Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Шкарин, О спектрах линейных непрерывных операторов на сепарабельных пространствах Фреше, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 4, 637–640

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm693>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 11:28:14

О СПЕКТРАХ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА СЕПАРАБЕЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ФРЕШЕ

С. А. Шкарин

1. Формулировка основного результата. Напомним, что *пространством Фреше* (ПФ) [1] называется полное метризуемое локально выпуклое пространство. Все векторные пространства в этой работе предполагаются комплексными.

ТЕОРЕМА 1. Пусть T — линейный непрерывный оператор (далее ЛНО) на сепарабельном ПФ X . Тогда спектр [2] $\sigma(T)$ оператора T имеет тип $G_{\delta\sigma}$ (определения дискриптивных типов множеств см. в [3]).

Теорема 1 доказывается в [4]. Мы даем ниже ее более короткое доказательство. Хорошо известны примеры [5], [6] ЛНО на сепарабельных ПФ, спектры которых некомпактны. Следующая теорема является основным результатом работы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $A \subseteq \mathbb{C}$ — множество типа $G_{\delta\sigma}$. Тогда существует бесконечномерное сепарабельное ПФ X и ЛНО T на X такие, что $\sigma(T) = A$.

2. Доказательство теоремы 1. Пусть полунормы p_n ($n \in \mathbb{N}$) задают топологию ПФ X , $2p_n \leq p_{n+1}$ для всех n и $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ — плотная в X последовательность. Положим

$$A = \{z \in \mathbb{C} : \text{отображение } (T - zI) : X \rightarrow (T - zI)(X) \text{ является гомеоморфизмом}\},$$
$$B = \{z \in \mathbb{C} : (T - zI)(X) \text{ не плотно в } X\}.$$

Легко видеть, что

$$\sigma(T) = B \cup (\mathbb{C} \setminus A), \quad (1)$$

$$B = \bigcup_{m,n \in \mathbb{N}} \bigcap_{y \in X} B_{m,n,y}, \quad \text{где } B_{m,n,y} = \{z \in \mathbb{C} : p_m(Ty - zy - x_n) \geq 1\}, \quad (2)$$

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{y \in X} A_{m,n,y}, \quad \text{где } A_{m,n,y} = \{z \in \mathbb{C} : p_m(Ty - zy) \geq p_n(y)\}. \quad (3)$$

Замкнутость множеств $B_{m,n,y}$ и $A_{m,n,y}$ вытекает из непрерывности полунорм p_m . В силу (2) и (3) множества B и A имеют тип F_σ и $F_{\sigma\delta}$ соответственно. Согласно (1) множество $\sigma(T)$ имеет тип $G_{\delta\sigma}$.

3. Доказательство теоремы 2. Пусть $M \subseteq \mathbb{C}$ – непустое множество типа G_δ и $\sup\{|z| : z \in M\} < 1$. Тогда $\mathbb{C} \setminus M = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, где множества $A_n \subseteq \mathbb{C}$ замкнуты, $A_n \subseteq A_{n+1}$ при всех n и $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\} \subseteq A_0$. Пусть E_M – линейное пространство формальных выражений вида $\sum_{k=1}^n c_k \hat{x}_k$, где $n \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{C}$ и $x_k \in M$. Если $z \in \mathbb{C}$ и f – комплекснозначная функция, определенная в окрестности точки z , положим

$$\text{Lip}[f](z) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\inf\{c > 0 : |f(x) - f(y)| < c|x - y| \text{ при } |x - z| < \varepsilon, |y - z| < \varepsilon\}). \quad (4)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \text{Lip}[f + g](z) &\leq \text{Lip}[f](z) + \text{Lip}[g](z), \quad \text{Lip}[fg](z) \leq |f(z)| \text{Lip}[g](z) + |g(z)| \text{Lip}[f](z), \\ \text{Lip}\left[\frac{f}{g}\right](z) &\leq \frac{|f(z)| \text{Lip}[g](z) + |g(z)| \text{Lip}[f](z)}{|g(z)|^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть $\mathcal{L}$ – пространство всех ограниченных липшицевых функций $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ с нормой

$$p(\varphi) = \max\left\{\sup_{z \in \mathbb{C}} |\varphi(z)|, \sup_{z \in \mathbb{C}} \text{Lip}[\varphi](z)\right\}.$$

В силу (5) $\varphi\psi \in \mathcal{L}$ для любых $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$ и

$$p(\varphi\psi) \leq 2p(\varphi)p(\psi). \quad (6)$$

Для $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ и $\xi = \sum_{k=1}^n c_k \hat{x}_k \in E_M$ положим

$$\begin{aligned} \langle \xi, f \rangle &= \sum_{k=1}^n c_k f(x_k), \quad T_f \xi = \sum_{k=1}^n c_k f(x_k) \hat{x}_k, \\ \|\xi\|_f &= \sup\{|\langle \xi, f\varphi \rangle| : \varphi \in \mathcal{L}, p(\varphi) \leq 1\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Ясно, что $\langle \cdot, f \rangle$ – линейный функционал, T_f – линейный оператор и $\|\cdot\|_f$ – полунорма на E_M . Нетрудно проверить, что

$$\langle T_f \xi, g \rangle = \langle \xi, fg \rangle \quad \text{и} \quad T_f(T_g \xi) = T_{fg} \xi. \quad (8)$$

ЛЕММА 1. Если $a, f, g: M \rightarrow \mathbb{C}$, $b \in \mathcal{L}$, $\xi \in E_M$ и $a(z)f(z) = b(z)g(z)$ при всех $z \in M$, то $\|T_a \xi\|_f \leq 2p(b)\|\xi\|_g$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (6)–(8) имеем

$$\begin{aligned} \|T_a \xi\|_f &= \sup\{|\langle T_a \xi, f\varphi \rangle| : \varphi \in \mathcal{L}, p(\varphi) \leq 1\} = \sup\{|\langle \xi, gb\varphi \rangle| : \varphi \in \mathcal{L}, p(\varphi) \leq 1\} \\ &\leq \sup\{|\langle \xi, g\psi \rangle| : \psi \in \mathcal{L}, p(\psi) \leq 2p(b)\} \leq 2p(b)\|\xi\|_g. \end{aligned}$$

Пусть теперь $f_n(z) = \inf\{|z - x| : x \in A_n\}$. Очевидно, что $f_n \in \mathcal{L}$ и $p(f_n) \leq 1$. Наделим E_M топологией τ , задаваемой нормами

$$\|\xi\|_{k,m} = \|\xi\|_{g_{k,m}}, \quad \text{где } g_{k,m}(z) = (f_k(z))^{-m}, \quad k, m \in \mathbb{Z}_+ = \{j \in \mathbb{Z} : j \geq 0\}.$$

ЛЕММА 2. Отображение $x \mapsto \hat{x}$ из M в (E_M, τ) непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_n \in M$ ($n \in \mathbb{N}$), $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in M$, $k, m \in \mathbb{Z}_+$, $\varphi \in \mathcal{L}$, $p(\varphi) \leq 1$. Тогда $|x_n - x| < \varepsilon = f_k(x)/2$ при достаточно больших n (далее мы будем рассматривать только такие n). Если $y \in M$, $|y - x| < \varepsilon$, то $\varepsilon < f_k(y) < 3\varepsilon$ и согласно (5) $\text{Lip}[\varphi g_{k,m}](y) \leq c = m3^{m-1}\varepsilon^{-m-1} + \varepsilon^{-m}$. Тогда в силу (7) $|\langle \hat{x} - \hat{x}_n, \varphi g_{k,m} \rangle| \leq c|x_n - x|$. Значит, $\|\hat{x}_n - \hat{x}\|_{k,m} \leq c|x_n - x|$ и $\hat{x}_n$ сходится к $\hat{x}$ в (E_M, τ) .

ЛЕММА 3. Пусть $\xi \in E_M$, $n, k, m \in \mathbb{Z}_+$ и $n \geq k$. Тогда $\|\xi\|_{k,m} \leq (4m+2)\|\xi\|_{n,m+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $b: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $b(z) = 0$ при $f_k(z) = 0$ и $b(z) = f_n^{m+1}(z)f_k^{-m}(z)$ при $f_k(z) \neq 0$. В силу (5) $b \in \mathcal{L}$ и $p(b) \leq 2m + 1$. Требуемое неравенство теперь следует из леммы 1 с $a = 1$, $f = g_{k,m}$, $g = g_{n,m+1}$.

Пусть $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $h(z) = z$ при $|z| < 1$ и $h(z) = z/|z|$ при $|z| \geq 1$. Очевидно, $h \in \mathcal{L}$ и $p(h) = 1$.

ЛЕММА 4. Пусть $\xi \in E_M$ и $k, m \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $\|T_h \xi\|_{k,m} \leq 2\|\xi\|_{k,m}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно применить лемму 1 с $b = a = h$ и $f = g = g_{k,m}$.

ЛЕММА 5. Пусть $k, n, m \in \mathbb{Z}_+$, $z \in A_k$, $n \geq k$. Тогда оператор $(T_h - zI): E_M \rightarrow E_M$ биективен и $\|(T_h - zI)^{-1}\xi\|_{n,m} \leq 6\|\xi\|_{n,m+2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a: M \rightarrow \mathbb{C}$, $a(x) = (x - z)^{-1}$. В силу (8)

$$(T_h - zI)Ta = Ta(T_h - zI) = I.$$

Следовательно, оператор $T_h - zI$ обратим с обратным Ta . Пусть $b: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $b(x) = f_n^2(x)/(x - z)$ при $x \neq z$, $b(z) = 0$. В силу (5) $\text{Lip}[b](x) \leq (2f_n(x)|x - z| + f_n^2(x))|x - z|^{-2}$ при $x \neq z$. Учитывая, что $z \in A_k \subseteq A_n$, получаем неравенство $f_n(x) \leq |x - z|$. Значит, $\text{Lip}[b](x) \leq 3$. Кроме того, $b(x) \leq f_n(x) \leq 1$. Следовательно, $b \in \mathcal{L}$ и $p(b) \leq 3$. Требуемое неравенство следует из леммы 1 с $f = g_{n,m}$, $g = g_{n,m+2}$.

ЛЕММА 6. Для всякого непустого ограниченного множества $M \subseteq \mathbb{C}$ типа G_δ существуют сепарабельное ПФ X и ЛНО $T: X \rightarrow X$ такие, что $\sigma(T) = M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $\sup\{|z| : z \in M\} < 1$. Пусть X – пополнение метризуемого локально выпуклого пространства (E_M, τ) . По лемме 2 ПФ X сепарабельно как замыкание линейной оболочки сепарабельного множества $\{\hat{x} : x \in M\}$. По лемме 4 оператор $T_h: E_M \rightarrow E_M$ непрерывен и, следовательно, продолжается до ЛНО $T: X \rightarrow X$. Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus M$, $k, m \in \mathbb{Z}_+$. Выберем $n \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $z \in A_n$. Биективность оператора $(T_h - zI): E_M \rightarrow E_M$ следует из того, что $h(x) - z \neq 0$ при всех $x \in M$. Пусть $\xi \in E_M$. Согласно лемме 3

$$\|(T_h - zI)^{-1}\xi\|_{k,m} \leq (4m + 2)\|(T_h - zI)^{-1}\xi\|_{l,m+1},$$

где $l = \max\{k, n\}$. Согласно лемме 5 $\|(T_h - zI)^{-1}\xi\|_{l,m+1} \leq 6\|\xi\|_{l,m+3}$. Из последних двух неравенств получаем $\|(T_h - zI)^{-1}\xi\|_{k,m} \leq 12(2m + 1)\|\xi\|_{l,m+3}$. Таким образом, оператор $(T_h - zI)^{-1}: E_M \rightarrow E_M$ непрерывен и, значит, продолжается до ЛНО $S: X \rightarrow X$. Операторы $S(T - zI)$ и $(T - zI)S$ действуют тождественно на плотном множестве E_M . Значит, $S(T - zI) = (T - zI)S = I$ и $z \notin \sigma(T)$. Таким образом, $\sigma(T) \subseteq M$. Если же $x \in M$, то в силу (7) $T\hat{x} = T_h\hat{x} = h(x)\hat{x} = x\hat{x}$. Поэтому $x \in \sigma(T)$. Следовательно, $\sigma(T) = M$.

Перейдем к доказательству теоремы 2.

Случай 1. Множество $A = \emptyset$. Пространство $X = \{\varphi \in C^\infty[0, 1] : f^{(j)}(0) = 0 \text{ при всех } j \geq 0\}$ с топологией равномерной сходимости всех производных является [7] бесконечномерным сепарабельным ПФ, причем оператор дифференцирования $T(f) = f'$ непрерывен и имеет пустой спектр.

Случай 2. Множество A непусто и конечно. Надо взять прямую сумму оператора из случая 1 и оператора на конечномерном пространстве со спектром A .

Случай 3. Множество A бесконечно. Представим A в виде объединения последовательности A_n ограниченных непустых множеств типа G_δ . По лемме 6 для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется сепарабельное ПФ X_n и ЛНО T_n такие, что $\sigma(T_n) = A_n$. Пусть $X = \prod_{n=1}^\infty X_n$, $T: X \rightarrow X$, $(Tx)_n = T_n x_n$. Тогда X – бесконечномерное сепарабельное ПФ и оператор T непрерывен. Легко видеть, что $\sigma(T) = \bigcup_{n=1}^\infty A_n = A$.

4. Нерешенные проблемы. Существует ряд нерешенных проблем, связанных с темой этой работы. Перечислим некоторые из них.

ПРОБЛЕМА 1. Можно ли избавиться от требования сепарабельности в теореме 1?

ПРОБЛЕМА 2 (Е. А. Горин). Пусть X – такое ПФ, что спектр любого ЛНО на X ограничен. Верно ли, что пространство X нормируемо?

ПРОБЛЕМА 3. Пусть $A \subseteq \mathbb{C}$ – множество типа $G_{\delta\sigma}$. Существует ли ядерное [7] ПФ X и ЛНО T на X такие, что $\sigma(T) = A$?

Автор благодарен О. Г. Смолянову и А. И. Штерну за внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.
2. Данфорд Н., Шварц Т. Линейные операторы. Т. 1. М.: Мир, 1962.
3. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
4. Slodowski S. // Proc. Roy. Soc. Edinb. Sect. 1981. V. 90. № 3–4. P. 257–261.
5. Lien P., Wong M. W. // Math. Japon. 1995. V. 41. № 1. P. 169–173.
6. Wong M. W. // Math. Japon. 1993. V. 38. № 4. P. 719–722.
7. Пич А. Ядерные локально выпуклые пространства. М.: Мир, 1969.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: stas@graal.math.msu.su

Поступило
08.04.1999
Исправленный вариант
21.07.2000