Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Покотило, Квазиклассическое приближение для
несамосопряженной задачи Штурма–Лиувилля с потен-
циалом $q(x) = x^4 - a^2x^2$, *Матем. заметки*, 2009, том 85,
выпуск 5, 792–796

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6914>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 15:58:24

Квазиклассическое приближение для несамосопряженной задачи Штурма–Лиувилля с потенциалом $q(x) = x^4 - a^2x^2$

В. И. Покотило

1. Формулировка основных результатов. В настоящей работе изучается семейство дифференциальных операторов

$$L(\varepsilon)y = i\varepsilon y'' + (x^4 - a^2x^2)y, \quad \varepsilon > 0 \quad (1.1)$$

действующее в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, где ε – малый параметр. Так как $q(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \pm\infty$, спектр этого оператора дискретен при любом $\varepsilon > 0$. Цель работы – показать, что при малых значениях ε собственные значения оператора концентрируются около некоторых кривых в комплексной плоскости, вид которых укажем явно (см. рис. 1). В работе доказано два ключевых утверждения, для понимания которых читателю следует ознакомиться с основными определениями теории графов Стокса. Подробное изложение этой теории можно найти, например, в [1].

ТЕОРЕМА 1. *Граф Стокса функции $q(z, \lambda) = i(z^4 - a^2z^2 - \lambda)$, соответствующей рассматриваемому оператору, обладает сложным комплексом Стокса только в том случае, если спектральный параметр λ принадлежит одной из кривых $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$, изображенных на рис. 2. Это утверждение определяет кривые в комплексной λ -плоскости, вдоль которых потенциально может концентрироваться предельный спектральный граф.*

ТЕОРЕМА 2. *Предельный спектральный граф рассматриваемого семейства операторов является объединением части кривой γ_2 , соединяющей нуль с точкой $\lambda_0 = -0.5 - i \cdot 0.44503\dots$, части кривой γ_3 , соединяющей -1 с λ_0 , и кривой γ_1 , выходящей из λ_0 и стремящейся к асимптоте, параллельной лучу $e^{-i\pi/3}t$, $t \in \mathbb{R}_+$ (см. рис. 1).*

Рис. 1. Предельный спектральный граф – кривые в λ -плоскости, соответствующие комплексам Стокса 2-го типа

Рис. 2. Кривые в λ -плоскости соответствующие сложным комплексам Стокса

Несложно показать, что

ЛЕММА 1.1. *Граф Стокса (А) функции $q(z, \lambda) = i(z^4 - a^2 z^2 - \lambda)$ подобен с коэффициентом a графу Стокса (В) функции $p(\tilde{z}, \tilde{\lambda}) = i(\tilde{z}^4 - \tilde{z}^2 - \tilde{\lambda}/4)$, где $\tilde{\lambda} = 4\lambda/a^4$.*

Таким образом, для исследования поставленной задачи достаточно исследовать топологию графов Стокса функции $p(z, \lambda)$. При этом, в силу того, что спектр оператора лежит в замыкании его числового образа, спектральный параметр

$$\lambda \in \Pi = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid -1 < \operatorname{Re} \lambda, \operatorname{Im} \lambda < 0\}.$$

Решением биквадратного уравнения находим, что точки поворота (нули функции p) имеют следующий вид:

$$z_1 = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + \lambda}}{2}}, \quad z_2 = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 + \lambda}}{2}}, \quad z_3 = -z_1, \quad z_4 = -z_2.$$

Здесь мы вводим ветвь $\sqrt{\lambda}$, которую далее будем называть основной:

$$\operatorname{Arg} \sqrt{\lambda} \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} \lambda < 0.$$

Это позволяет найти области, в которых лежат точки поворота.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Пусть $\lambda \in \Pi = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid -1 < \operatorname{Re} \lambda, \operatorname{Im} \lambda < 0\}$. Тогда

- 1) точка поворота z_1 лежит в четвертом квадранте в области, ограниченной лучом $[1/\sqrt{2}, +\infty)$ и кривой, выходящей из точки $\{1/\sqrt{2}\}$ и асимптотически стремящейся к лучу $e^{-i\pi/8}t$, $t \in \mathbb{R}_+$;
- 2) точка поворота z_2 лежит в первом квадранте, в области ограниченной лучом $[0, i\infty)$, отрезком $[0, 1/\sqrt{2}]$ и кривой, выходящей из точки $\{1/\sqrt{2}\}$ и асимптотически стремящейся к лучу $e^{3i\pi/8}t$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Также, используя результаты [1], легко доказать следующее утверждение.

ЛЕММА 1.2. 1. *Граф Стокса функции $p(z, \lambda) = i(z^4 - z^2 - \lambda/4)$ обладает свойством центральной симметрии относительно нуля.*

2. *Из простой точки поворота выходят три линии Стокса под углами $2\pi/3$ по отношению друг к другу.*

3. *В изучаемом случае при любом фиксированном λ имеем $q(z) = p(z, \lambda) = i(z^4 - z^2 - \lambda/4)$ и, следовательно, для бесконечных линий Стокса имеется шесть возможных асимптотических направлений:*

$$l_k = \left\{ z \mid z = \rho e^{i\phi_k}, 0 < \rho < \infty, \phi_k = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \right\}.$$

2. Кривые в комплексной λ -плоскости, соответствующие сложным графам Стокса, и их классификация. В дальнейшем, если не оговорено противное, предполагаем, что $\lambda \in \Pi$. Из общей теории графов Стокса [1] следует, что граф Стокса рассматриваемой функции в зависимости от λ может быть связным, состоять из одного сложного комплекса и двух простых, состоять из двух сложных комплексов или же состоять из четырех простых комплексов. В силу симметрии в первых двух случаях граф Стокса будет содержать точку $z = 0$, а в последних двух нет. Конечно, значение интеграла, задающего уравнение линии Стокса, будет зависеть от выбора пути интегрирования, но пока мы будем предполагать возможность выбора путей, которые позволяют вынести особые точки за пределы пути интегрирования. Случаю одного сложного и двух простых комплексов Стокса в λ -плоскости соответствуют кривые γ_1 и γ_2 . Так, при $\lambda \in \gamma_1$ противоположные точки поворота z_1 и z_3 принадлежат одному сложному комплексу Стокса. Аналогично, при $\lambda \in \gamma_2$ точки поворота z_2 и z_4 принадлежат одному сложному комплексу Стокса. Случаю двух сложных комплексов Стокса в λ -плоскости соответствуют кривые γ_3 и γ_4 . Так, при $\lambda \in \gamma_3$ точки поворота z_1 и z_2 принадлежат одному сложному комплексу Стокса, а точки поворота z_3 и z_4 принадлежат симметричному относительно нуля комплексу Стокса. Аналогично, при $\lambda \in \gamma_4$ точки поворота z_1 и z_4 принадлежат одному сложному комплексу Стокса, а точки поворота z_2 и z_3 принадлежат симметричному относительно нуля комплексу Стокса. При этом уравнение кривой γ_1 задается следующим образом:

$$\gamma_1 = \left\{ \lambda \mid \operatorname{Re} \left(e^{i\pi/4} \int_{z_1}^{z_3} \sqrt{z^4 - z^2 - \frac{\lambda}{4}} dz \right) = 0 \right\}.$$

Аналогичные уравнения для кривых $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ получаются путем замены начала и конца интегрирования. Данное представление позволяет доказать важную лемму.

ЛЕММА 2.1. Пусть

$$\xi(\lambda) = -\frac{\lambda + 2\sqrt{\lambda + 1} + 2}{\lambda}.$$

Тогда

$$\gamma_1 = \left\{ \lambda \mid \operatorname{Re} \left(e^{i\pi/4} \frac{{}_2F_1(-1/2, 1/2; 2; \xi(\lambda))}{z_2(\lambda)} \right) = 0 \right\}, \quad (2.1)$$

где ${}_2F_1(a, b; c; z)$ – гипергеометрическая функция, определяемая рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k z^k}{k! (c)_k} = 1 + \frac{abz}{c} + \frac{a(a+1)b(b+1)z^2}{2c(c+1)} + \dots,$$

$a, z_1(\lambda)$ и $z_2(\lambda)$ – точки поворота функции $p(z, \lambda)$.

Аналогичное представление имеют кривые $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$.

С помощью свойств гипергеометрической функции можно доказать ряд полезных свойств кривых $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$.

ЛЕММА 2.2. *При движении λ вдоль кривой γ_1 $\text{Arg}(\lambda) \rightarrow -\pi/3$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$. Аналогично, при движении λ вдоль кривой γ_2 $\text{Arg}(\lambda) \rightarrow -\pi$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$, если рассматривать кривую γ_2 во всей нижней полуплоскости.*

Кривая γ_1 выходит из точки $r_0 < -1/2$, причем r_0 – единственная вещественная точка кривой γ_1 .

Кривая γ_2 выходит из нуля под углом $-3\pi/4$, причем нуль – единственная вещественная точка кривой γ_2 в замыкании области Π .

Кривая γ_4 симметрична γ_1 , а γ_3 – кривой γ_2 , относительно прямой $\text{Re } \lambda = -1/2$.

Если через некоторую точку λ_0 проходят хотя бы две из четырех кривых $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$, то через нее проходят все четыре кривые.

Множество $A = \gamma_1 \cap \gamma_2 \cap \gamma_3 \cap \gamma_4$ состоит из одной точки $\lambda_0 \in \Pi$, $\text{Re } \lambda_0 = -1/2$, причем больше кривые $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ между собой не пересекаются.

При определении кривых $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ мы предполагали, что всегда можно вынести особые точки за пределы пути интегрирования. Описав поведение этих кривых, мы можем проверить справедливость нашего предположения для каждой из двух частей кривых γ_1, γ_2 путем сравнения с нулем выражения $\text{Re}(\int_0^{z_j} \sqrt{z^4 - z^2 - \lambda/4} dz)$ для какой-либо точки выбранной части кривой. В частности, несложно проверить, что для части кривой γ_1 , для которой $\text{Re } \lambda \in (-r_0, -1/2)$, это выражение не равно нулю. В остальных случаях граф Стокса действительно оказывается связным. Таким образом, в дальнейшем нас будет интересовать кривая γ'_1 , которая является частью кривой γ_1 при $\lambda > -1/2$, и, соответственно, кривая γ'_4 , которая является частью кривой γ_4 при $\lambda < -1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Утверждение о том, что граф Стокса функции $q(z, \lambda) = i(z^4 - a^2 z^2 - \lambda)$ обладает сложным комплексом Стокса только в том случае, если спектральный параметр λ принадлежит одной из кривых $\gamma'_1, \gamma'_4, \gamma_2, \gamma_3$ следует из определения кривых.

Качественное расположение кривой γ_2 вытекает из того, что кривая γ_2 является функцией вещественной оси, выходит из нуля под углом $-3\pi/4$, причем нуль – единственная вещественная точка кривой γ_2 , и асимптотически параллельна вещественной оси. Аналогично, качественное расположение кривой γ_1 вытекает из того, что кривая γ_1 является функцией вещественной оси, выходит из точки $r_0 \in \mathbb{R}_{(-1/2; +\infty)}$, причем r_0 – единственная вещественная точка кривой γ_1 и асимптотически параллельна лучу $\text{Arg}(\lambda) = -\pi/3$. Как уже отмечалось, нас интересует лишь часть кривой γ_1 , для которой $\text{Re } \lambda > -1/2$, т.е. кривая γ'_1 . В силу симметрии кривых также обоснованно качественное расположение кривых γ_3 и γ'_4 .

Далее, из того, что кривые пересекаются между собой лишь в точке $\lambda_0 = -0.5 - i \cdot 0.445 \dots$ следует взаиморасположение кривых.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Для доказательства теоремы 2 нам необходимо будет провести классификацию сложных комплексов Стокса при различных значениях параметра λ . Здесь сразу заметим, что как уже упоминалось в подобных работах (см. [2]), в случае сложного комплекса второго порядка не канонической является не связная область ограниченная линиями Стокса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Комплексами 1-го типа* мы будем называть комплексы 2-го порядка, т.е. содержащие две простые точки поворота, относительно которых точки $+\infty$ и $-\infty$ попадают в одну каноническую область. Остальные комплексы 2-го порядка будем называть *комплексами 2-го типа*.

Используя результаты [1] и утверждения, доказанные выше, можно показать следующее.

ЛЕММА 2.3. При $\lambda \in \gamma'_1$ соответствующие комплексы Стокса являются комплексами 2-го типа. При $\lambda \in \gamma_2$, $\operatorname{Re} \lambda \in [-1, -1/2)$ соответствующие комплексы Стокса являются комплексами 1-го типа. При $\lambda \in \gamma_2$, $\operatorname{Re} \lambda \in (-1/2, 0)$ соответствующие комплексы Стокса являются комплексами 2-го типа. При $\lambda \in \gamma_3$ и $\operatorname{Re} \lambda \in (-1, -1/2)$ соответствующие комплексы Стокса являются комплексами 2-го типа. При $\lambda \in \gamma_3$ и $\operatorname{Re} \lambda \in (-1/2, +\infty)$ соответствующие комплексы Стокса являются комплексами 1-го типа. При $\lambda \in \gamma'_4$, $\operatorname{Re} \lambda \in [-1, -1/2)$ соответствующие комплексы Стокса являются комплексами 1-го типа.

После того как мы нашли кривые, которым соответствуют сложные комплексы Стокса второго типа, утверждение, что на рис. 1 изображен предельный спектральный граф рассматриваемого семейства операторов, является следствием анонсированного Шкаликовым общего результата о переходе от топологии графов Стокса к предельному спектральному графу соответствующего семейства операторов. Таким образом, теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. В. Федорюк, *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1983.
- [2] С. Н. Туманов, А. А. Шкаликов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:4 (2002), 177–204.

В. И. Покотило

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: pokotilo.vadim@gmail.com

Поступило

24.10.2008