Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Д. Лившиц, О жадном алгоритме в пространстве $L_p[0, 1]$, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 5, 788–791

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6913>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 16:14:02

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О жадном алгоритме в пространстве $L_p[0, 1]$

Е. Д. Лившиц

Пусть $X = (X, \|\cdot\|)$ – действительное банахово пространство. Множество $\mathcal{D} \subset X$ называют *словарем*, если из того, что $g \in \mathcal{D}$, следует, что $\|g\| = 1$ и $\text{span } \mathcal{D} = X$. В последнее время в связи с запросами приложений в теории приближения большое внимание уделяется задаче построения по элементу $f \in X$ конечной линейной комбинации элементов словаря $\sum_{k=1}^m c_k(f)g_k(f)$, $c_k(f) \in \mathbb{R}$, $g_k(f) \in \mathcal{D}$, достаточно хорошо приближающей f . В случае, когда X является действительным сепарабельным гильбертовым пространством $H = (H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, весьма эффективным оказывается следующий алгоритм.

Чисто жадный алгоритм (ЧЖА). Пусть задана целевая функция $f_0^{PGA} := f \in H$. Для каждого $m \geq 0$ последовательно выбираем вектор $g_{m+1}^{PGA} \in \mathcal{D}$ такой, что

$$|\langle f_m^{PGA}, g_{m+1}^{PGA} \rangle| = \sup_{g \in \mathcal{D}} |\langle f_m^{PGA}, g \rangle|$$

и определяем $f_{m+1}^{PGA} := f_m^{PGA} - \langle f_m^{PGA}, g_{m+1}^{PGA} \rangle g_{m+1}^{PGA}$.

Тем самым, для каждого $m \geq 1$ построено m -членное приближение к f :

$$\sum_{k=1}^m \langle f_{k-1}^{PGA}, g_k^{PGA} \rangle g_k^{PGA}.$$

Отметим, что из определения f_m^{PGA} и g_{m+1}^{PGA} вытекает, что

$$\|f_{m+1}^{PGA}\| = \inf_{c \in \mathbb{R}, g \in \mathcal{D}} \|f_m^{PGA} - cg\|. \quad (1)$$

Равенство (1) позволяет перенести ЧЖА на случай произвольного банахова пространства. Для $f, g \in X$, $\|g\| = 1$, определим

$$\mu(f, g) \in \mathbb{R}: \quad \|f - \mu(f, g)g\| = \inf_{\mu} \|f - \mu g\|, \quad r(f, g) := \|f\| - \|f - \mu(f, g)g\|.$$

X-жадный алгоритм (X-ЖА). Пусть задана целевая функция $f_0^{XGA} := f_0 := f \in H$. Для каждого $m \geq 0$ последовательно выбираем вектор $g_{m+1} \in \mathcal{D}$ такой, что

$$r(f_m, g_{m+1}) = \sup_{g \in \mathcal{D}} r(f_m, g), \quad (2)$$

и определяем

$$f_{m+1}^{XGA} := f_{m+1} := f_m - \mu(f_m, g_{m+1})g_{m+1}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 08-01-00799, 06-01-00160).

Легко видеть, что имеет место равенство

$$\|f_{m+1}\| = \|f_m\| - \sup_{g \in \mathcal{D}} r(f_m, g). \quad (3)$$

Джонс [1] доказал сходимость ЧЖА для всех словарей $\mathcal{D}$ и целевых функций $f \in H$. В настоящей момент никаких общих “положительных” результатов о сходимости X -ЖА неизвестно (в то же время для некоторых других обобщений ЧЖА подобные результаты получены [2], [3]). В работе исследуется вопрос сходимости и скорости сходимости X -ЖА для фиксированного словаря, состоящего из функций пропорциональных индикаторам двоичных промежутков. Отметим, что ряд результатов для этой системы был получен в [4]. Более подробно с жадными алгоритмами можно познакомиться, например, в обзоре [5].

Пусть $m = 2^k + i$, $k \geq 0$, $1 \leq i \leq 2^k$. Рассмотрим двоичные промежутки $\Delta_m := \Delta_k^i := [(i-1)/2^k, i/2^k]$. Обозначим через $|\cdot|$ меру Лебега подмножеств $[0, 1]$. Определим словарь $\mathcal{J}_p = \{I_m\}_{m=2}^\infty$, $I_m = |\Delta_m|^{-1/p} \chi_{\Delta_m}$, $m \geq 2$, где χ_Δ – характеристическая функция множества $\Delta \subset [0, 1]$.

Строго говоря, супремум в формуле (2) может не достигаться ни на одном элементе словаря, но для пространства $L_p[0, 1]$, $1 < p < \infty$, и словаря $\mathcal{J}_p$ определение (2) корректно.

Обозначим через $\Sigma_m(\mathcal{D})$ множество m -членных линейных комбинаций элементов словаря: $\Sigma_m(\mathcal{D}) = \{\sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda g_\lambda, c_\lambda \in \mathbb{R}, g_\lambda \in \mathcal{D}, \#\Lambda = m\}$. Наилучшим m -членным приближением функции $f \in X$ по словарю D называют величину $\sigma(f, \mathcal{D}) = \sigma(f, \mathcal{D}, X) = \inf_{h \in \Sigma_m(\mathcal{D})} \|f - h\|$. Для невозрастающей функции $\phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ рассмотрим класс

$$\mathcal{A}_\phi(\mathcal{D}) = \mathcal{A}_\phi(\mathcal{D}, X) = \{f \in X : \sigma(f, \mathcal{D}) \leq \phi(m), m \geq 0\}.$$

ТЕОРЕМА 1. Для любого p , $1 < p < \infty$, существует такое $\alpha_0 = \alpha_0(p) > 0$, что для произвольной положительной убывающей функции $\phi \in \mathcal{C}_1(\mathbb{R}_+)$, удовлетворяющей неравенству

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{t\phi'(t)}{\phi(t)} = \liminf_{t \rightarrow \infty} t(\ln(\phi(t)))' \geq -\alpha_0, \quad (4)$$

для любой $f \in \mathcal{A}_\phi(\mathcal{J}_p)$ и для произвольного $m \geq 1$ будет справедлива оценка

$$\|f_m^{XGA}(f, \mathcal{J}_p)\| = \|f_m\| \leq C\phi(m),$$

где константа $C > 0$ зависит от p и $\phi(\cdot)$, но не зависит от f и m .

Из теоремы 1 вытекает сходимость X -ЖА для всех $f \in L_p[0, 1]$.

ТЕОРЕМА 2. Для любого p , $1 < p < \infty$, и $f \in L_p[0, 1]$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m^{XGA}(f, \mathcal{J}_p)\| = 0.$$

Будем использовать две простые леммы.

ЛЕММА 1. Для любого промежутка $\tilde{\Delta} = [a, b) \subset [0, 1]$ найдется $m \geq 2$, для которого $\Delta_m \subset \tilde{\Delta}$ и $|\Delta_m| \geq (1/4)|\tilde{\Delta}|$.

ЛЕММА 2. Для любого $c_0 > 0$ существует такое $\alpha_0 > 0$, что для произвольной положительной убывающей функции $\phi \in \mathcal{C}_1(\mathbb{R}_+)$, удовлетворяющей неравенству (4), найдется такое $m_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $m \geq m_0$ будут справедливы оценки $\phi(m-1) \leq 2\phi(m)$ и

$$c_0 \frac{\phi(m)}{m} \geq \phi(m-1) - \phi(m+1). \quad (5)$$

Пусть $c_1, \dots, c_6$ – положительные константы, которые могут зависеть от p и ϕ , но не зависят от m и f .

ЛЕММА 3. Для любого $1 < p < \infty$ существуют $c_1, c_2 > 0$ такие, что для любых $n \geq 1$, $h \in \Sigma_n(\mathcal{I}_p)$, $\|h\| = 1$, $f \in L_p[0, 1]$, $\|f - h\| < c_1$ найдется $q \geq 2$, для которого $r(f, I_q) \geq c_2/n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует такое $c_3 > 0$, что для любых $u, v \in L_p[0, 1]$ и $\Delta \subset [0, 1]$ справедлива импликация

$$\int_{\Delta} |v|^p \leq c_3 \int_{\Delta} |u|^p \quad \Rightarrow \quad \int_{\Delta} |u + v|^p - \int_{\Delta} |v|^p \geq \frac{1}{2} \int_{\Delta} |u|^p. \quad (6)$$

Так как $h \in \Sigma_n(\mathcal{I}_p)$, найдется $s \leq 2n$ и непересекающиеся промежутки $\tilde{\Delta}_k$, $1 \leq k \leq s$, для которых

$$\bigsqcup_{1 \leq k \leq s} \tilde{\Delta}_k = [0, 1], \quad h|_{\tilde{\Delta}_k} - \text{константа}, \quad 1 \leq k \leq s.$$

Согласно лемме 1 найдутся такие индексы l_k , $1 \leq k \leq s$, что для двоичных промежутков Δ_{l_k} выполняется

$$\Delta_{l_k} \subset \tilde{\Delta}_k, \quad h|_{\Delta_{l_k}} - \text{константа}, \quad 1 \leq k \leq s, \quad \sum_{k=1}^s \int_{\Delta_{l_k}} |h|^p \geq \frac{1}{4} \int_{[0,1]} |h|^p = \frac{1}{4}.$$

Тогда найдутся такие константы $c_1, c_4 > 0$, что из неравенства $\|f - h\| \leq c_1$ будет следовать существование такого k_0 , $1 \leq k_0 \leq s \leq 2n$, что для $q = l_{k_0}$ будут выполняться неравенства

$$\int_{\Delta_q} |h|^p \geq \frac{c_4}{n}, \quad \int_{\Delta_q} |f - h|^p \leq c_3 \int_{\Delta_q} |h|^p.$$

Выберем такое число A , что для всех $t \in \Delta_q$ выполняется $h(t) = AI_q(t)$. Тогда согласно (6) для $u = h$, $v = f - h$ и $\Delta = \Delta_q$ имеем

$$\begin{aligned} r(f, I_q) &\geq \|f\| - \|f - AI_q\| \\ &= \left(\int_{[0,1] \setminus \Delta_q} |f|^p + \int_{\Delta_q} |f|^p \right)^{1/p} - \left(\int_{[0,1] \setminus \Delta_q} |f|^p + \int_{\Delta_q} |f - h|^p \right)^{1/p} \\ &\geq c_5 \left(\int_{\Delta_q} |f|^p - \int_{\Delta_q} |f - h|^p \right) \geq \frac{c_5}{2} \int_{\Delta_q} |h|^p \geq \frac{c_4 c_5}{2n}, \end{aligned}$$

что доказывает лемму для $c_2 = c_4 c_5 / 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Применив лемму 2 с $c_0 = c_2/4$, получим $\alpha_0 > 0$ и $m_0 \in \mathbb{N}$. Пусть $c_6 > 2$ таково, что

$$\frac{2}{c_6 - 2} < c_1, \quad c_6 - 2 \geq \frac{c_6}{2}, \quad \|f_m\| \leq \|f_0\| \leq \phi(0) \leq c_6 \phi(m), \quad 1 \leq m \leq m_0. \quad (7)$$

Предположим, что для некоторого $m > m_0$ выполняются неравенства $\|f_m\| > c_6 \phi(m)$, $\|f_{m-1}\| \leq c_6 \phi(m-1)$. В силу невозрастания последовательности $\{\|f_m\|\}$ будет выполняться неравенство

$$c_6 \phi(m) < \|f_m\| \leq \|f_{m-1}\| \leq c_6 \phi(m-1). \quad (8)$$

Так как $f \in \mathcal{A}_{\phi}(\mathcal{I}_p)$, существует $h_m \in \Sigma_m(\mathcal{I}_p)$, для которого $\|f - h_m\| \leq 2\phi(m)$. Рассматривая m -членную комбинацию $G_m := f - f_m$ и используя (8), получаем

$$\|f_m - (h_m - G_m)\| \leq 2\phi(m), \quad \|h_m - G_m\| \geq (c_6 - 2)\phi(m). \quad (9)$$

Рассмотрим элементы

$$\hat{f} := \frac{f_m}{\|h_m - G_m\|} \quad \text{и} \quad \hat{h} := \frac{h_m - G_m}{\|h_m - G_m\|}.$$

Согласно (7) и (9) $\|\hat{f} - \hat{h}\| \leq c_1$, и мы можем, применив лемму 3 к $n = 2m$, $f = \hat{f}$ и $h = \hat{h}$, получить $q \in \mathbb{N}$, для которого $r(\hat{f}, I_q) \geq c_2/2m$. Тогда с учетом (7) и (9) имеем

$$r(f_m, I_q) = \|h_m - G_m\| r(\hat{f}, I_q) \geq \frac{c_6 c_2}{4m} \phi(m).$$

Используя (3), (5) и (8), оценим

$$\begin{aligned} \|f_{m+1}\| &\leq \|f_m\| - r(f_m, I_q) \leq c_6 \phi(m-1) - \frac{c_6 c_2}{4m} \phi(m) \\ &= c_6 \phi(m+1) - c_6 \left(\frac{c_2}{4} \frac{\phi(m)}{m} - (\phi(m-1) - \phi(m+1)) \right) \leq c_6 \phi(m+1). \end{aligned}$$

Следовательно, для всех $m > m_0$ справедлива оценка $\|f_m\| \leq c_6 \phi(m-1)$. Тогда, используя лемму 2 и (7), получаем, что для всех $m \in \mathbb{N}$ справедлива оценка $\|f_m\| \leq 2c_6 \phi(m)$, что завершает доказательство теоремы 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. K. Jones, *Ann. Statist.*, **20**:1 (1992), 608–613. [2] Е. Д. Лившиц, *Матем. заметки*, **73**:3 (2003), 371–389. [3] M. Ganichev, N. J. Kalton, *J. Approx. Theory*, **124**:1 (2003), 89–95. [4] Т. П. Лукашенко, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2001, № 1, 6–10. [5] V. N. Temlyakov, *Acta Numer.*, **17** (2008), 235–409.

Е. Д. Лившиц

Эверноут Корп., г. Москва

E-mail: livshitz@rambler.ru

Поступило

24.10.2008