Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Маламуд, Операторные неравенства, обратные к неравенству Йенсена, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 4, 633–637

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm692>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 12:52:49

ОПЕРАТОРНЫЕ НЕРАВЕНСТВА, ОБРАТНЫЕ К НЕРАВЕНСТВУ ЙЕНСЕНА

С.М. Маламуд

В заметке доказываются операторные обращения неравенства Йенсена.

Доказательство основано на скалярных неравенствах, обратных неравенству Йенсена (см. [1]) и на известной теореме Наймарка [2].

Отправной точкой нашего исследования является следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [1]. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, A – ограниченный самосопряженный оператор в H ($A = A^* \in B(H)$), $aI \leq A \leq bI$. Пусть, далее, $f(x)$ – непрерывная и выпуклая вниз на $[a, b]$ функция и $k = (f(b) - f(a))/(b - a)$. Тогда

а) справедливо неравенство

$$0 \leq (f(A)h, h) - f((Ah, h)) \leq k(t_1 - a) + f(a) - f(t_1) =: c_1, \quad h \in H, \quad \|h\| = 1, \quad (1)$$

в котором $t_1 \in [a, b]$ – решение уравнения $f'(t) = k$;

б) если, к тому же, $f(x) > 0$ при $x \in [a, b]$, то

$$1 \leq \frac{(f(A)h, h)}{f((Ah, h))} \leq \frac{k(t_2 - a) + f(a)}{f(t_2)} =: c_2, \quad h \in H, \quad \|h\| = 1, \quad (2)$$

где t_2 – решение уравнения $kf(t) = (k(t - a) + f(a))f'(t)$;

с) если $f(x)$ строго монотонно возрастает и f^{-1} – обратная к f функция (т.е. $(f^{-1} \circ f)(x) = x$), то

$$0 \leq f^{-1}((f(A)h, h)) - (Ah, h) \leq f^{-1}(k(t_3 - a) + f(a)) - t_3 =: c_3, \quad h \in H, \quad \|h\| = 1, \quad (3)$$

где t_3 – решение уравнения $f'(f^{-1}(k(t - a) + f(a))) = k$;

д) если $a > 0$, f строго возрастает и положительна, то

$$1 \leq \frac{f^{-1}((f(A)h, h))}{(Ah, h)} \leq \frac{f^{-1}(k(t_4 - a) + f(a))}{t_4} =: c_4, \quad h \in H, \quad \|h\| = 1, \quad (4)$$

где t_4 – решение уравнения $kt = f'(f^{-1}(y)) \cdot f^{-1}(y)$ с $y = k(t - a) + f(a)$.

СЛЕДСТВИЕ 1 [1], [3]–[6]. Пусть $\|h\| = 1$. Тогда

$$(Ah, h)(A^{-1}h, h) \leq \frac{(a+b)^2}{4ab}, \quad (5)$$

$$0 \leq (Ah, h) - (A^{-1}h, h)^{-1} \leq (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2, \quad (6)$$

$$0 \leq (A^{-1}h, h) - (Ah, h)^{-1} \leq \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2}{ab}, \quad (7)$$

$$(A^2h, h) - (Ah, h)^2 \leq \frac{(b-a)^2}{4}, \quad (8)$$

$$(A^2h, h)^{1/2} - (Ah, h) \leq \frac{(b-a)^2}{4(b+a)}, \quad (9)$$

$$\frac{(A^2h, h)}{(Ah, h)^2} \leq \frac{(a+b)^2}{4ab}. \quad (10)$$

Неравенство (5) – известное неравенство Канторовича (см. [3]), а неравенства (6), (7) – его аддитивные аналоги, принадлежащие Монду и Шише [5] (см. также [1], [6]). Неравенство (10) получено Красносельским и Крейнм [4], а (8) и (9) – Штяном [6] и Мондом и Шишей [5] соответственно.

Обозначим через $A \upharpoonright PH$ сужение оператора A на подпространство PH .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, $A^* = A \in B(H)$, $aI \leq A \leq bI$ и $P = P^* = P^2$ – ортопроектор в H .

Пусть, далее, $f(x)$ непрерывна и выпукла вниз на $[a, b]$. Тогда с константами c_i ($1 \leq i \leq 4$), определенными в предложении 1, справедливы неравенства:

а)

$$Pf(A) \upharpoonright PH - f(PA \upharpoonright PH) \leq c_1 \cdot I_{PH}; \quad (11)$$

б) если, к тому же, $f(x) > 0$ при $x \in [a, b]$, то

$$Pf(A) \upharpoonright PH \leq c_2 \cdot f(PA \upharpoonright PH); \quad (12)$$

с) если $f(x)$ строго возрастает и f^{-1} – обратная к f функция $((f^{-1} \circ f)(x) = x)$, то

$$f^{-1}(Pf(A) \upharpoonright PH) - PA \upharpoonright PH \leq c_3 \cdot I_{PH}; \quad (13)$$

д) если $a > 0$, f строго возрастает и положительна, то

$$f^{-1}(Pf(A) \upharpoonright PH) \leq c_4 \cdot PA \upharpoonright PH. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть E_t – разложение единицы оператора $A_1 = PA \upharpoonright PH$,

$$A_1 = \int_a^b t dE_t.$$

Так как $f(x)$ выпукла вниз, из интегрального неравенства Йенсена для всех $h \in PH$, $\|h\| = 1$, получаем

$$f((PA \upharpoonright PH)h, h) = f\left(\int_a^b t d(E_th, h)\right) \leq \int_a^b f(t) d(E_th, h) = (f(PA \upharpoonright PH)h, h). \quad (15)$$

Поэтому в силу предложения 1, а)

$$((Pf(A) \upharpoonright PH)h, h) - (f(PA \upharpoonright PH)h, h) \leq (f(A)h, h) - f((Ah, h)) \leq c_1$$

для всех $h \in PH$, $\|h\| = 1$.

б) Комбинируя неравенства (2) и (15), для всех $h \in PH$ с $\|h\| = 1$ получим неравенство

$$\begin{aligned} c_2(f(PA \upharpoonright PH)h, h) &\geq c_2f((PA \upharpoonright PH)h, h) = c_2f((Ah, h)) \\ &\geq (f(A)h, h) = ((Pf(A) \upharpoonright PH)h, h). \end{aligned}$$

с) и д) доказываются аналогично.

Напомним следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [2]. Пусть H – гильбертово пространство. Оператор-функция $F(t)$ со значениями в $B(H)$, определенная на $[a, b]$, называется *обобщенным разложением единицы* (или *нормированной неотрицательной операторной мерой*), если она удовлетворяет условиям:

- а) оператор $F(t_2) - F(t_1)$ неотрицательно определен для всех $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_2 > t_1$;
- б) $F_t - 0 = F_t$;
- с) $F_a = 0$, $F_b = I$.

Из теоремы Наймарка (см. [2]) и предложения 2 выводится

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $F(t)$ – обобщенное разложение единицы в H . Тогда в условиях предложения 1 имеют место следующие неравенства с константами c_i ($1 \leq i \leq 4$), определенными в (1)–(4):

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\lambda) dF(\lambda) - f\left(\int_a^b \lambda dF(\lambda)\right) &\leq c_1 \cdot I; & \int_a^b f(\lambda) dF(\lambda) &\leq c_2 \cdot f\left(\int_a^b \lambda dF(\lambda)\right); \\ f^{-1}\left(\int_a^b f(\lambda) dF(\lambda)\right) - \int_a^b \lambda dF(\lambda) &\leq c_3 \cdot I; & f^{-1}\left(\int_a^b f(\lambda) dF(\lambda)\right) &\leq c_4 \cdot \int_a^b \lambda dF(\lambda). \end{aligned}$$

Следующая теорема – основной результат заметки.

ТЕОРЕМА 1. Пусть H – гильбертово пространство, $A_i = A_i^* \in B(H)$, $1 \leq i \leq n$, и $aI \leq A_i \leq bI$ при $i \in \{1, \dots, n\}$. Пусть, далее, $R_i \in B(H)$ – произвольные операторы, удовлетворяющие условию $\sum_{i=1}^n R_i^* R_i = I$ (в частном случае R_i можно выбрать скалярными операторами $R_i = \alpha_i I$ с $\sum |\alpha_i|^2 = 1$).

Если f непрерывна и выпукла вниз на $[a, b]$, то в условиях предложения 2 справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^n R_i^* f(A_i) R_i - f\left(\sum_{i=1}^n R_i^* A_i R_i\right) \leq c_1 \cdot I; \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^n R_i^* f(A_i) R_i \leq c_2 \cdot f\left(\sum_{i=1}^n R_i^* A_i R_i\right); \quad (17)$$

$$f^{-1}\left(\sum_{i=1}^n R_i^* f(A_i) R_i\right) - \left(\sum_{i=1}^n R_i^* A_i R_i\right) \leq c_3 \cdot I; \quad (18)$$

$$f^{-1}\left(\sum_{i=1}^n R_i^* f(A_i) R_i\right) \leq c_4 \cdot \left(\sum_{i=1}^n R_i^* A_i R_i\right). \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E_i(t)$ – разложение единицы оператора $A_i = A_i^*$ ($1 \leq i \leq n$). Положим $F(t) := \sum_{i=1}^n R_i^* E_i(t) R_i$. Легко видеть, что

$$\int_a^b \lambda dF(\lambda) = \sum_{i=1}^n R_i^* A_i R_i, \quad \int_a^b f(\lambda) dF(\lambda) = \sum_{i=1}^n R_i^* f(A_i) R_i. \quad (20)$$

Очевидно, $F(t)$ – обобщенное разложение единицы. Поэтому доказательство легко получается из предложения 3 с учетом (20).

Теперь мы применим теорему 1 для получения операторного аналога следствия 1.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $0 < aI \leq A_i = A_i^* \leq bI$ при $i \in \{1, \dots, n\}$ и $\sum_i \alpha_i = 1$. Тогда справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i A_i^{-1} \leq \frac{(a+b)^2}{4ab} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i A_i \right)^{-1}; \quad (21)$$

$$0 \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i - \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i A_i^{-1} \right)^{-1} \leq (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2 \cdot I; \quad (22)$$

$$0 \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i^{-1} - \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i A_i \right)^{-1} \leq \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2}{ab} I; \quad (22')$$

$$0 \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i A_i \right)^2 \leq \frac{(b-a)^2}{4} \cdot I; \quad (23)$$

$$0 \leq \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i A_i^2 \right)^{1/2} - \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i \leq \frac{(b-a)^2}{4(b+a)} \cdot I; \quad (23')$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i A_i^2 \leq \frac{(a+b)^2}{4ab} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i A_i \right)^2. \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Правые части неравенств (21)–(22') и (23)–(24) вытекают из теоремы 1 при $f(t) = t^{-1}$ и $f(t) = t^2$ соответственно. Соответствующие константы здесь те же, что и в следствии 1.

Левые части неравенств (21)–(24) – известные результаты об операторной выпуклости функций t^2 и t^{-1} (см. [3], [7]–[9]).

ЗАМЕЧАНИЕ. Следствие 2 инспирировано работой Монда и Печарика [9]. Именно, ими получены неравенства, близкие к (21) и (22'), однако лишь в частном случае двух $(m \times m)$ -матриц. Для указанного частного случая ими получены неравенства с более точными, чем в (21) и (22'), константами, зависящими от собственных значений матрицы $A^{-1/2} B A^{-1/2}$ (а не от границ a и b их спектров $\sigma(A)$ и $\sigma(B)$). Однако их метод основан на одновременной диагонализации двух положительно определенных матриц и не допускает обобщений ни на случай операторов в бесконечномерном гильбертовом пространстве, ни на случай более чем двух матриц.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Malamud S. M. // Докл. НАН Украины. 2000. Т. 4. С. 42–46. 2. Ахиезер Н., Глазман И. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966. 3. Глазман И. М., Любич Ю. М. Конечномерный линейный анализ. М.: Наука, 1969. 4. Красносельский М. А., Крейн С. Г. // Матем. сб. 1952. Т. 31 (73). С. 315–334. 5. Mond B., Shisha O. // Inequalities / ed. O. Shisha. V. 2. New York: Academic Press, 1970. P. 241–249. 6. Styan G. P. H. // Acta Univ. Tampere. Ser. A. 1983. V. 153. P. 158–166. 7. Bendat J., Sherman S. // Trans. Amer. Math. Soc. 1955. V. 79. P. 58–71. 8. Davis C. // Convexity. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc, 1963. P. 187–201. 9. Mond B., Pecaric J. E. // Linear Algebra Appl. 1995. V. 220. P. 359–364.