Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Карпушкин, Число компонент дополнения к гипер-
поверхности уровня частично параболического полинома,
Матем. заметки, 2001, том 69, выпуск 5, 798–800

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm694>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 17:24:29

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ЧИСЛО КОМПОНЕНТ ДОПОЛНЕНИЯ К ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ УРОВНЯ ЧАСТИЧНО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА

В. Н. Карпушкин

Известно, что число компонент дополнения ко множеству нулей полинома степени m в $\mathbb{R}^n$ не превосходит $m^n + O(m^{n-1})$ (см. [1]). В настоящей работе рассматриваются l -параболические полиномы F в $\mathbb{R}^n$, т.е. такие, которые удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 F}{\partial x_l^2}, \quad n \geq 3, \quad 2 \leq l \leq n,$$

– уравнению теплопроводности по части переменных. Показано, что число компонент дополнения к гиперповерхности уровня полинома F не превосходит $2m^{n-1} + O(m^{n-2})$. Получена оценка сверху на число компонент связности гиперповерхности уровня полинома F . Данная работа является обобщением и усилением работы [2].

1. Формулировка результатов. Обозначим через $\dim H_i(A, Z_2)$ размерность группы $H_i(A, Z_2)$. Обозначим через $H_*(A)$ прямую сумму всех групп гомологий множества A с коэффициентами в группе Z_2 , $\dim H_*(A) = \sum_i \dim H_i(A, Z_2)$. Для групп гомологий группа коэффициентов Z_2 , но в дальнейшем не будем это указывать.

Пусть W_b – гиперповерхность уровня b для l -параболического полинома F степени m в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$).

Пусть V – регулярное пересечение квадрики и гиперповерхности степени m в $\mathbb{CP}^n$ ($n \geq 3$). Сумма чисел Бетти для V с коэффициентами в Z_2 , т.е. $\dim H_*(V)$, зависит только от m, n и равна $2m^{n-1} + O(m^{n-2})$ (см. [1]).

ТЕОРЕМА 1. Для всех b $\dim H_0(\mathbb{R}^n \setminus W_b) \leq \dim H_*(V)$.

ТЕОРЕМА 2. Предположим, что множество особых точек гиперповерхности W_b компактно. Тогда $\dim H_0(\mathbb{R}^n \setminus W_b) \leq 1 + \dim H_*(V)/2$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть гиперповерхность W_b содержит конечное число особых точек полинома F . Тогда $\dim H_0(W_b) + 1 \leq \dim H_0(\mathbb{R}^n \setminus W_b)$.

СЛЕДСТВИЕ (из теорем 2 и 3). Пусть гиперповерхность W_b содержит конечное число особых точек полинома F . Тогда $\dim H_0(W_b) \leq \dim H_*(V)/2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В настоящей работе используются теоремы алгебраической геометрии и принцип максимума для решения параболического уравнения (см. [3]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $F = \sum_j P_j(x_1, \dots, x_l) f_j(x_{l+1}, \dots, x_n)$, где P_j – полином от $x_1, \dots, x_l$, f_j – полином от $(x_{l+1}, \dots, x_n)$, то F будет l -параболическим, если все P_j – параболические полиномы. Обратное неверно.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта NWO–РФФИ.

2. Доказательство результатов. Докажем сначала теорему 1. Пусть S_r^{n-1} – сфера радиуса r в $\mathbb{R}^n$ с центром в 0.

ЛЕММА 1. Пусть F – полином в $\mathbb{R}^l = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^{l-1}$,

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 F}{\partial x_l^2}, \quad l \geq 2.$$

Пусть W_b – гиперповерхность уровня b полинома F в $\mathbb{R}^l$. Тогда множество $\mathbb{R}^l \setminus W_b$ не содержит ограниченных компонент.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A – связная компонента множества $\mathbb{R}^l \setminus W_b$. Предположим, что A ограничено, и получим противоречие. В силу непрерывности F множество W_b замкнуто и, следовательно, A открыто. Предположим для определенности, что $F(x) > b$ для всех $x \in A$.

Пусть $M = \{x \in A : F(x) = \sup_{y \in A} F(y)\}$. Заметим, что множество M замкнуто и ограничено в силу ограниченности множества A . Таким образом, M компактно.

Пусть $t_1 = \inf\{t : (t, x) \in M\}$. Пусть $\Omega = \{(t, x) \in M : t = t_1\}$. В силу компактности множества M имеем: множество Ω непусто и компактно.

Каждая компонента связности ω множества Ω замкнута в силу непрерывности F и ограничена в силу того, что A ограничено и, таким образом, ω – компактное множество. Этих компонент связности конечное число в силу того, что F – полином (см. [1]).

Рассмотрим фиксированную компоненту связности ω множества Ω . Тогда существует связная окрестность C множества ω в плоскости $\{(t, x) \in \mathbb{R}^l : t = t_1\}$ такая, что если $\overline{C}$ – замыкание C , то $\overline{C} \subset A$ и $\overline{C} \cap \Omega = \omega$. Заметим, что $\overline{C}$ – компакт, и поэтому существует t_0 такое, что $t_0 < t_1$, $[t_0, t_1] \times \overline{C} \subset A$. Из выбора C следует, что F достигает в цилиндре $[t_0, t_1] \times \overline{C}$ строгого максимума строго на ω . Мы получили противоречие с принципом максимума для параболических уравнений (см. [3]).

СЛЕДСТВИЕ. Пусть F – l -параболический полином в $\mathbb{R}^n$, $2 \leq l \leq n$, W_b – гиперповерхность уровня b полинома F в $\mathbb{R}^n$. Тогда множество $\mathbb{R}^n \setminus W_b$ не имеет ограниченных компонент. Таким образом, для всякого b существует r_0 такое, что при $r_0 \leq r$ имеем

$$\dim H_0(\mathbb{R}^n \setminus W_b) \leq \dim H_0(S_r^{n-1} \setminus W_b).$$

ЛЕММА 2. Для всех $b \in \mathbb{R}$, $r > 0$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $W_{b \pm \varepsilon} \cap S_r^{n-1}$ – неособые многообразия или пустые множества и

$$\dim H_0(S_r^{n-1} \setminus W_b) \leq \dim H_0(W_{b+\varepsilon} \cap S_r^{n-1}) + \dim H_0(W_{b-\varepsilon} \cap S_r^{n-1}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2 следует из конечности числа критических значений у сужения полинома F на сферу S_r^{n-1} , $r > 0$. Последнее вытекает из следствия 2.8 работы [4].

Таким образом, из теоремы Смита (см. [1]) и двойственности Пуанкаре получаем

$$\dim H_0(S_r^{n-1} \setminus W_b) \leq \dim H_*(V).$$

Отсюда и из следствия из леммы 1 следует теорема 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Из следствия 2.8 работы [4] получим: для всякого b существует r_0 такое, что при $r_0 \leq r$ множество $W_b \cap S_r^{n-1}$ есть регулярное пересечение. Теперь из двойственности Александра имеем

$$\dim H_{n-2}(S_r^{n-1} \cap W_b) + 1 = \dim H_0(S_r^{n-1} \setminus W_b).$$

Из двойственности Пуанкаре имеем

$$\begin{aligned} \dim H_{n-2}(S_r^{n-1} \cap W_b) &= \dim H_0(S_r^{n-1} \cap W_b), \\ \dim H_0(S_r^{n-1} \cap W_b) &= \dim H_0(S_r^{n-1} \setminus W_b) - 1. \end{aligned}$$

Из теоремы Смита и двойственности Пуанкаре имеем $\dim H_0(S_r^{n-1} \cap W_b) \leq \dim H_*(V)/2$. Теперь из следствия из леммы 1 данной работы получим $\dim H_0(\mathbb{R}^n \setminus W_b) \leq \dim H_0(S_r^{n-1} \setminus W_b)$. Таким образом, имеем

$$\dim H_0(\mathbb{R}^n \setminus W_b) \leq \dim H_0(S_r^{n-1} \setminus W_b) = 1 + \dim H_0(S_r^{n-1} \cap W_b) \leq 1 + \frac{1}{2} \dim H_*(V).$$

Теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Из принципа максимума для параболических полиномов и конечности множества особых точек полинома F на W_b следует, что F не имеет компонент связности, состоящих из особых точек. Итак, каждая компонента связности множества W_b содержит неособые точки и поэтому (см. [5]) будет иметь хотя бы один $(n-1)$ -мерный цикл в гомологиях с коэффициентами в Z_2 . Размерность группы $(n-1)$ -мерных гомологий W_b с коэффициентами в Z_2 будет, таким образом, не меньше, чем число компонент связности W_b . Однако группа 0-мерных гомологий дополнений к гиперповерхности, приведенная по модулю точки, двойственна согласно Александру к группе $H_{n-1}(W_b, Z_2)$. Отсюда имеем $\dim H_0(W_b) + 1 \leq \dim H_0(\mathbb{R}^n \setminus W_b)$.

Автору неизвестно, точны ли по порядку, т.е. по степени числа m , полученные в работе оценки.

Автор благодарен А. С. Калашникову и В. А. Васильеву за полезные обсуждения, а также рецензенту за ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гудков Д. А. // УМН. 1974. Т. 29. № 4. С. 3–79.
2. Карпушкин В. Н. // Докл. РАН. 1994. Т. 337. № 4. С. 437–438.
3. Олейник О. А. Лекция об уравнениях в частных производных. Т. 1. М.: Изд-во МГУ, 1976.
4. Милнор Дж. Особые точки комплексных гиперповерхностей. М.: Мир, 1971.
5. Borel A., Haefliger A. // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1958. V. 2. P. 49–96.

Институт проблем передачи информации РАН

Поступило

24.12.1999

Исправленный вариант

19.09.2000