Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Велиев, А. А. Шкаликов, О базисности Рисса собственных и присоединенных функций периодической и антипериодической задач Штурма–Лиувилля, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 5, 671–686

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6912>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 17:04:37

О базисности Рисса собственных и присоединенных функций периодической и антипериодической задач Штурма–Лиувилля

О. А. Велиев, А. А. Шкаликов

В работе изучается оператор Штурма–Лиувилля

$$Ly = -y'' + q(x)y, \quad x \in [0, 1],$$

порожденный в пространстве $L_2 = L_2[0, 1]$ периодическими или антипериодическими краевыми условиями. Доказаны теоремы о базисности собственных и присоединенных функций оператора L . Одним из основных является следующий результат.

Пусть потенциал q принадлежит пространству Соболева $W_1^p[0, 1]$ при некотором целом $p \geq 0$ и удовлетворяет условиям $q^{(k)}(0) = q^{(k)}(1) = 0$ при $0 \leq k \leq s-1$, где $s \leq p$. Пусть функции Q и S определены равенствами $Q(x) = \int_0^x q(t) dt$, $S(x) = Q^2(x)$ и q_n, Q_n, S_n – коэффициенты Фурье функций q, Q, S по тригонометрической системе $\{e^{2\pi i n x}\}_{-\infty}^{\infty}$. Пусть последовательность $q_{2n} - S_{2n} + 2Q_0Q_{2n}$ убывает не быстрее степени n^{-s-2} . Тогда система собственных и присоединенных функций оператора L , порожденного периодическими краевыми условиями, образует базис Рисса (после нормировки собственных функций) в пространстве $L_2[0, 1]$ в том и только том случае, когда выполняется условие

$$q_{2n} - S_{2n} + 2Q_0Q_{2n} \asymp q_{-2n} - S_{-2n} + 2Q_0Q_{-2n}, \quad n > 1.$$

Библиография: 13 названий.

1. Введение и предварительные результаты. Обозначим через L_α оператор Штурма–Лиувилля

$$L_\alpha = -y'' + q(x)y,$$

порожденный в пространстве $L_2 = L_2[0, 1]$ квазипериодическими краевыми условиями

$$y(1) = e^{\pi i \alpha} y(0), \quad y'(1) = e^{\pi i \alpha} y'(0).$$

В общем случае предполагаем, что $q(x)$ комплекснозначная суммируемая по Лебегу функция и $\alpha \in [0, 2)$. Известно [1; гл. 2], что оператор L_α является регулярным по Биркгофу, причем в случае $\alpha \neq 0, 1$ усиленно регулярным. В последнем случае (т.е. при $\alpha \neq 0, 1$) собственные и присоединенные (или корневые) функции оператора L_α

Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00283) и фонда INTAS (грант № 05-1000008-7883).

после нормировки собственных функций образуют базис Рисса (этот результат независимо доказан в [2; гл. 19], [3], [4] не только для оператора Штурма–Лиувилля, но и для усиленно регулярных дифференциальных операторов произвольного порядка). Если оператор регулярен, но усиленно регулярным не является, то его корневые функции, вообще говоря, не образуют даже обычный базис. Однако известно [5], [6], что их можно объединить парами так, что соответствующие двумерные подпространства образуют базис Рисса из подпространств (соответствующие определения см., например, в [7; гл. 6]).

Цель настоящей работы – рассмотреть более детально случаи $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$, которые соответствуют периодической и антипериодической задачам, и найти необходимые и достаточные условия, когда система корневых функций образует базис Рисса или безусловный базис. Эта задача важна для изучения оператора Штурма–Лиувилля с периодическим комплексным потенциалом на всей вещественной оси (так называемого оператора Хилла), а также представляет самостоятельный интерес. Для знакомства с недавними достижениями в изучении оператора Хилла мы отсылаем читателя к недавней работе Дьякова и Митягина [8], где можно найти многие другие ссылки.

В 1996 г. на семинаре в МГУ Шкаликков сформулировал следующий результат: *если $q(x)$ достаточно гладкий потенциал, причем $q^{(k)}(0) = q^{(k)}(1) = 0$ при $0 \leq k \leq s-1$, а $q^{(s)}(0) \neq q^{(s)}(1)$, то система корневых функций рассматриваемого оператора образует базис Рисса в L_2* . Идея доказательства состояла в следующем: получить асимптотику корневых функций на основе известных асимптотик решений для гладких потенциалов и проверить, что угол между корневыми функциями в двумерных подпространствах не стремится к нулю. Тогда свойство базисности получается из теорем [5], [6]. Керимов и Мамедов [9] получили строгое доказательство этого результата в случае $q \in C^4[0, 1]$, $q(1) \neq q(0)$. В действительности, сформулированный результат остается справедливым для произвольного $s \geq 0$. Его доказательство будет получено в следствии 2 настоящей работы.

Другой более оригинальный подход к решению задачи предложили Дернек и Велиев [10]. Достаточные условия базисности были найдены в терминах коэффициентов Фурье потенциала. А именно, они доказали следующий результат: *Если при $\alpha = 0$ или при $\alpha = 1$ выполнены условия*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |n|}{n q_{2n+\alpha}} = 0, \quad (1.1)$$

$$q_{2n+\alpha} \asymp q_{-2n-\alpha}, \quad (1.2)$$

то корневые функции оператора L_α , порожденного периодическими или антипериодическими краевыми условиями соответственно, образуют базис Рисса в пространстве $L_2[0, 1]$.

Этот результат впоследствии существенно улучшил Макин [11]. Другим методом он доказал, что утверждение о базисности Рисса сохраняется, если выполнено условие (1.2), а условие (1.1) заменено менее ограничительным: *найдется целое число $s \geq 0$ такое, что*

$$q \in W_1^s[0, 1], \quad q^{(k)}(0) = q^{(k)}(1) \quad \text{при } k = 0, 1, \dots, s-1, \\ |q_{2n+\alpha}| > c_0 n^{-s-1} \quad \text{для любого } n \gg 1 \quad \text{при некотором } c_0 > 0.$$

Более того, в работе [11] приведены условия, при выполнении которых базисности нет. Другие тонкие результаты об отсутствии свойства базисности были получены Дьяковым и Митягиным [12; теорема 71].

В этой работе мы получим более общие результаты, которые содержат все предыдущие, кроме конструкций теоремы 71 из [12].

Далее мы будем работать только с периодической задачей. Изменения, которые нужно провести для антипериодической задачи очевидны, о них мы скажем в конце работы. Не ограничивая общности, будем всегда предполагать, что среднее потенциала $q_0 = \int_0^1 q(x) dx = 0$. Известно [1; гл. 1], что собственные значения периодической задачи располагаются парами. Их удобно представить двумя последовательностями $\{\lambda_{n,1}\}_1^\infty$, $\{\lambda_{n,2}\}_1^\infty$, каждая из которых (см., например, [10]) имеет асимптотику

$$\lambda_{n,j} = (2n\pi)^2 + o(1), \quad j = 1, 2, \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (1.3)$$

Числа $\lambda_{n,1}$ и $\lambda_{n,2}$ при больших значениях индекса n являются простыми собственными значениями, если они не совпадают. В случае совпадения образуются двукратные собственные значения; при этом соответствующие корневые подпространства состоят либо из двух собственных функций, либо из жордановых цепочек, образуемых собственной функцией и присоединенной к ней. Конечно, для конечного числа начальных индексов структура корневых подпространств может быть более сложной. Однако число таких индексов конечно. Для удобства не ограничивая общности мы предположим, что кратность всех собственных значений ≤ 2 .

Чтобы упростить запись далее удобно опустить индекс j и нумеровать собственные значения следующим образом: $\lambda_{n,1} =: \lambda_n$, $\lambda_{n,2} =: \lambda_{-n}$. Полезно отметить, что при таком соглашении между всеми собственными значениями с учетом их кратности и индексами $n \in \mathbb{Z}$ имеется взаимно однозначное соответствие, сохраняющее асимптотику (1.3). Другими словами: найдется столь большое число $n_0 \geq 1$, что при всех $n \geq n_0$ внутри кругов $|\lambda - (2\pi n)^2| \leq 1$ находится ровно два собственных значения λ_n и λ_{-n} , а число оставшихся собственных значений равно $2(n_0 - 1) + 1$. Этот факт очевиден для потенциала $q(x) = 0$, а в общем случае его доказательство легко провести с помощью стандартных аргументов, использующих теорему Руше (мы опускаем доказательство, так как далее этот факт по существу не используется, а только позволяет упростить запись).

Для далеких кратных собственных значений имеем $\lambda_n = \lambda_{-n}$. Оставшиеся кратные собственные значения можно пронумеровать так, чтобы это соотношение сохранялось. Это следует из последнего замечания и соглашения, что кратность всех собственных значений ≤ 2 . Обозначим через $\varphi_{\pm n}$ нормированные собственные функции, отвечающие простым собственным значениям $\lambda_{\pm n}$. Для собственных значений $\lambda_n = \lambda_{-n}$ геометрической кратности 2 пару нормированных собственных функций φ_n , φ_{-n} выбираем так, чтобы они были взаимно ортогональными. Если кратному собственному значению $\lambda_n = \lambda_{-n}$ отвечает только одна собственная функция φ_n (считаем ее нормированной), то присоединенную функцию $\varphi_{-n} =: \psi_n$ выбираем так, чтобы она была ортогональна φ_n (этим условием она определяется однозначно). Полученную систему собственных и присоединенных функций (СПФ) $\{\varphi_n\}_{-\infty}^\infty$ назовем *нормальной*. Множество положительных индексов $n \in \mathbb{N}$, для которых собственные значения λ_n простые (соответственно кратные), обозначим через $\mathbb{N}_1$ (соответственно $\mathbb{N}_2$). Подмножество индексов $n \in \mathbb{N}_2$, которым отвечают жордановы цепочки φ_n , ψ_n , обозначим через $\mathbb{N}_3$.

Определим коэффициенты Фурье собственных функций

$$u_n = (\varphi_n, e^{2\pi i|n|x}), \quad v_n = (\varphi_n, e^{-2\pi i|n|x}), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.4)$$

После интегрирования по частям в равенстве

$$(-\varphi_n'' + q(x)\varphi_n - \lambda_n\varphi_n, e^{2\pi i k x}) = 0$$

получаем

$$[\lambda_n - (2\pi i k)^2](\varphi_n(x), e^{2\pi i k x}) = (q(x)\varphi_n(x), e^{2\pi i k x}) \quad (1.5)$$

для всех $k \in \mathbb{Z}$. Аналогично, если собственному значению λ_n отвечает жорданова цепочка φ_n, ψ_n , то справедливы равенства

$$\begin{aligned} &([-\psi_n'' + q(x)\psi_n - \lambda_n\psi_n - \varphi_n], e^{2\pi i k x}) = 0, \\ &[\lambda_n - (2\pi i k)^2](\psi_n(x), e^{2\pi i k x}) = (q(x)\psi_n(x), e^{2\pi i k x}) - (\varphi_n(x), e^{2\pi i k x}). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Из асимптотических равенств (1.3) следует, что для больших индексов $|n| > n_0$, и $n \neq \pm k$ справедливы неравенства

$$|\lambda_n - (2\pi i k)^2| \geq |(n - k)(n + k)|. \quad (1.7)$$

С помощью соотношений (1.5)–(1.7) мы получим асимптотики для собственных и присоединенных функций. Мы не считаем, что утверждение нижеследующей леммы является новым (см., например, соответствующие результаты в [1; гл. 1], [10], [12; предложение 4], [8; предложение 11]). Однако мы не смогли найти подходящей ссылки ко всем утверждениям леммы и решили представить здесь короткое доказательство.

ЛЕММА 1. *Собственные функции φ_n допускают представление*

$$\varphi_n(x) = u_n e^{2\pi i n x} + v_n e^{-2\pi i n x} + \varphi_n^0(x), \quad (1.8)$$

где u_n, v_n – коэффициенты Фурье, определенные равенствами (1.4), а функция $\varphi_n^0(x) \perp e^{\pm 2\pi i n x}$ и при условии нормировки $\|\varphi_n\| = 1$ допускает оценки

$$\sup_{x \in [0, 1]} |\varphi_n^0(x)| = O(n^{-1} \ln n), \quad \|\varphi_n^0(x)\| = O(n^{-1}), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Аналогично, если (при $n \in \mathbb{N}_3$) функция $\psi_n(x)$ – присоединенная к $\varphi_n(x)$, то справедливо представление

$$\psi_n(x) = \tilde{u}_n e^{2\pi i n x} + \tilde{v}_n e^{-2\pi i n x} + \psi_n^0(x), \quad (1.9)$$

где $\tilde{u}_n = (\psi_n, e^{2\pi i n x})$, $\tilde{v}_n = (\psi_n, e^{-2\pi i n x})$, $\psi_n^0 \perp e^{\pm 2\pi i n x}$ и справедливы оценки

$$\sup_{x \in [0, 1]} |\psi_n^0(x)| = O(n^{-1} \ln n)(1 + \|\psi_n\|), \quad \|\psi_n^0(x)\| = O(n^{-1})(1 + \|\psi_n\|), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $q\varphi_n \in L_1[0, 1]$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (q(x)\varphi_n(x), e^{2\pi i k x}) = 0.$$

Поэтому найдутся числа C_n и k_0 такие, что

$$\max_k |(q(x)\varphi_n(x), e^{2\pi i k x})| = |(q(x)\varphi_n(x), e^{2\pi i k_0 x})| = C_n.$$

Из соотношений (1.5) и (1.7) находим

$$\begin{aligned} |\varphi_n^0(x)| &\leq \sum_{k \neq \pm n} |(\varphi_n(x), e^{2\pi i k x})| \leq \sum_{k \neq \pm n} \left| \frac{(q(x)\varphi_n(x), e^{2\pi i k x})}{\lambda_n - (2\pi k)^2} \right| \\ &= O(C_n) \sum_{k \neq \pm n} |n - k|^{-1} |n + k|^{-1} = O\left(C_n \frac{\ln n}{n}\right). \end{aligned}$$

Аналогично получается оценка

$$\|\varphi_n^0(x)\|^2 \leq \sum_{k \neq \pm n} \left| \frac{(q(x)\varphi_n(x), e^{2\pi i k x})}{\lambda_n - (2\pi k)^2} \right|^2 = O(C_n) \sum_{k \neq \pm n} |n - k|^{-2} |n + k|^{-2} = O\left(\frac{C_n}{n^2}\right).$$

Далее, учитывая неравенства $|u_n|^2 + |v_n|^2 \leq 1$ и используя представление (1.8), находим

$$\begin{aligned} |C_n| &= |(q(x)\varphi_n(x), e^{2\pi i k_0 x})| = |(q(x)(u_n e^{2\pi i n x} + v_n e^{-2\pi i n x} + \varphi_n^0(x)), e^{2\pi i k_0 x})| \\ &\leq (2 + O(C_n n^{-1} \ln n)) \int_0^1 |q(x)| dx. \end{aligned}$$

Из этого соотношения следует $C_n = O(1)$. Тем самым, доказаны оценки для функции φ_n^0 . Оценки для функции ψ_n^0 в представлении (1.9) получаются точно также с учетом равенств (1.6).

Напомним, что система элементов $\{f_k\}$ гильбертова пространства H называется *базисом Рисса* в этом пространстве, если она эквивалентна некоторому (а тогда любому) ортонормированному базису $\{e_k\}$ в H . Эквивалентность означает существование ограниченного и ограниченно обратимого оператора A такого, что $Ae_k = f_k$. Базис $\{f_k\}$ называется *безусловным*, если он остается базисом при любых перестановках его элементов. Известно [7; гл. 6], что базис является безусловным, если и только если он эквивалентен ортогональному. Система $\{f_k\}$ называется *бесселевой*, если ряд $\sum |(f, f_k)|^2$ сходится для любого элемента f из H . Запись $a_n \asymp b_n$, $n \in \mathbb{N}_k$, далее означает, что найдутся положительные константы c_1, c_2 такие, что $c_1 < |a_n/b_n| < c_2$ для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}_k$.

В доказательстве основных результатов работы важную роль играет следующее предложение.

ТЕОРЕМА 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

- (i) *нормальная система СПФ оператора L_0 образует базис Рисса в пространстве $L_2[0, 1]$;*
- (ii) *множество индексов $\mathbb{N}_3$ (т.е. число жордановых цепочек) конечно и выполнены соотношения*

$$u_n \asymp v_n, \quad n \in \mathbb{N}_1, \quad (1.10)$$

$$u_{-n} \asymp v_{-n}, \quad n \in \mathbb{N}_1, \quad (1.11)$$

где u_n, v_n – коэффициенты Фурье, определенные в (1.4);

- (iii) множество индексов $\mathbb{N}_3$ конечно и выполнено одно из соотношений (1.10) или (1.11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Предположим, что число жордановых цепочек φ_n , ψ_n , $n \in \mathbb{N}_3$, бесконечно. Согласно определению нормальной системы имеем $\|\varphi_n\| = 1$. Покажем, что $\|\psi_n\| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тем самым, будет показано, что условие конечности множества $\mathbb{N}_3$ является необходимым для базисности Рисса системы СПФ (так как условие ограниченности снизу и сверху норм элементов последовательности является необходимым условием для базисности Рисса).

Подставим выражение (1.9) для функции ψ_n в равенство (1.6), в котором положим $k = n$ и $k = -n$. Получим соответственно

$$\begin{aligned} [\lambda_n - (2\pi n)^2] \tilde{u}_n - q_{2n} \tilde{v}_n + u_n &= O(n^{-1} \ln n)(1 + \|\psi_n\|), \\ [\lambda_n - (2\pi n)^2] \tilde{v}_n - q_{-2n} \tilde{u}_n + v_n &= O(n^{-1} \ln n)(1 + \|\psi_n\|), \end{aligned}$$

где $q_k = (q(x), e^{2\pi i k x})$ – коэффициенты Фурье потенциала $q \in L_1[0, 1]$. Имеем $q_{2n}, q_{-2n} \rightarrow 0$ и согласно (1.3) $\lambda_n - (2\pi n)^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Допустим, что $\|\psi_n\| < C$ для некоторой подпоследовательности индексов n . Так как третье слагаемое в представлении (1.9) ортогонально первым двум, то $|\tilde{u}_n|^2 + |\tilde{v}_n|^2 < C^2$. Но тогда из полученных равенств следует $|u_n| + |v_n| \rightarrow 0$. Это противоречит условию $\|\varphi_n\| = 1$. Следовательно, $\|\psi_n\| \rightarrow \infty$.

Шаг 2. Пусть система $\{\varphi_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ есть базис Рисса. Тогда число жордановых цепочек конечно. Не ограничивая общности и чтобы не усложнять запись, считаем, что $\mathbb{N}_3 = \emptyset$. Заметим, что функции $\bar{\varphi}_n(x)$, $n \notin \mathbb{N}_3$, являются собственными функциями сопряженного оператора L_0^* (он порождается дифференциальным выражением с потенциалом $\bar{q}$ и периодическими краевыми условиями.) Если $n \in \mathbb{N}_1$, то из соотношений биортогональности (см., например, [13; гл. 1]), имеем $(\varphi_n, \varphi_k) = \alpha_n \delta_{nk}$, где $\alpha_n \neq 0$, а δ_{nk} – символ Кронекера. Из представления (1.8) и оценки в норме L_2 для функции φ_n^0 получаем

$$\alpha_n = (\varphi_n, \bar{\varphi}_n) = 2u_n v_n + O(n^{-2}), \quad n \in \mathbb{N}_1. \quad (1.12)$$

При $n \in \mathbb{N}_2 \setminus \mathbb{N}_3 = \mathbb{N}_2$ собственные функции φ_n и φ_{-n} выбраны взаимно ортогональными. Поэтому, если φ_n имеет представление (1.8), то с точностью до множителя равного по модулю 1, имеем

$$\varphi_{-n}(x) = \bar{v}_n e^{2\pi i n x} - \bar{u}_n e^{-2\pi i n x} + O(n^{-1}).$$

Следовательно, система $\{\chi_n(x)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, биортогональная к $\{\varphi_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, имеет вид

$$\chi_n = \alpha_n^{-1} \bar{\varphi}_n, \quad \text{если } n \in \mathbb{N}_1, \quad \chi_{\pm n} = \bar{\varphi}_{\mp n} + O(n^{-1}), \quad \text{если } n \in \mathbb{N}_2.$$

Условие равномерной минимальности $\|\varphi_n\| \|\chi_n\| \leq \text{const}$ является необходимым условием базисности. Следовательно, $|\alpha_n|^{-1} \|\varphi_n\|^2 = |\alpha_n|^{-1} \leq \text{const}$, $n \in \mathbb{N}_1$. Из этой оценки, равенства (1.12) и равенства $|u_n|^2 + |v_n|^2 = 1 + O(n^{-1})$ получаем $u_n \asymp v_n$, $n \in \mathbb{N}_1$. Тем самым, доказана импликация (i) $\Rightarrow$ (iii).

Шаг 3. Пусть выполнено одно из условий (1.10) или (1.11); например, первое $u_n \asymp v_n \asymp 1$. Из соотношений биортогональности имеем

$$0 = (\varphi_n, \varphi_{-n}) = u_n u_{-n} + v_n v_{-n} + O(n^{-1}).$$

Так как $|u_{-n}| + |v_{-n}| \asymp 1$, последнее соотношение выполняется, только если выполнено условие (1.11). Тем самым, доказана эквивалентность условий (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

Доказательство импликации (ii) $\Rightarrow$ (i) имеется в работах [10] и [11]. Отметим только, что ее легко получить независимо: условие (ii) вместе с полученными соотношениями (1.12) влекут, что углы между функциями φ_n и φ_{-n} равномерно положительны. В самом деле, если углы стремятся к нулю при некоторых индексах $n \rightarrow \infty$, то для этих индексов $\varphi_n = \varphi_{-n} + o(1)$, а соотношения $\alpha_n = (\varphi_n, \bar{\varphi}_n)$, $(\varphi_n, \bar{\varphi}_{-n}) = 0$ влекут $\alpha_n \rightarrow 0$. Это противоречит соотношению (1.12). Но тогда импликация (ii) $\Rightarrow$ (i) следует из теоремы [5] о базисности Рисса из двумерных подпространств. Этим завершается доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Эквивалентность первых двух утверждений теоремы 1 в случае конечного числа кратных собственных значений отмечалась в работах [10] и [11]. В приведенном доказательстве мы использовали аргументы из [10]. Отметим, что в случае кратных собственных значений утверждение теоремы 1 из [11] нуждается в корректировке.

Сформулируем еще одно утверждение, которое дает критерий безусловной базисности. Доказательство получается повторением рассуждений из предыдущей теоремы и мы его опускаем.

ТЕОРЕМА 1'. *Для того чтобы система СПФ $\{\varphi_n\}$ оператора L_0 образовывала безусловный базис, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий (1.10) или (1.11).*

2. Основные результаты. Перед формулировкой основных результатов приведем несколько лемм. Основным инструментом в нашем подходе к решению проблемы базисности является полученное в лемме 3 соотношение (2.3). Однако наиболее принципиальной частью работы является проведенная в лемме 6 расшифровка поведения фигурирующих в (2.3) последовательностей чисел $B_m(\lambda_n)$ и $B'_m(\lambda_n)$ в терминах условий на потенциал q .

Первая из нижеследующих лемм получена в работе [10]. Здесь отметим лишь, что ее доказательство основано на формуле (1.5), в которой нужно положить $k = n$ для получения формулы (2.1) и $k = -n$ для получения формулы (2.2). В первом случае правая часть в (1.5) заменяется рядом (используем, что $q_0 = 0$)

$$\sum_{n_1 \neq 0} q_{n_1}(\varphi_n(x), e^{2\pi i(n-n_1)x}),$$

где q_n – коэффициент Фурье потенциала q . Можно показать, что ряд сходится и представляет правую часть (1.5). Оставляем в этом ряду слагаемые при $n_1 = 2n$, а остальные слагаемые при $n_1 \neq 2n$ заменяем согласно (1.5) выражениями

$$q_{n_1} \frac{(q(x)\varphi_n(x), e^{2\pi i(n-n_1)x})}{\lambda_n - (2\pi(n-n_1))^2}.$$

Такой же прием можно провести с числителем этого выражения и затем продолжить процесс.

ЛЕММА 2. Пусть $q_n = (q(x), e^{2\pi i n x})$, причем $q_0 = 0$. Справедливо следующее равенство ($n \geq 1$):

$$[\lambda_n - (2\pi n)^2 - A_m(\lambda_n)](\varphi_n(x), e^{2\pi i n x}) - (q_{2n} + B_m(\lambda_n))(\varphi_n, e^{-2\pi i n x}) = R_m, \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} A_m(\lambda_n) &= \sum_{k=1}^m a_k(\lambda), & B_m(\lambda_n) &= \sum_{k=1}^m b_k(\lambda_n), \\ a_k(\lambda_n) &= \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k} \frac{q_{n_1} q_{n_2} \cdots q_{n_k} q_{-n_1-n_2-\dots-n_k}}{[\lambda_n - (2\pi(n-n_1))^2] \cdots [\lambda_n - (2\pi(n-n_1-\dots-n_k))^2]}, \\ b_k(\lambda_n) &= \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k} \frac{q_{n_1} q_{n_2} \cdots q_{n_k} q_{2n-n_1-n_2-\dots-n_k}}{[\lambda_n - (2\pi(n-n_1))^2] \cdots [\lambda_n - (2\pi(n-n_1-\dots-n_k))^2]}, \\ R_m &= \sum_{n_1, n_2, \dots, n_{m+1}} \frac{q_{n_1} q_{n_2} \cdots q_{n_{m+1}} (q(x) \varphi_n(x), e^{2\pi i(n-n_1-\dots-n_{m+1})})}{[\lambda_n - (2\pi(n-n_1))^2] \cdots [\lambda_n - (2\pi(n-n_1-\dots-n_{m+1}))^2]}. \end{aligned}$$

Суммирование в этих формулах проводится по индексам $n_p \neq 0$, $\sum_1^p n_j \neq 0$, $\sum_1^p n_j \neq 2n$ при $1 \leq p \leq m+1$.

Также справедливо равенство

$$[\lambda_n - (2\pi n)^2 - A'_m(\lambda_n)](\varphi_n(x), e^{-2\pi i n x}) - (q_{-2n} + B'_m(\lambda_n))(\varphi_n, e^{2\pi i n x}) = R'_m, \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} A'_m(\lambda_n) &= \sum_{k=1}^m a'_k(\lambda_n), & B'_m(\lambda_n) &= \sum_{k=1}^m b'_k(\lambda_n), \\ a'_k(\lambda_n) &= \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k} \frac{q_{n_1} q_{n_2} \cdots q_{n_k} q_{-n_1-n_2-\dots-n_k}}{[\lambda_n - (2\pi(n+n_1))^2] \cdots [\lambda_n - (2\pi(n+n_1+\dots+n_k))^2]}, \\ b'_k(\lambda_n) &= \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k} \frac{q_{n_1} q_{n_2} \cdots q_{n_k} q_{-2n-n_1-n_2-\dots-n_k}}{[\lambda_n - (2\pi(n+n_1))^2] \cdots [\lambda_n - (2\pi(n+n_1+\dots+n_k))^2]}, \\ R'_m &= \sum_{n_1, n_2, \dots, n_{m+1}} \frac{q_{n_1} q_{n_2} \cdots q_{n_{m+1}} (q(x) \varphi_n(x), e^{2\pi i(n+n_1+\dots+n_{m+1})})}{[\lambda_n - (2\pi(n+n_1))^2] \cdots [\lambda_n - (2\pi(n+n_1+\dots+n_{m+1}))^2]}, \end{aligned}$$

а суммирование проводится по индексам $n_p \neq 0$, $\sum_1^p n_j \neq 0$, $\sum_1^p n_j \neq -2n$, $1 \leq p \leq m+1$.

Участвующие в этих формулах выражения допускают оценки

$$a_k(\lambda_n) = O\left(\frac{\ln^k n}{n^k}\right), \quad b_k(\lambda_n) = O\left(\frac{\ln^k n}{n^k}\right), \quad R_m = O\left(\frac{\ln^{m+1} n}{n^{m+1}}\right)$$

и такие же оценки справедливы для выражений $a'_k(\lambda_n)$, $b'_k(\lambda_n)$ и R'_m .

Приведенные формулы справедливы и при отрицательных индексах $n \notin \mathbb{N}_3$, если $\ln n$ заменить на $\ln |n|$. Они остаются также справедливыми, если вместо λ_n в них подставить λ_{-n} .

ЛЕММА 3. Пусть $u_n, v_n, n \geq 1$, – коэффициенты Фурье собственных функций, определенные согласно формулам (1.4). Пусть $m \geq 0$ – произвольное целое число. Справедливо следующее соотношение:

$$(q_{2n} + B_m(\lambda_n))v_n^2 - (q_{-2n} + B'_m(\lambda_n))u_n^2 = O\left(\frac{\ln^{m+1} n}{n^{m+1}}\right). \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем соотношения (2.1) и (2.2) в виде

$$\begin{aligned} (\lambda_n - (2\pi n)^2 - A_m(\lambda_n))u_n - (q_{2n} + B_m(\lambda_n))v_n &= O\left(\frac{\ln^{m+1} n}{n^{m+1}}\right), \\ (\lambda_n - (2\pi n)^2 - A'_m(\lambda_n))v_n - (q_{-2n} + B'_m(\lambda_n))u_n &= O\left(\frac{\ln^{m+1} n}{n^{m+1}}\right). \end{aligned}$$

Докажем справедливость равенства $A_m(\lambda_n) = A'_m(\lambda_n)$. Тогда формула (2.3) получается из последних двух соотношений: нужно умножить первое равенство на v_n , второе на u_n и вычесть второе из первого.

Достаточно показать, что $a_k(\lambda_n) = a'_k(\lambda_n)$. В формуле для выражения $a'_k(\lambda_n)$ проведем замену индексов суммирования, положив

$$-n_1 - n_2 - \dots - n_k = j_1, \quad n_2 = j_k, \quad n_3 = j_{k-1}, \quad \dots, \quad n_k = j_2.$$

Неравенства для запрещенных индексов $n_p \neq 0, \sum_1^p n_s \neq 0, -2n$ при $1 \leq p \leq k$ в формуле для a_k примут вид $j_p \neq 0, \sum_1^p j_s \neq 0, 2n$ при $1 \leq p \leq k$ и она совпадет с формулой для a'_k . Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть при некотором $m \geq 0$ выполнено одно из соотношений

$$(q_{2n} + B_m(\lambda_n))^{-1} = o\left(\frac{n^{m+1}}{\ln^{m+1} n}\right), \quad (q_{-2n} + B'_m(\lambda_n))^{-1} = o\left(\frac{n^{m+1}}{\ln^{m+1} n}\right) \quad (2.4)$$

при $n \rightarrow +\infty$.

Тогда число собственных значений геометрической кратности 2 конечно (т.е. множество $\mathbb{N}_2 \setminus \mathbb{N}_3$ конечно).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\varphi_n(x) = u_n e^{2\pi i n x} + v_n e^{-2\pi i n x} + \varphi_n^0(x), \quad \varphi_{-n}(x) = u_{-n} e^{2\pi i n x} + v_{-n} e^{-2\pi i n x} + \varphi_{-n}^0(x)$$

являются собственными функциями, отвечающими собственному значению $\lambda_n = \lambda_{-n}$. Согласно лемме 1 имеем $\|\varphi_n^0\| + \|\varphi_{-n}^0\| = O(n^{-1})$. Функции φ_n и φ_{-n} можно считать ортогональными, поэтому определитель из строк $\{u_n, v_n\}, \{u_{-n}, v_{-n}\}$ отличен от нуля. Любые линейные комбинации этих функций также являются собственными, поэтому можно выбрать собственные функции указанного вида так, что $u_n = 0, v_n = 1 + O(n^{-1}), u_{-n} = 1 + O(n^{-1}), v_{-n} = 0$. Для таких собственных функций соотношения (2.3) принимают вид

$$q_{2n} + B_m(\lambda_n) = O\left(\frac{\ln^{m+1} n}{n^{m+1}}\right), \quad q_{-2n} + B'_m(\lambda_n) = O\left(\frac{\ln^{m+1} n}{n^{m+1}}\right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, если множество собственных значений геометрической кратности 2 бесконечно, то никакое из двух соотношений (2.4) выполняться не может. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть при некотором $m \geq 0$ выполнены обе оценки в (2.4), а также выполнены оценки

$$q_{2n} + B_m(\lambda_n) = O\left(\frac{\ln^{m+1} n}{n^{m-3}}\right), \quad q_{-2n} + B'_m(\lambda_n) = O\left(\frac{\ln^{m+1} n}{n^{m-3}}\right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (2.5)$$

(при $m \leq 3$ эти оценки выполняются автоматически). Тогда число присоединенных функций конечно (т.е. множество индексов $\mathbb{N}_3$ конечно).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть φ_n, ψ_n – жорданова цепочка, отвечающая собственному значению λ_n . Тогда $\bar{\varphi}_n, \bar{\psi}_n$ – жорданова цепочка сопряженного оператора L_0^* . Из соотношений биортогональности (см. [13; гл. 1]) следует $(\varphi_n, \bar{\varphi}_n) = 0$. Из равенства (1.12) получаем

$$u_n v_n = O(n^{-2}).$$

В силу нормировки имеем $\|u_n\|^2 + \|v_n\|^2 = 1 + O(n^{-1})$, поэтому для всех достаточно больших n выполняется одно из неравенств $\|v_n\| > 1/2$ либо $\|u_n\| > 1/2$. Пусть, например, выполнено первое неравенство на бесконечной подпоследовательности индексов n . Тогда для таких значений индексов $u_n = O(n^{-2})$ и из соотношения (2.3) и второй оценки в (2.5) получаем

$$(q_{2n} + B_m(\lambda_n)) = (q_{-2n} + B'_m(\lambda_n))O(n^{-4}) + O\left(\frac{\ln^{m+1} n}{n^{m+1}}\right) = O\left(\frac{\ln^{m+1} n}{n^{m+1}}\right).$$

Это противоречит условию (2.4). Аналогично рассматривается случай, когда выполняются неравенства $\|u_n\| > 1/2$ на бесконечной подпоследовательности индексов. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть $p \geq 0$ произвольное целое число,

$$q(x) \in W_1^p[0, 1] \quad \text{и} \quad q^{(l)}(0) = q^{(l)}(1) \quad \text{для всех } 0 \leq l \leq s-1 \quad \text{при некотором } s \leq p. \quad (2.6)$$

Определим функции

$$Q(x) = \int_0^x q(t) dt, \quad S(x) = Q^2(x)$$

и обозначим $Q_k = (Q(x), e^{2\pi i k x})$, $S_k = (S(x), e^{2\pi i k x})$ – коэффициенты Фурье этих функций.

Справедливы следующие соотношения:

$$b_1(\lambda_n) = -S_{2n} + 2Q_0 Q_{2n} + o(n^{-s-2}), \quad b'_1(\lambda_n) = -S_{-2n} + 2Q_0 Q_{-2n} + o(n^{-s-2}), \quad (2.7)$$

$$b_2(\lambda_n) = o(n^{-s-2}), \quad b'_2(\lambda_n) = o(n^{-s-2}), \quad (2.8)$$

$$b_k(\lambda_n) = o\left(\frac{\ln^k n}{n^{k+s}}\right), \quad b'_k(\lambda_n) = o\left(\frac{\ln^k n}{n^{k+s}}\right) \quad \text{для всех } k \geq 3, 4, \dots \quad (2.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. В условиях леммы, интегрируя равенства $q_n = (q(x), e^{2\pi i n x})$, получаем $q_n = o(n^{-s})$. Далее, модуль по крайней мере одного из чисел $n_1, n_2, \dots, n_k$ и $\pm 2n - n_1 - n_2 - \dots - n_k$ превосходит число n/k . Поэтому

$$q_{n_1} q_{n_2} \cdots q_{n_k} q_{\pm 2n - n_1 - n_2 - \dots - n_k} = o(n^{-s}).$$

Знаменатели в выражениях для чисел $b_k(\lambda_n)$ и $b'_k(\lambda_n)$ оценим снизу с помощью неравенств (1.7). Получим не зависящие от λ_n ряды, оценка которых тривиальна и влечет оценки (2.9).

Шаг 2. Доказательство первых двух соотношений в утверждении леммы требует более тонкой работы. Из асимптотики (1.3) легко получается оценка

$$\sum_{k \neq 0, \pm 2n}^{\infty} \left| \frac{1}{\lambda_n - (2\pi(n \mp k))^2} - \frac{1}{(2\pi n)^2 - (2\pi(n \mp k))^2} \right| = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

В силу этой оценки имеем

$$b_1(\lambda_n) = \tilde{S}(2n) + o(n^{-s-2}), \quad b'_1(\lambda_n) = \tilde{S}(-2n) + o(n^{-s-2}), \quad (2.10)$$

где

$$\tilde{S}(\pm 2n) = \sum_{k \neq 0, 2n} \frac{q_k q_{2n-k}}{(2\pi n)^2 - (2\pi(n \mp k))^2} = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k \neq 0, 2n} \frac{q_k q_{\pm 2n-k}}{k(\pm 2n - k)}.$$

Подставив в равенство $S_{\pm 2n} = (Q^2(x), e^{\pm 2\pi i(2n)x})$ ряд Фурье $Q(x) = \sum Q_k e^{2\pi i k x}$ и воспользовавшись равенствами $Q_k = -(2\pi i k)^{-1} q_k$, получим

$$\tilde{S}(2n) = -S_{2n} + 2Q_0 Q_{2n}, \quad \tilde{S}(-2n) = -S_{-2n} + 2Q_0 Q_{-2n}.$$

Вместе с (2.10) эти равенства влекут (2.7).

Шаг 3. Докажем оценки (2.8). Рассуждая так же, как при доказательстве соотношений (2.7), находим

$$b_2(\lambda_n) = \frac{1}{(2\pi)^4} C(2n) + o\left(\frac{1}{n^{s+3}}\right),$$

где

$$C(2n) = \sum \frac{q_{n_1} q_{n_2} q_{2n-n_1-n_2}}{n_1(2n-n_1)(n_1+n_2)(2n-n_1-n_2)}.$$

Здесь и далее мы предполагаем, что суммирование ведется по всем индексам n_1, n_2 , для которых знаменатель не обращается в нуль.

Проведем замену $k_1 = n_1, k_2 = 2n - n_1 - n_2$. Тогда это выражение примет более простой вид

$$C(2n) = \sum \frac{q_{n_1} q_{n_2} q_{2n-n_1-n_2}}{n_1(2n-n_1)n_2(2n-n_2)}.$$

Воспользовавшись равенством

$$\frac{1}{k(2n-k)} = \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{(2n-k)} \right),$$

получим, что

$$C(2n) = \frac{1}{4n^2} (I_1 + 2I_2 + I_3), \quad (2.11)$$

где

$$I_1 := \sum \frac{q_{n_1} q_{n_2} q_{2n-n_1-n_2}}{n_1 n_2}, \quad I_2 := \sum \frac{q_{n_1} q_{n_2} q_{2n-n_1-n_2}}{n_2(2n-n_1)},$$

$$I_3 := \sum \frac{q_{n_1} q_{n_2} q_{2n-n_1-n_2}}{(2n-n_1)(2n-n_2)}.$$

Таким образом, нам нужно показать, что $|I_1| + |I_2| + |I_3| = o(n^{-s})$. Для оценки суммы I_1 заметим, что

$$((Q(x) - Q_0)^2 q(x), e^{2\pi i(2n)x}) = -(2\pi)^{-2} I_1.$$

Это равенство легко проверить, подставив в его левую часть ряд Фурье $Q(x) = Q_0 + \sum (2\pi i k)^{-1} q_k e^{2\pi i k x}$. Поскольку функция $(Q(x) - Q_0)^2 q(x)$ удовлетворяет условию (2.6), мы получаем $I_1 = o(n^{-s})$.

Для оценки суммы I_2 заметим, что

$$I_2 = \sum \frac{q_{n_1} q_{n_2} q_{2n-n_1-n_2}}{n_2(n_1+n_2)} = \sum \frac{q_{n_1} q_{n_2} q_{2n-n_1-n_2}}{n_1(n_1+n_2)}.$$

Взяв сумму двух последних выражений, получим $2I_2 = I_1$, поэтому $I_2 = o(n^{-s})$.

Шаг 4. Для оценки суммы I_3 рассмотрим функцию

$$G(x, n) = \int_0^x q(t) e^{-2\pi i(2n)t} dt - q_{2n}x.$$

Интегрируя по частям выражения для коэффициентов Фурье $G_k(n) := (G(x, n), e^{2\pi i k x})$, получаем

$$G_k(n) = \frac{1}{2\pi i k} q_{2n+k}, \quad \text{если } k \neq 0,$$

$$G(x, n) = G_0(n) + \sum_{n_1 \neq 2n} \frac{q_{n_1}}{2\pi i(n_1 - 2n)} e^{2\pi i(n_1 - 2n)x}.$$

Используя это разложение для функций $G(x, n)$, легко находим

$$\int_0^1 (G(x, n) - G_0(n))^2 q(x) e^{2\pi i(2n)x} dx = \frac{1}{4\pi^2} I_3.$$

Теперь предположим, что для функции $q(x)$, удовлетворяющей условию (2.6) с $s \geq 1$, мы уже доказали оценку

$$\int_0^1 (G(x, n) - G_0(n)) q^2(x) dx = o(n^{-s}). \quad (2.12)$$

Тогда интегрирование по частям дает (мы учитываем при этом оценки $q_{2n} = o(n^{-s})$ и (2.12))

$$\begin{aligned} I_3 &= 4\pi^2 \int_0^1 (G(x, n) - G_0(n))^2 q(x) e^{2\pi i(2n)x} dx \\ &= \frac{2\pi i}{n} \int_0^1 (G(x, n) - G_0(n)) G'(x, n) q(x) e^{2\pi i(2n)x} dx \\ &\quad + \frac{\pi i}{n} \int_0^1 (G(x, n) - G_0(n))^2 q'(x) e^{2\pi i(2n)x} dx \\ &= \frac{\pi i}{n} \int_0^1 (G(x, n) - G_0(n))^2 q'(x) e^{2\pi i(2n)x} dx + o(n^{-s-1}). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Из этих равенств следует, что $I_3 = o(1)$ для функции q , удовлетворяющей условию (2.6) при $s = 0$, так как любую функцию $q \in L_1$ можно аппроксимировать с любой точностью гладкой периодической функцией. Тогда по индукции из (2.13) заключаем $I_3 = o(n^{-s})$, что завершает доказательство.

Для доказательства (2.12) заметим, что

$$\begin{aligned} G_0(n) &= \int_0^1 \left(\int_0^x q(t) e^{-2\pi i(2n)t} dt - xq_{2n} \right) dx = - \int_0^1 xq(x) e^{-2\pi i(2n)x} dx + o(n^{-s}) \\ &= \frac{1}{4\pi in} \left[q(1) - \int_0^1 (q(x) + xq'(x)) e^{-2\pi i(2n)x} dx \right] + o(n^{-s}) \\ &= \frac{q(1)}{4\pi in} + \frac{q'(1)}{(4\pi in)^2} + \dots + \frac{q^{(s-1)}(1)}{(4\pi in)^{s-1}} + o(n^{(-s)}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

при условии, что первые $s - 1$ производных функции q абсолютно непрерывны. Введя в рассмотрение функцию $F(x) := \int_0^x q^2(x) dx$, мы найдем также

$$\begin{aligned} \int_0^x G(x, n) q^2(x) dx &= - \int_0^1 (q(x) e^{-2\pi i(2n)x} - q_{2n}) F(x) dx \\ &= \frac{1}{4\pi in} \left[q(1)F(1) - \int_0^1 (q^3(x) + F(x)q'(x)) e^{-2\pi i(2n)x} dx \right] + o(n^{(-s)}) \\ &= F(1) \left[\frac{q(1)}{4\pi in} + \frac{q'(1)}{(4\pi in)^2} + \dots + \frac{q^{(s-1)}(1)}{(4\pi in)^{s-1}} \right] + o(n^{(-s)}). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Равенства (2.14) и (2.15) дают (2.12). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнено одно из соотношений (2.4). Тогда нормальная система СПФ оператора L_0 образует базис Рисса в том и только в том случае, когда

$$q_{2n} + B_m(\lambda_n) \asymp q_{-2n} + B'_m(\lambda_n). \quad (2.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено, например, первое из соотношений в (2.4). Используя соотношение (2.3), получаем

$$v_n^2 = r_n u_n^2 + o(1), \quad r_n := \frac{q_{-2n} + B'_m(\lambda_n)}{q_{2n} + B_m(\lambda_n)}. \quad (2.17)$$

Предполагая, что выполнено условие (2.16), получаем, что $r_n \asymp 1$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда из (2.17) следует, что $u_n \asymp v_n \asymp 1$, $n \in \mathbb{N}$. Это соотношение влечет конечность числа жордановых цепочек. В самом деле (см. доказательство леммы 5), для всех индексов $n \in \mathbb{N}_3$, соответствующих жордановым цепочкам, выполняется оценка $u_n v_n = O(n^{-2})$. Поэтому соотношение $u_n \asymp v_n \asymp 1$, $n \in \mathbb{N}$, может выполняться только в случае, когда множество индексов $\mathbb{N}_3$ конечно. Используя теорему 1, получаем, что нормальная система СПФ образует базис Рисса.

Обратно, пусть система $\{\varphi_n\}_{-\infty}^{\infty}$ образует базис Рисса. Тогда согласно теореме 1 множество индексов $n \in \mathbb{N}_3$ конечно. Из леммы 4 следует, что множество индексов $\mathbb{N}_2$ также конечно, т.е. все собственные значения асимптотически простые. В этом случае из теоремы 1 следует $u_n \asymp v_n \asymp 1$, а из соотношения (2.17) получаем $r_n \asymp 1$.

В качестве следствий получаем несколько результатов.

ТЕОРЕМА 3. Пусть потенциал q подчинен условию (2.6) и найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что выполнена одна из оценок

$$|q_{2n} - S_{2n} + 2Q_0Q_{2n}| \geq \varepsilon n^{-s-2} \quad (2.18)$$

или

$$|q_{-2n} - S_{-2n} + 2Q_0Q_{-2n}| \geq \varepsilon n^{-s-2}. \quad (2.19)$$

Тогда условие

$$q_{2n} - S_{2n} + 2Q_0Q_{2n} \asymp q_{-2n} - S_{-2n} + 2Q_0Q_{-2n} \quad (2.20)$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы нормальная система СПФ образовывала базис Рисса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 6 следует, что при любом $m \geq 1$

$$\begin{aligned} q_{2n} + B_m(\lambda_n) &= q_{2n} - S_{2n} + 2Q_0Q_{2n} + o(n^{-s-2}), \\ q_{-2n} + B'_m(\lambda_n) &= q_{-2n} - S_{-2n} + 2Q_0Q_{-2n} + o(n^{-s-2}). \end{aligned}$$

Поэтому справедливость одного из соотношений (2.18) или (2.19) влечет справедливость соответственно первого или второго равенства в (2.4) при $m \geq s+2$. Очевидно, соотношения (2.16) и (2.20) эквивалентны при условии, что выполнено одно из условий (2.18) или (2.19). Остается применить теорему 2.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть потенциал q подчинен условию (2.6) и пусть при некотором $\varepsilon > 0$ выполняется одна из следующих оценок:

$$|q_{2n}| > \varepsilon n^{-s-1} \quad \text{или} \quad |q_{-2n}| > \varepsilon n^{-s-1} \quad \text{при всех } n \gg 1.$$

Тогда нормальная система СПФ оператора L_0 образует базис Рисса в том и только том случае, когда $q_{2n} \asymp q_{-2n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $Q, S \in W_1^{p+1}[0, 1]$, а в силу условия $q_0 = 0$ имеем

$$Q^{(l)}(0) = Q^{(l)}(1), \quad S^{(l)}(0) = S^{(l)}(1) \quad \text{при } 0 \leq l \leq s.$$

Тогда $Q_{\pm 2n} = o(n^{-s-1})$, $S_{\pm 2n} = o(n^{-s-1})$. Остается применить теорему 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что если одно из соотношений в (2.4) выполняется при $n \rightarrow \infty$ на некотором подмножестве индексов $\mathbb{N}'$ (т.е. на подпоследовательности $n_k \rightarrow \infty$), то число собственных значений геометрической кратности 2, отвечающих индексам $n \in \mathbb{N}'$, конечно. Это сразу следует из леммы 4. Тогда в дополнение к теореме 2 (теореме 3) получаем следующее утверждение. Если одна из оценок в (2.4) (оценка (2.18) или (2.19)) выполняется на подпоследовательности $n \in \mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$, а соотношение (2.16) (соотношение (2.20)) при $n \in \mathbb{N}'$, не выполняется, то любая нормальная система СПФ не образует базис Рисса. Действительно, так как множество индексов $\mathbb{N}_2 \cap \mathbb{N}'$ конечно, то бесконечное множество $\mathbb{N}' \setminus \mathbb{N}_2$ можно разбить на два подмножества $\mathbb{N}'_1$ и $\mathbb{N}'_3$ таких, что $\mathbb{N}'_1 \subset \mathbb{N}_1$ и $\mathbb{N}'_3 \subset \mathbb{N}_3$. Одно из подмножеств $\mathbb{N}'_1$ или $\mathbb{N}'_3$ бесконечно. В первом случае в силу теоремы 1 не выполняется необходимое условие базисности $u_n \asymp v_n$. Во втором случае множество $\mathbb{N}_3$ бесконечно, поэтому в силу той же теоремы система СПФ не образует базис Рисса. Укажем также условия, при которых нет обычной базисности: Если потенциал q удовлетворяет условию (2.6), соотношения (2.18) и (2.19) выполняются на подпоследо-

вательности $n \in \mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$, а соотношение (2.20) на этой подпоследовательности не выполняется, то любая нормальная система СПФ не образует обычный базис. Доказательство сохраняется, но дополнительно нужно воспользоваться леммой 5, положив $m = s + 2$ (число s берется из условия (2.6)). Из этой леммы получаем, что множество $\mathbb{N}_3 \cap \mathbb{N}'$ конечно, а тогда при $n \in \mathbb{N}'$ не выполняется необходимое условие обычной базисности $u_n \asymp v_n$ (см. доказательство теоремы 1).

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $q \in W_1^p[0, 1]$ при некотором $p \geq 1$ и $q^{(s)}(0) \neq q^{(s)}(1)$ при некотором $s \leq p - 1$. Тогда нормальная система СПФ оператора L_0 образует базис Рисса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что число s является наименьшим, при котором выполнено условие $q^{(s)}(0) \neq q^{(s)}(1)$. Это означает, что q удовлетворяет условию (2.6). Интегрируя по частям, получаем

$$q_n = \frac{q^{(s)}(1) - q^{(s)}(0)}{(2\pi i n)^{s+1}} + o(n^{-s-1}).$$

Это влечет выполнение оценок снизу в следствии 1 и соотношения $q_{2n} \asymp q_{-2n}$. Поэтому утверждение вытекает из следствия 1.

Доказательства соответствующих результатов для антипериодической задачи могут быть проведены аналогично. Здесь мы только сформулируем аналоги теоремы 3, следствия 1 и следствия 2.

ТЕОРЕМА 4. Справедливы следующие утверждения.

- (а) Пусть выполнено условие (2.6). Предположим дополнительно, что при некотором $\varepsilon > 0$ выполнена одна из оценок

$$|q_{2n+1} - S_{2n+1} + Q_0 Q_{2n+1}| \geq n^{-s-2} \quad \text{при всех } n \gg 1$$

или

$$|q_{-2n-1} - S_{-2n-1} + Q_0 Q_{-2n-1}| \geq n^{-s-2} \quad \text{при всех } n \gg 1.$$

Тогда условие

$$q_{2n+1} - S_{2n+1} + Q_0 Q_{2n+1} \asymp q_{-2n-1} - S_{-2n-1} + Q_0 Q_{-2n-1}$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы нормальная система СПФ оператора L_1 образовывала базис Рисса.

- (б) Пусть выполнено условие (2.6). Предположим дополнительно, что при некотором $\varepsilon > 0$ выполняется одна из оценок

$$|q_{2n+1}| \geq \varepsilon n^{-s-1} \quad \text{при всех } n \gg 1$$

или

$$|q_{-2n-1}| \geq \varepsilon n^{-s-1} \quad \text{при всех } n \gg 1.$$

Тогда условие

$$q_{2n+1} \asymp q_{-2n-1}$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы нормальная система СПФ оператора L_1 образовывала базис Рисса.

- (с) При выполнении условий следствия 2 нормальная система СПФ оператора L_1 образует базис Рисса.

Авторы благодарят проф. Б. С. Митягина и Р. О. Гринива за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969.
- [2] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Т. 2. Спектральная теория. Само-сопряженные операторы в гильбертовом пространстве*, Мир, М., 1966.
- [3] В. П. Михайлов, “О базисах Рисса в $L_2[0, 1]$ ”, *Докл. АН СССР*, **114**:5 (1962), 981–984.
- [4] Г. М. Кесельман, “О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов”, *Изв. вузов. Матем.*, 1964, № 2, 82–93.
- [5] А. А. Шкаликков, “О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора”, *УМН*, **34**:5 (1979), 235–236.
- [6] А. А. Шкаликков, “О свойстве базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1982, № 6, 12–21.
- [7] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965.
- [8] П. Джаков, Б. С. Митягин, “Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака”, *УМН*, **61**:4 (2006), 77–182.
- [9] Х. Р. Мамедов, Н. Б. Керимов, “О базисности Рисса корневых функций некоторых регулярных краевых задач”, *Матем. заметки*, **64**:4 (1998), 558–563.
- [10] N. Dernek, O. A. Veliev, “On the Riesz basisness of the root functions of the nonself-adjoint Sturm–Liouville operators”, *Israel J. Math.*, **145**:1 (2005), 113–123.
- [11] А. С. Макин, “О сходимости разложений по корневым функциям периодической краевой задачи”, *Докл. РАН*, **406**:4 (2006), 452–457.
- [12] P. Djakov, B. Mityagin, “Spectral triangles of Schrödinger operator with complex potentials”, *Selecta Math. (N.S.)*, **9**:4 (2003), 495–528.
- [13] В. А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения*, Наукова думка, Киев, 1977.

О. А. Велиев

Dogus University, Istanbul, Turkey

E-mail: oveliev@dogus.edu.tr

Поступило

20.02.2008

Исправленный вариант

30.10.2008

А. А. Шкаликков

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: ashkalikov@yahoo.com