x; \tau)\|_{L_2}^2 d\tau < C < \infty \quad \text{для любого } t \in \mathbb{R} \quad (6)$$

равномерно по $\varepsilon > 0$. Кроме того, $g_\varepsilon(x; t+h)$ слабо в $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\Omega))$ сходится к $g_0(x; t+h)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, равномерно по $h \in \mathbb{R}$. Точнее говоря, для любого фиксированного $M > 0$ и произвольной функции $\varphi \in L_2([-M; M] \times \Omega)$

$$\int_{-M}^M \int_{\Omega} \varphi(x; t) g_\varepsilon(x; t) dx dt \rightarrow \int_{-M}^M \int_{\Omega} \varphi(x; t) g_0(x; t) dx dt. \quad (7)$$

При $t = 0$ задаются начальные условия

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L_p(\Omega), \\ u_t|_{t=0} &= u_1 \in L_2(\Omega). \end{aligned} \quad (8)$$

Следует отметить, что функция $f(u; x; t)$ может не быть липшицевой по u и x . Поэтому для уравнений (1) и (2) может и не иметь места единственность решения задачи Коши. Рассмотрим соответствующий пример.

Пусть $x \in \Omega = [0; \pi]$ и уравнение (1) имеет следующий вид:

$$u_{tt} + u_t - \frac{2\sqrt[3]{u(\sin x)^2}}{3} - \sqrt[3]{u^2 \sin x} - u + \theta(|u| - 1)(|u| - 1)^2 u = \Delta u.$$

Здесь $\varepsilon = \gamma = 1$, внешняя сила $g_\varepsilon(x; t) = 0$ и

$$f(u; x; t) = \frac{2\sqrt[3]{u(\sin x)^2}}{3} - \sqrt[3]{u^2 \sin x} - u + \theta(|u| - 1)(|u| - 1)^2 u,$$

где $\theta(\xi)$ — функция Хевисайда,

$$\begin{cases} \theta(\xi) = 0, & \xi < 0, \\ \theta(\xi) = 1, & \xi \geq 0. \end{cases}$$

Множество решений $u(x; t)$ при $t \in [0; 3]$ задачи Коши для этого уравнения с начальными условиями $u_0 = u_1 = 0$ состоит из функций вида

$$u(x; t) = \frac{1}{27}(t - t_0)^3 \theta(t - t_0) \sin x, \quad t_0 \in [0; 3].$$

Очевидно, что неединственность решения задачи Коши с нулевыми начальными условиями имеет место и для соответствующего параболического уравнения

$$v_t - \frac{2\sqrt[3]{v(\sin x)^2}}{3} - \sqrt[3]{v^2 \sin x} - v + \theta(|v| - 1)(|v| - 1)^2 v = \Delta v.$$

Далее теорема 1 установит существование решения $u(x; t)$ задачи (1), (8), удовлетворяющее некоторой оценке.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняются условия (3)–(6). Тогда существует хотя бы одно решение $u(x; t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega) \cap L_p(\Omega))$ задачи (1), (8), причем $u_t(x; t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+; L_2(\Omega))$.

При этом имеет место следующее неравенство:

$$Z_\varepsilon(t) \leq CZ_\varepsilon(0)e^{-\kappa t} + R_\kappa, \quad (9)$$

где

$$Z_\varepsilon(t) = \varepsilon^2 \|u_t\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u\|_{L_p(\Omega)}^p + \|u_t\|_{L_2(\Omega \times [t; t+1])}^2. \quad (10)$$

Здесь $\kappa > 0$, а постоянная R_κ зависит от α , C_i , γ_i , но не от ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формально умножим на u_t и u уравнение (1) и проинтегрируем по x :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\varepsilon^2 \|u_t\|_{L_2}^2}{2} + \int_\Omega F dx + \frac{\|u\|_{H_0^1}^2}{2} \right) + \gamma \|u_t\|_{L_2}^2 - \int_\Omega \frac{\partial F}{\partial t} dx = \int_\Omega g_\varepsilon u_t dx, \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\gamma \|u\|_{L_2}^2}{2} + \varepsilon^2 \int_\Omega u_t u dx \right) - \varepsilon^2 \|u_t\|_{L_2}^2 + \int_\Omega f u dx + \|u\|_{H_0^1}^2 = \int_\Omega g_\varepsilon u dx. \quad (12)$$

Сложив (11) и (12) умноженное на α , учитывая (5), получим

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\varepsilon^2 \|u_t\|_{L_2}^2}{2} + \alpha \left(\varepsilon^2 \int_\Omega u_t u dx + \frac{\gamma \|u\|_{L_2}^2}{2} \right) + \int_\Omega F dx + \frac{\|u\|_{H_0^1}^2}{2} \right) \\ & + (\gamma - \alpha \varepsilon^2) \|u_t\|_{L_2}^2 + \alpha \gamma_2 \int_\Omega F dx - \alpha C_2 |\Omega| + \alpha \|u\|_{H_0^1}^2 - \int_\Omega g_\varepsilon (u_t + \alpha u) dx \leq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Определим функцию z_ε и постоянную κ через следующие выражения:

$$\begin{aligned} z_\varepsilon &= \frac{\varepsilon^2 \|u_t + \alpha u\|_{L_2}^2}{2} + \frac{\alpha(\gamma - \varepsilon^2 \alpha) \|u\|_{L_2}^2}{2} + \int_\Omega F dx + \frac{\|u\|_{H_0^1}^2}{2}, \\ \kappa &= \min \left(\frac{\gamma - \varepsilon^2 \alpha}{2\varepsilon^2}; \frac{\alpha \gamma_2}{2}; 2\alpha \right); \end{aligned} \quad (14)$$

тогда из очевидного соотношения

$$\|u_t\|_{L_2}^2 \geq \frac{3}{4} \|u_t\|_{L_2}^2 + \frac{\alpha}{2} \int_\Omega u_t u dx - \frac{\alpha^2}{4} \|u\|_{L_2}^2 = \frac{1}{2} \|u_t\|_{L_2}^2 + \frac{1}{4} \|u_t + \alpha u\|_{L_2}^2 - \frac{\alpha^2}{2} \|u\|_{L_2}^2$$

легко выводится, что

$$\frac{dz_\varepsilon}{dt} + \kappa z_\varepsilon + \frac{(\gamma - \alpha \varepsilon^2) \|u_t\|}{2} \leq C_7 + \frac{\|g_\varepsilon\|_{L_2}^2}{\gamma - \alpha \varepsilon^2}. \quad (15)$$

Из неравенства Гронуолла следует, что

$$z_\varepsilon(t_0 + t) \leq z_\varepsilon(t_0)e^{-\kappa t} + C_8,$$

$$\frac{\gamma - \alpha\varepsilon^2}{2} \int_t^{t+1} \|u_\tau\|_{L_2}^2 d\tau \leq (1 + e^{-\kappa})z_\varepsilon(t) + C_8 + C_7 + \frac{1}{\gamma - \alpha\varepsilon^2} \int_t^{t+1} \|g_\varepsilon\|_{L_2}^2 d\tau.$$

Отсюда, а также из (14) и (10) выводим

$$Z_\varepsilon(t) \leq C(z_\varepsilon(t) + 1) \quad \text{и} \quad z_\varepsilon(t) \leq CZ_\varepsilon(t);$$

чтобы получить неравенство (9) осталось произвести элементарные вычисления. Доказательство существования решения проводится стандартными методами; см. например, [6].

Построение траекторного аттрактора гиперболического уравнения. Ввиду того, что условия (3)–(6) допускают существование нескольких различных решений задачи (1), (8), для изучения поведения $u(x; t)$ при $t \rightarrow \infty$ используется траекторный аттрактор, который строится ниже. Для его построения требуется понятие трансляционной компактности функций $f(u; x; t)$ и $g_\varepsilon(x; t)$. Причем функция $f(u; x; t)$ трансляционно компактна в пространстве Ξ_1 , а $g_\varepsilon(x; t)$ в Ξ_2 . Определим соответствующие пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть через Ξ обозначается пространство $\Xi_1 \times \Xi_2$, где

$$\Xi_1 = \left\{ \varphi(t) \in C^{\text{loc}}(\mathbb{R}; C^{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)) \mid \frac{\partial \varphi}{\partial t} \in C^{\text{loc}}(\mathbb{R}; C^{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)) \right\},$$

$$\Xi_2 = L_{2;w}^{\text{loc}}(\mathbb{R}; L_{2;w}^{\text{loc}}(\Omega)),$$

снабженное слабой топологией.

Следует отметить, что последовательность $\sigma_k = (\varphi_k(u; x; t); \psi_k(x; t)) \in \Xi$ сходится в топологии Ξ к $\sigma = (\tilde{\varphi}(u; x; t); \tilde{\psi}(x; t))$, если для любых фиксированных чисел $r > 0$ и $M > 0$ имеет место сходимость

- 1) $\varphi_k(u; x; t) \rightarrow \tilde{\varphi}(u; x; t)$ и $\partial \varphi_k(u; x; t)/\partial t \rightarrow \partial \tilde{\varphi}(u; x; t)/\partial t$ в $C([-r; r] \times [-r; r] \times [-M; M])$;
- 2) функции $\psi_k(x; t)$ слабо сходятся к $\tilde{\psi}(x; t)$ в $L_2(\Omega \times [-M; M])$.

Сформулируем теперь понятие трансляционно-компактной функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функцию $f(u; x; t)$ назовем *трансляционно-компактной* в Ξ_1 , если множество $\mathcal{H}(f(u; x; t))$, задаваемое формулой

$$\mathcal{H}(f(u; x; t)) = \overline{\left[\bigcup_{h \in \mathbb{R}} \{f(u; x; t + h)\} \right]}_{\Xi_1}$$

компактно в Ξ_1 .

Через $\overline{[\cdot]}_\Xi$ здесь и далее обозначается замыкание в топологии Ξ . Аналогично определяется трансляционная компактность функции $g_\varepsilon(x; t)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Символом $\sigma_0(t)$ уравнения (1) называется пара функций

$$\sigma_0(t) = (f(u; x; t); g_\varepsilon(x; t)).$$

Символ $\sigma_0(t)$ является трансляционно компактной функцией в пространстве Ξ , поэтому множество Σ , равное $\overline{\bigcup_{h \in \mathbb{R}} \{\sigma_0(t+h)\}}_{\Xi}$, компактно в Ξ . Последнее равносильно тому, что следующее семейство функций

$$\left\{ f(u; x; t+h); \frac{\partial f(u; x; t+h)}{\partial t}; u \in [-r; r]; x \in [-r; r]; t \in [-M; M] \right\}$$

для любых фиксированных чисел $r > 0$ и $M > 0$ удовлетворяет всем условиям теоремы Арцела, а семейство функций $\{g(x; t+h)\}$ равномерно по h ограничено в $L_2(\Omega \times [-M; M])$, а значит, предкомпактно в слабой топологии.

Ниже излагается схема построения траекторного аттрактора в применении к задаче (1), (8). Траекторный аттрактор $A^{(\varepsilon)}$ определяется для семейства уравнений следующего вида:

$$\varepsilon^2 u_{tt} + \gamma u_t + \tilde{f}(u; x; t) = \Delta u + \tilde{g}_\varepsilon(x; t). \quad (16)$$

Предполагается, что символ $\sigma(t) = (\tilde{f}(u; x; t); \tilde{g}_\varepsilon(x; t))$ принадлежит Σ . Уравнение (1) получается из (16) подстановкой $\tilde{f} = f(u; x; t)$ и $\tilde{g} = g(x; t)$. Имеет место следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть функции $f(u; x; t)$ и $g_\varepsilon(x; t)$ трансляционно компактны в Ξ_1 и Ξ_2 соответственно и выполнены условия (3)–(6). Тогда пара функций $(\tilde{f}(u; x; t); \tilde{g}_\varepsilon(x; t)) \in \Sigma$ удовлетворяет тем же условиям (3)–(6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения 2 следует, что $\tilde{f}(u; x; t)$ можно представить в виде $f(u; x; t+h)$ или $\tilde{f}(u; x; t) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(u; x; t+h_k)$. В первом случае выполнение условий (3)–(5) очевидно. Рассмотрим второй случай. Пусть $f^{(k)} = f(u; x; t+h_k)$ и $F^{(k)} = \int_0^u f(\xi; x; t+h_k) d\xi$. Очевидно, что (3)–(5) выполняется для $f^{(k)}$ и $F^{(k)}$, поэтому в неравенствах (3) и (4) можно перейти к пределу. Рассмотрим неравенство (5). Из определения 1 следует, что существует подпоследовательность $\partial f^{(k)}/\partial t \rightarrow \partial \tilde{f}/\partial t$. Отсюда выводим, что $\partial F^{(k)}/\partial t \rightarrow \partial \tilde{F}/\partial t$; следовательно, имеет место неравенство (5). Аналогично доказывается неравенство (6).

Из предложения 1 и теоремы 1 следует, что задача (16), (8) имеет решение, удовлетворяющее (9). Определим пространство, в котором строится аттрактор $A^{(\varepsilon)}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть F_+ следующее пространство:

$$F_+ = \{u \in L_\infty(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega) \cap L_p(\Omega)) \mid u_t \in L_2^b(\mathbb{R}_+; L_2(\Omega))\},$$

норма в котором определяется следующим образом:

$$\|u\| = \|u\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega))} + \|u\|_{L_p^b(\mathbb{R}_+; L_p(\Omega))} + \sup_{t>0} \|u_t\|_{L_2(\Omega \times [t; t+1])}.$$

Определим Θ_+ – топологию в F_+ . Любая функция $u(x; t) \in F_+$ определена на $t \in \mathbb{R}_+$. Сузим ее область определения до отрезка $[0; M]$. Теперь $u \in F_M$, где F_M и ее норма получаются из F_+ (и ее нормы) заменой везде $\mathbb{R}_+$ на $[0; M]$. Последовательность $u_k \in F_+$ сходится к $u \in F_+$ в топологии Θ_+ , если при любом фиксированном $M > 0$ последовательность $u_k(x; t)$ сходится в пространстве F_M *-слабо к $u(x; t)$. Следует отметить, что топология Θ_+ строится так, что замкнутые ограниченные подмножества F_+ являются компактными в Θ_+ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $K_{\Sigma}^{+;\varepsilon}(N)$ – множество всех решений уравнения (16), заданное следующим образом:

$$K_{\Sigma}^{+;\varepsilon}(N) = \{u(x; t) \mid Z_{\varepsilon}(t) \leq R_{\kappa}(\sigma_0) + Ne^{-\kappa t}\}.$$

На $K_{\Sigma}^{+;\varepsilon}(N)$ действует полугруппа $T(t)$ по следующей формуле:

$$T(h)u(x; t) = u(x; t + h).$$

Если $u(x; t)$ является решением уравнения (16) с символом $\sigma(t)$, то $u(x; t + h)$ решение уравнения (16) с символом $\sigma(t + h)$. Очевидно, что полугруппа $T(t)$ непрерывна в F_+ . В книге [4] показано, что вследствие замкнутости Σ множество $K_{\Sigma}^{+;\varepsilon}(N)$ замкнуто в F_+ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Множество $P \subset K_{\Sigma}^{+;\varepsilon}(N)$ назовем *притягивающим*, если для любой его окрестности $O(P) \subset \Theta_+$ и для любого ограниченного множества $B \subset K_{\Sigma}^{+;\varepsilon}(N)$ существует t_0 такое, что если $t > t_0$, то $T(t)B \subset O(P)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. *Траекторным аттрактором* уравнения (1) называется множество $A^{(\varepsilon)}$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $A^{(\varepsilon)}$ ограничено в F_+ и компактно в Θ_+ ;
- 2) $A^{(\varepsilon)}$ – притягивающее множество для любого N такого, что $K_{\Sigma}^{+;\varepsilon}(N)$ не пусто;
- 3) для всех $t > 0$ $T(t)A^{(\varepsilon)} = A^{(\varepsilon)}$.

Из определения 7, предложения 1 и теоремы 1 следует, что $A^{(\varepsilon)} \subset B(2R_{\kappa} + 1)$. Следует отметить, что топология Θ_+ сильнее, чем, например, топология в $L_2^b(\mathbb{R}_+; L_2(\Omega))$. Поэтому, если есть притяжение к $A^{(\varepsilon)}$ в Θ_+ , то и в $L_2^b(\mathbb{R}_+; L_2(\Omega))$ множество $A^{(\varepsilon)}$ также является притягивающим.

ТЕОРЕМА 2. Полугруппа $T(t)$ имеет траекторный аттрактор $A^{(\varepsilon)}$.

Доказательство теоремы 2 приведено в книге [4]. Ключевой момент в нем – это замкнутость $K_{\Sigma}^{+;\varepsilon}(N)$ в F_+ , непрерывность в F_+ полугруппы $T(t)$, действующей в $K_{\Sigma}^{+;\varepsilon}(N)$, компактность $K_{\Sigma}^{+;\varepsilon}(N)$ в Θ_+ и оценка (9).

Траекторный аттрактор параболического уравнения. Построение траекторного аттрактора уравнения (2) проводится так же, как и для уравнения (1). Так же, как и $A^{(\varepsilon)}$, траекторный аттрактор A определяется для семейства уравнений следующего вида:

$$\gamma v_t + \tilde{f}(v; x; t) = \Delta v + \tilde{g}_0(x; t). \quad (17)$$

Здесь $\tilde{f}(v; x; t)$ та же функция, что и в уравнении (16). Символ этого уравнения $(\tilde{f}; \tilde{g}_0)$ принадлежит Σ вследствие выполнения условия (7) и замкнутости Σ в Ξ . Пусть

$$v|_{t=0} = u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L_p(\Omega), \quad (18)$$

и, кроме того, выполняется граничное условие $u|_{\partial\Omega} = 0$. Тогда имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполняются условия (3)–(5) и $g_0(x; t) \in L_2^b(\mathbb{R}_+; L_2(\Omega))$. Тогда задача (17), (18) имеет решение $v \in L_{\infty}(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega) \cap L_p(\Omega))$, причем $v_t \in L_2^b(\mathbb{R}_+; L_2(\Omega))$, удовлетворяющее следующей оценке:

$$Z(t) \leq CZ(0)e^{-\kappa t} + R_{\kappa}, \quad Z = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u\|_{L_p(\Omega)}^p + \|u_t\|_{L_2(\Omega \times [t; t+1])}^2. \quad (19)$$

Здесь κ то же число, что и в теореме 1.

Доказательство теоремы 3 получается из теоремы 1 подстановкой $\varepsilon = 0$. Для уравнения (17), так же как и для (16), можно построить множество $K_{\Sigma}^{+,0}(N)$ – множество всех решений уравнения (17) таких, что

$$K_{\Sigma}^{+,0}(N) = \{u(x;t) \mid Z(t) \leq R_{\kappa} + Ne^{-\kappa t}\}.$$

Далее траекторный аттрактор A уравнения (2) строится точно так же, как и траекторный аттрактор $A^{(\varepsilon)}$.

Сходимость траекторного аттрактора гиперболического уравнения к траекторному аттрактору параболического уравнения. Перейдем к исследованию поведения $A^{(\varepsilon)}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Основным результатом этой работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполняется условие (7). Тогда траекторный аттрактор $A^{(\varepsilon)}$ уравнения (1) стремится к траекторному аттрактору A уравнения (2) в топологии Θ_+ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению 7 траекторные аттракторы $A^{(\varepsilon)}$ равномерно по ε ограничены в F_+ . Пусть $u(x;t) \in \bigcup_{0 < \varepsilon < 1} A^{(\varepsilon)}$. Тогда согласно пункту 3) определения 7 найдутся такие $(\tilde{f}; \tilde{g}_{\varepsilon}) \in \Sigma$, что

$$\varepsilon^2 u_{tt} + \gamma u_t + \tilde{f}(u; x; t) = \Delta u + \tilde{g}_{\varepsilon}(x; t).$$

Умножив это уравнение на $\varphi(x;t) \in L_{\infty}([0; M]; H^1(\Omega) \cap L_p(\Omega))$ и проинтегрировав по x и t , получим

$$\varepsilon^2 \int_{\Omega} u_t \varphi dx \Big|_0^M - \varepsilon^2 \int_0^M \int_{\Omega} u_t \varphi_t dx dt + \int_0^M \int_{\Omega} (\gamma u_t + \tilde{f} - \Delta u - \tilde{g}_{\varepsilon}) \varphi dx dt = 0. \quad (20)$$

Из ограниченности семейства $\bigcup_{0 < \varepsilon < 1} A^{(\varepsilon)}$ в пространстве F_+ следует, что любая последовательность из этого семейства содержит подпоследовательность $u_k(x;t)$, которая сходится в топологии Θ_+ к некоторой функции $v(x;t)$. Покажем теперь, что если $\varepsilon \rightarrow 0$, то $v(x;t)$ удовлетворяет уравнению (17).

Очевидно, что $\tilde{f}(u_k(x;t); x; t) \rightarrow \tilde{f}(v; x; t)$ *-слабо в $L_{\infty}([0; M]; L_p(\Omega))$, $\Delta u \rightarrow \Delta v$ *-слабо в $L_{\infty}([0; M]; H^{-1}(\Omega))$, поэтому для последнего слагаемого в (20) имеет место сходимость

$$\int_0^M \int_{\Omega} (\gamma (u_k)_t + \tilde{f}(u_k; x; t) - \Delta u_k - \tilde{g}_{\varepsilon}) dx dt \rightarrow \int_0^M \int_{\Omega} (\gamma v_t + \tilde{f}(v; x; t) - \Delta v - \tilde{g}_0) dx dt.$$

Покажем, что первые два интеграла в (20) удовлетворяют оценке

$$\left| \varepsilon^2 \int_{\Omega} u_t \varphi dx \Big|_0^M - \varepsilon^2 \int_0^M \int_{\Omega} u_t \varphi_t dx dt \right| \leq \varepsilon C. \quad (21)$$

Действительно, из неравенства Коши следует

$$\begin{aligned} \left| \varepsilon^2 \int_{\Omega} u_t \varphi dx \Big|_0^M \right| &\leq \frac{\varepsilon^3}{2} (\|u_t(x; M)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|u_t(x; 0)\|_{L_2(\Omega)}^2) \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} (\|\varphi(x; M)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\varphi(x; 0)\|_{L_2(\Omega)}^2). \end{aligned}$$

Из (10) следует, что

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \|u_t\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq Z_\varepsilon, \quad (22)$$

поэтому

$$\left| \varepsilon^2 \int_\Omega u_t \varphi dx \right|_0^M \leq \varepsilon (Z_\varepsilon(M) + Z_\varepsilon(0) + \|\varphi\|_{L_\infty([0;M]; L_2(\Omega))}^2). \quad (23)$$

Имеет место следующее очевидное неравенство:

$$\int_0^M \int_\Omega u_t \varphi_t dx dt \leq \|u_t\|_{L_2(\Omega \times [0;M])} \|\varphi_t\|_{L_2(\Omega \times [0;M])}.$$

Норму $\|u_t\|_{L_2(\Omega \times [0;M])}$ можно оценить суммой

$$\|u_t\|_{L_2(\Omega \times [0;M])} \leq \sum_{0 \leq k < M} \|u_t\|_{L_2(\Omega \times [k; k+1])}.$$

Отсюда и из (22) выводим

$$\int_0^M \int_\Omega u_t \varphi_t dx dt \leq \sum_{0 \leq k < M} \sqrt[2]{\frac{Z_\varepsilon(k)}{\gamma}} \|\varphi_t\|_{L_2(\Omega \times [0;M])}.$$

Из (9) следует ограниченность $Z_\varepsilon(k)$, поэтому

$$\int_0^M \int_\Omega u_t \varphi_t dx dt \leq C(M+1). \quad (24)$$

Неравенство (21) непосредственно выводится из неравенств (23) и (24). Следовательно, первые два интеграла в (20) стремятся к нулю. Поэтому функция $v(x; t)$ удовлетворяет уравнению (17).

Предположим, что теорема 4 не верна. Тогда в топологии Θ_+ существует окрестность $O(A)$ траекторного аттрактора A и такая последовательность $\varepsilon_m \rightarrow 0$, что траекторные аттракторы $A^{(\varepsilon_m)}$ не принадлежат $O(A)$. Следовательно, существует последовательность $u_m(x; t) \in A^{(\varepsilon_m)}$ такая, что все $u_m(x; t)$ не являются элементами $O(A)$. Так как аттрактор A является притягивающим множеством, существует достаточно большое число M , для которого верно следующее:

$$T(t)K_\Sigma^{+;0}(2R_\kappa + 1) \subset O(A) \quad \text{для любого } t > M.$$

Составим последовательность $u_m^{(-t)}$ такую, что $T(t)u_m^{(-t)} = u_m$. Такие $u_m^{(-t)}$ существуют и принадлежат аттракторам $A^{(\varepsilon_m)}$, если $u_m \in A^{(\varepsilon_m)}$. Следовательно, эта последовательность содержится в $B(2R_\kappa + 1)$ -шаре радиуса $2R_\kappa + 1$ и центром нуль. Поэтому у нее есть сходящаяся в Θ_+ подпоследовательность. Ее слабый предел $v \in F_+$ является решением предельного уравнения (2), так как ε_m стремится к нулю. Отсюда следует, что $T(t)v \in O(A)$. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik, “Perturbation of trajectory attractors for dissipative hyperbolic equations”, *The Maz'ya Anniversary Collection*, Vol. 2 (Rostock, 1998), Oper. Theory Adv. Appl., **110**, Birkhäuser, Basel, 1999, 33–54.
- [2] A. Haraux, “Two remarks on hyperbolic dissipative problems”, *Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications*, Collège de France seminar, Vol. VII (Paris, 1983–1984), Res. Notes in Math., **122**, Pitman, Boston, MA, 1985, 161–179.
- [3] X. Mora, J. Solá-Morales, “Existence and nonexistence of finite-dimensional globally attracting invariant manifolds in semilinear damped wave equations”, *Dynamics of Infinite-Dimensional Systems* (Lisbon, 1986), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. F Comput. Systems Sci., **37**, Springer-Verlag, Berlin, 1987, 187–210.
- [4] V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik, *Attractors for Equations of Mathematical Physics*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **49**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [5] А. С. Ляпин, “Усреднение траекторного аттрактора нелинейного волнового уравнения с быстро осциллирующей правой частью”, *Матем. заметки*, **82**:3 (2007), 390–394.
- [6] А. В. Бабин, М. И. Вишик, *Аттракторы эволюционных уравнений*, Наука, М., 1989.

А. С. Ляпин

Российский государственный технологический университет
им. К. Э. Циолковского (МАТИ)

Поступило

22.08.2008