Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. П. Власов, Бикомпакт “две стрелки Александра” и теория приближений, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 6, 820–827

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm696>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 13:17:49

УДК 517.982.256+513.83

БИКОМПАКТ “ДВЕ СТРЕЛКИ АЛЕКСАНДРОВА” И ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Л. П. Власов

Построен бикомпакт $\tilde{Q}$, аналогичный бикомпакту, известному как “две стрелки Александра”. Показано, что в вещественном пространстве $C(\tilde{Q})$ не существует чебышевских подпространств конечной коразмерности > 1 , но они существуют в комплексном $C(\tilde{Q})$.

Библиография: 10 названий.

Статья примыкает к исследованиям [1]–[6] и непосредственно продолжает работу автора [7].

Множество M в нормированном пространстве X называется *чебышевским*, если для любого $x \in X$ множество элементов наилучшего приближения

$$P_M x = \{y \in M : \|x - y\| = d(x, M)\}$$

одноточечно.

Вопрос о характеристизации бикомпактов Q , для которых в $C(Q)$ существуют чебышевские подпространства конечной коразмерности, изучается с 60-х гг. Гаркави [2], [3] охарактеризовал компакты (метризуемые бикомпакты), для которых в вещественном пространстве $C(Q)$ существуют такие подпространства, и привел нетривиальные примеры бикомпактов, имеющих (и не имеющих) это свойство. Характеризацию бикомпактов осуществил Браун [4]. Ключевую роль при этом сыграл бикомпакт “две стрелки Александра”, на котором возможно продолжение функции типа $(f(t) - z)/|f(t) - z|$ ($f \in C(Q)$, $z \in \mathbb{R}$) с множества $\{t: f(t) \neq z\}$ до непрерывной функции. В настоящей работе строится бикомпакт $\tilde{Q}$ с таким же свойством в комплексном случае. Ранее в [7] автор доказал, что если в вещественном $C(Q)$ существуют чебышевские подпространства коразмерности $n > 1$, то они существуют и в комплексном $C(Q)$ для того же Q . В данной заметке устанавливается, что обратное утверждение неверно для $C(\tilde{Q})$. Доказывается также теорема о характеристизации бикомпактов Q , для которых в $C(Q)$ существуют чебышевские подпространства конечной коразмерности > 1 .

В дальнейшем Q – бесконечный бикомпакт, $C(Q)$ – комплексное [вещественное] пространство непрерывных комплексных [вещественных] функций на Q с обычной нормой;

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 96-01-00121 и № 99-01-00460.

$C(Q)^*$ – пространство комплексных [вещественных] мер Радона на Q , $\|\mu\| = |\mu|Q = \text{var}(\mu, Q)$; $S_\mu = \{t \in Q : |\mu|G > 0 \text{ для любого открытого } G \ni t\}$; $Q'[I]$ – множество предельных [изолированных] точек бикомпакта Q ; ∂A – граница, $\overset{\circ}{A}$ – внутренность, $|A|$ – мощность множества A .

Мы применяем следующие обозначения: $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел, $\mathbb{S} \subset \mathbb{C}$ – единичная окружность $|z| = 1$. Через $\tilde{\mathbb{C}}$ будем обозначать комплексную плоскость, дополненную “бесконечно удаленными точками” вида $\infty w = \infty \cdot w$, где $w \in \mathbb{S}$. (Символ ∞ означает $+\infty$ расширенной вещественной прямой.) Предполагается, что $z_n \rightarrow \infty w$, если $|z_n| \rightarrow \infty$, $z_n/|z_n| \rightarrow w$, $\infty w_n \rightarrow \infty w$ при $w_n \rightarrow w$, $(\infty w) \cdot 0 = 0$, $\infty \cdot 0 = 0$. (Равенства используются при интегрировании.) Пространство $\tilde{\mathbb{C}}$ – бикомпактное расширение $\mathbb{C}$ – гомеоморфно “диску” $\mathbb{D} = \{z : |z| \leq 1\}$.

Нужные нам в дальнейшем свойства производной Радона–Никодима собраны в лемме 1 (см. [8, гл. III, п. 10], а также [7, лемма 1]).

ЛЕММА 1. Пусть Q – бикомпакт, $\mu, \nu, \lambda \in C(Q)^*$, $d\mu/d\nu = f$, т.е. $\mu e = \int_e f(t) d\nu$ для любого борелевского множества $e \subset Q$. Тогда $|\mu|e = \int_e |f(t)| d|\nu|$; $d\nu/d\mu = 1/f$ на $\{t \in S_\nu : f(t) \neq 0\}$; если $d\nu/d\lambda = \varphi$, то $d\mu/d\lambda = d\mu/d\nu \cdot d\nu/d\lambda = f\varphi$, т.е. $\mu e = \int_e f d\nu = \int_e f\varphi d\lambda$. Если $h = d\mu/d|\mu|$, то $|h(t)| = 1$ μ -почти всюду. Если $g \in C(Q)$, $\|g\| \leq 1$, то $|\mu|Q = \int_Q g(t) d\mu$ тогда и только тогда, когда $g = d|\mu|/d\mu$.

Нам понадобится ряд теорем, доказанных в [7].

ТЕОРЕМА 1 [7, теорема 2]. Для того чтобы подпространство L коразмерности n в комплексном или вещественном $C(Q)$ было чебышевским множеством, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

- (1а) для любой меры $\mu \in L^\perp$ существует непрерывная производная Радона–Никодима $d\mu/d|\mu|$;
- (1б) $|Q \setminus S_\mu| < n$ для всех $\mu \in L^\perp \setminus \{0\}$;
- (1в) любые меры $\mu, \nu \in L^\perp \setminus \{0\}$ взаимно абсолютно непрерывны на Q' ;
- (1г) если $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ – базис в $L^\perp$, $I = Q \setminus Q' = \{t_1, t_2, \dots, t_r\}$ и $r < n$, то $\text{rank} \|\mu_i\{t_k\}\|_{k \leq r}^{i \leq n} = r$.

В вещественном случае аналогичную теорему ранее установил Гаркави [2], другие варианты см. также у Брауна [4].

СЛЕДСТВИЕ 1. Если множество L чебышевское, то $Q = \bigcup_{\lambda \in L^\perp} S_\lambda$ и существует $\nu \in L^\perp$ с $S_\nu = Q$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для того чтобы подпространство

$$L = \{\nu\}_\perp = \left\{x \in C(Q) : \int_Q x d\nu = 0\right\}$$

коразмерности 1 в комплексном или вещественном $C(Q)$ было чебышевским множеством, необходимо и достаточно, чтобы существовала непрерывная производная Радона–Никодима $d\nu/d|\nu|$ и выполнялось условие $S_\nu = Q$.

Следующая теорема представляет собой незначительную переформулировку теоремы 5 из [7]. Здесь и далее используется обозначение

$$N_{z,f} = \{t \in Q : f(t) = z\}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad f \in C(Q, \tilde{\mathbb{C}}).$$

ТЕОРЕМА 2 [7, теорема 5]. Пусть $\mu, \nu \in C(Q)^*$ линейно независимы и $S_\nu = Q$. Для того чтобы подпространство $L = \{\mu, \nu\}_\perp$ в комплексном или вещественном $C(Q)$ было чебышевским множеством, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

- (2а) существуют производные Радона–Никодима $d\nu/d|\nu| \in C(Q)$, $f = d\mu/d\nu \in C(Q, \tilde{\mathbb{C}})$;
- (2б) $|Q \setminus S_\mu| \leq 1$;
- (2в) $|N_{z,f}| \leq 1$ для всех $z \in \mathbb{C}$;
- (2г) $|\nu|(\partial N_{z,f}) = 0$ для всех $z \in \mathbb{C}$;
- (2д) для любого $z \in \mathbb{C}$ функция $(f(t) - z)/|f(t) - z|$, определенная в точках $t \in Q \setminus N_{z,f}$, продолжается до функции $\psi_z \in C(Q)$.

Условие $S_\nu = Q$ не ограничивает общности в силу следствия 1. В случае $f(t) = \infty w$ естественно считать, что $\psi_z(t) = (f(t) - z)/|f(t) - z| = w$, причем независимо от условия (2д) ψ_z непрерывна на $Q \setminus N_{z,f}$, если $f \in C(Q, \tilde{\mathbb{C}})$.

ТЕОРЕМА 3 [7, теорема 6]. Пусть бикомпакт Q , мера $\nu \in C(Q)^*$ и функция $f \in C(Q, \tilde{\mathbb{C}})$ таковы, что

- (3а) $S_\nu = Q$;
- (3б) $d\nu/d|\nu| \in C(Q)$;
- (3в) для любого $z \in \mathbb{C}$ множество $N_{z,f} = I_z \cup B_z$, где $I_z = I \cap N_{z,f}$ пусто или состоит из одной точки, а $|\nu|B_z = 0$ (это условие эквивалентно конъюнкции условий (2в) и (2г));
- (3г) для любого $z \in \mathbb{C}$ функция $(f(t) - z)/|f(t) - z|$, определенная в точках $t \in Q \setminus N_{z,f}$, продолжается до функции $\psi_z \in C(Q)$;
- (3д) $\int_Q |f(t)|^{n-1} d|\nu| < \infty$.

Тогда если определить меры равенствами $\mu_i e = \int_e f(t)^{i-1} d\nu$ для любого борелевского множества e ($i = 1, \dots, n$), то подпространство

$$L = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}_\perp = \left\{ x \in C(Q) : \int_Q x d\mu_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \right\}$$

является чебышевским.

Определим бикомпакт $\tilde{Q}$ следующим образом. Пусть

$$A = \tilde{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{C} = \{\infty w : w \in \mathbb{S}\}, \quad \tilde{Q} = (\mathbb{C} \times \mathbb{S}) \cup A, \quad \mathbb{C}_s = \mathbb{C} \times \{s\}, \quad s \in \mathbb{S}.$$

Базу окрестностей точки $t \in \tilde{Q}$ определим так: если $\varepsilon, \alpha > 0$, то положим

$$O_{\varepsilon\alpha}(z_0, s_0) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon, \left| \frac{z - z_0}{|z - z_0|} - s_0 \right| < \alpha \right\},$$

$$A_\alpha(z_0, s_0) = \{(z_0, s) : |s - s_0| < \alpha\},$$

$$O_{\varepsilon\alpha}(\infty w) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| > 1/\varepsilon, \left| \frac{z}{|z|} - w \right| < \alpha \right\},$$

$$A_\alpha(\infty w) = \{\infty v : v \in \mathbb{S}, |v - w| < \alpha\},$$

$$W_{\varepsilon\alpha}(t) = (O_{\varepsilon\alpha}(t) \times \mathbb{S}) \cup A_\alpha(t).$$

Нетрудно проверить, что для любой точки $\tau \in W_{\varepsilon\alpha}(t)$ существуют ε', α' такие, что $W_{\varepsilon'\alpha'}(\tau) \subset W_{\varepsilon\alpha}(t)$. Поэтому для любых $\varepsilon, \alpha, \varepsilon', \alpha' > 0$, $\tau \in W_{\varepsilon\alpha}(t) \cap W_{\varepsilon'\alpha'}(t)$ существуют ε'', α'' такие, что $W_{\varepsilon''\alpha''}(\tau) \subset W_{\varepsilon\alpha}(t) \cap W_{\varepsilon'\alpha'}(t)$. В силу [9, глава 1, теорема 11] множества $W_{\varepsilon\alpha}(t)$, $\varepsilon, \alpha > 0$, $t \in \tilde{Q}$, образуют базу открытых множеств. Поскольку ε, α можно брать рациональными, $\tilde{Q}$ – пространство с первой аксиомой счетности. Следовательно, топология в $\tilde{Q}$ определяется сходящимися последовательностями [9, глава 2, теорема 8]. Легко видеть, что

1) $t_n = (z_n, s_n) \rightarrow t_0 = (z_0, s_0)$, если

$$\begin{aligned} z_n \rightarrow z_0, \quad \frac{z_n - z_0}{|z_n - z_0|} \rightarrow s_0 \quad & \text{в случае } z_n \neq z_0, \\ s_n \rightarrow s_0 \quad & \text{в случае } z_n \equiv z_0; \end{aligned}$$

2) $(z_n, s_n) \rightarrow \infty w$, если

$$|z_n| \rightarrow \infty, \quad \frac{z_n}{|z_n|} \rightarrow w;$$

3) $\infty w_n \rightarrow \infty w$, если $w_n \rightarrow w$.

Те же соотношения верны и для направленности t_α (n заменяется на α). В дальнейшем топологию $\tilde{Q}$ будем обозначать через θ . Через θ_0 обозначим обычную топологию в $\mathbb{C}$, $\mathbb{S}$, топологию произведения $\mathbb{C} \times \mathbb{S}$ и топологию в $\tilde{Q}$, совпадающую с θ_0 в $\mathbb{C} \times \mathbb{S}$ и с θ в A .

Нетрудно показать, что $\tilde{Q}$ хаусдорфово и что каждая направленность имеет θ -сходящуюся поднаправленность, поэтому $\tilde{Q}$ – бикомпакт.

Бикомпакт “две стрелки Александрова” топологически содержится в $\tilde{Q}$. Например, множество

$$\{(z, s) : z \in [0, 1], s = 1\} \cup \{(z, s) : z \in (0, 1], s = -1\}$$

гомеоморфно этому бикомпакту.

ЛЕММА 2. *Пространство $\tilde{Q}$ – связный бикомпакт.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что существует открыто-замкнутое множество F в $\tilde{Q}$, непустое и отличное от $\tilde{Q}$. Так как для любого $z \in \mathbb{C}$ топология θ совпадает с θ_0 на $\{z\} \times \mathbb{S}$, все такие “окружности” θ -связны. Отсюда $\bigcup_{z \in F} (\{z\} \times \mathbb{S}) \subset F$ и $\mathbb{C}_s \cap F \neq \emptyset$ для всех $s \in \mathbb{S}$. Тогда $\mathbb{C}_s \cap F$ θ_0 -замкнуто относительно $\mathbb{C}_s$: если $(z_n, s) \in F$ и $\theta_0\text{-}\lim(z_n, s) = (z, s)$, то можно считать, что $(z_n - z)/|z_n - z| \rightarrow s_0 \in \mathbb{S}$; поэтому $\theta\text{-}\lim(z_n, s) = (z, s_0)$, следовательно, $(z, s_0) \in F$ и по доказанному $(z, s) \in F$. Аналогично, $\mathbb{C}_s \cap (Q \setminus F)$ θ_0 -замкнуто, что, очевидно, противоречит θ_0 -связности $\mathbb{C}_s$.

ТЕОРЕМА 4. *В комплексном $C(\tilde{Q})$ существуют чебышевские подпространства L любой конечной коразмерности $n > 1$. В вещественном $C(\tilde{Q})$ таких подпространств не существует.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся теоремой 3. Пусть m – мера Лебега на $\mathbb{S}$, m_2 – двумерная мера Лебега на $\mathbb{C}$. Чтобы построить меру ν , рассмотрим положительную на $\mathbb{C}$ и быстро убывающую на бесконечности функцию ρ такую, что

$$\int_{\mathbb{C}} |z|^{n-1} \rho(z) dm_2(z) < \infty,$$

и положим $\nu_1(e) = \int_e \rho \, dm_2$ для любого борелевского множества $e \subset \mathbb{C}$. На $\tilde{Q}$ зададим меру ν , положив $|\nu|A = 0$, $\nu = \nu_1 \times m$ на $\mathbb{C} \times \mathbb{S}$. Тогда $\nu \in C(\tilde{Q})^*$, $S_\nu = \tilde{Q}$, $d\nu/d|\nu| = 1 \in C(\tilde{Q})$ (т.е. выполняются условия (3а), (3б)).

Зададим функцию f :

$$f(z, s) = z \quad \forall (z, s) \in \mathbb{C} \times \mathbb{S}, \quad f(\infty w) = \infty w.$$

Нетрудно проверить, что $f \in C(\tilde{Q}, \tilde{\mathbb{C}})$. Далее, выполняется условие (3в), ибо для любого $z \in \mathbb{C}$ выполнены равенства

$$N_{z,f} = \{t \in \tilde{Q} : f(t) = z\} = \{z\} \times \mathbb{S}, \quad \nu(N_{z,f}) = \nu_1\{z\} \cdot m(\mathbb{S}) = 0.$$

Покажем, что выполнено условие (3г). Найдем функцию ψ_{z_0} ($z_0 \in \mathbb{C}$) такую, что в точках множества $Q \setminus N_{z_0,f}$ она задается соотношением

$$\psi_{z_0}(t) = \frac{f(t) - z_0}{|f(t) - z_0|} = \frac{z - z_0}{|z - z_0|}, \quad t = (z, s) \notin N_{z_0,f}, \quad \text{т.е. } z \neq z_0.$$

Продолжая ее по непрерывности, имеем

$$\psi_{z_0}(z_0, s_0) = \lim_{(z,s) \rightarrow (z_0,s_0)} \psi_{z_0}(z, s) = \lim_{(z,s) \rightarrow (z_0,s_0)} \frac{z - z_0}{|z - z_0|} = s_0.$$

Далее

$$\psi_{z_0}(\infty w) = \infty w.$$

Непрерывность ψ_{z_0} в точке ∞w_0 очевидна.

Покажем, что выполнено условие (3д). Рассмотрим

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{Q}} |f(t)|^{n-1} d|\nu| &= \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{S}} |f(z, s)|^{n-1} d(\nu_1 \times m) \\ &= \int_{\mathbb{S}} \left\{ \int_{\mathbb{C}} |f(z, s)|^{n-1} d\nu_1 \right\} dm = \int_{\mathbb{C}} |z|^{n-1} d\nu_1 \cdot m(\mathbb{S}) < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, по теореме 3 в комплексном $C(\tilde{Q})$ существуют подпространства конечной коразмерности $n > 1$. Однако, в вещественном $C(Q)$ в случае связного Q их, как показали Гаркави и Фелпс, не существует. В нашем изложении это можно получить из доказываемой ниже теоремы 5.

Добавим, что в $C(\tilde{Q})$ (и комплексном и вещественном) существуют чебышевские подпространства коразмерности 1, поскольку для ν выполняются условия следствия 2.

Дадим некоторую характеристику бикомпактов Q , для которых комплексное (или вещественное) $C(Q)$ содержит чебышевские подпространства конечной коразмерности.

ТЕОРЕМА 5. Пусть Q – бикомпакт, $n > 1$. Для того чтобы пространство $C(Q)$ (комплексное или вещественное) содержало чебышевское подпространство коразмерности n , необходимо и достаточно, чтобы существовали мера $\nu \in C(Q)^*$ и функция $g \in C(Q)$, удовлетворяющие условиям

$$(5a) \quad S_\nu = Q;$$

$$(5б) \quad d\nu/d|\nu| \in C(Q);$$

(5в) для любого $z \in \mathbb{C}$ множество $N_{z,g} = I_z \cup B_z$, где $I_z = I \cap N_{z,g}$ пусто или состоит из одной точки, а $|\nu|_{B_z} = 0$;

(5г) для любого $z \in \mathbb{C}$ функция $(g(t) - z)/|g(t) - z|$, определенная в точках $t \in Q \setminus N_{z,g}$, продолжается до функции $\psi_z \in C(Q)$.

(Условия (5а)–(5г) не зависят от n .)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Вначале покажем, что для чебышевского подпространства L коразмерности n существуют $\mu, \nu \in L^\perp$ такие, что $\{\mu, \nu\}_\perp$ – чебышевское подпространство коразмерности 2. Воспользуемся теоремой 1. Пусть $r = \min\{n, |I|\}$; отметим, что $r \leq n$, а I не более чем счетно. Возможны следующие два случая.

(I) $r = n \leq |I|$. Из пункта (1б) теоремы 1 следует, что для любых $t_1, t_2, \dots, t_n \in I$ и для любого базиса $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ в $L^\perp$ $\det \|\mu_i t_k\| \neq 0$. Возьмем $\nu \in L^\perp$ с $S_\nu = Q$ и любые $\tau_i, \tau_j \in I$. Пусть M_{ij} – подпространство мер μ из $L^\perp$, пропорциональных ν на $\{\tau_i, \tau_j\}$: $\mu\{\tau_i\}/\nu\{\tau_i\} = \mu\{\tau_j\}/\nu\{\tau_j\}$. Из неравенства $|\mu\{\tau\} - \mu'\{\tau\}| \leq \|\mu - \mu'\|$ следует, что M_{ij} замкнуто. Допустим, что $M_{ij} = L^\perp$. Это означает, что любая мера $\mu \in L^\perp$ пропорциональна ν на $\{\tau_i, \tau_j\}$. Пусть $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ – базис $L^\perp$, в котором $\mu_2 = \nu$, а $t_1, t_2, \dots, t_n$ – ряд изолированных точек, где $t_1 = \tau_i, t_2 = \tau_j$. Но тогда первые два столбца матрицы $\|\mu_i t_k\|$ линейно зависимы и $\det \|\mu_i t_k\| = 0$, что противоречит сказанному выше. Таким образом, M_{ij} отлично от $L^\perp$. Тогда $\bigcup_{i,j} M_{ij}$ – множество первой категории в $L^\perp$. Следовательно, в $L^\perp$ найдется μ , не пропорциональная ν ни на какой паре точек из I . Но это означает, что для $L' = \{\mu, \nu\}_\perp$ выполняется условие (1б) при $n = 2$. По теореме 1 L' – чебышевское подпространство.

(II) $r = |I| < n$; $I = \{t_1, t_2, \dots, t_r\}$. По следствию 1 существует $\nu \in L^\perp$ с $S_\nu = Q$. Если $r = 0$ или 1, возьмем любую меру $\mu \in L^\perp$, линейно независимую с ν . Тогда по теореме 1 $\{\mu, \nu\}_\perp$ – чебышевское подпространство. В общем случае из (1г) следует, что существуют меры $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r \in L^\perp$ с $\det \|\mu_i t_k\| \neq 0$. Поэтому существует $\mu \in L^\perp$ такая, что $\mu\{t_i\} = i\nu\{t_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, r$). Так как μ не пропорциональна ν ни на какой паре точек из I , это означает, что выполняется условие (1б) при $n = 2$. В силу $r \geq 2$ условие (1г) проверять не нужно, а условия (1а) и (1в) даны. Следовательно, $\{\mu, \nu\}_\perp$ – чебышевское подпространство.

Заметим теперь, что по теореме 2 и следствию 1 определяются мера ν , для которой выполняются условия (5а), (5б), и функция f , для которой (вместо функции g) выполняются (5в) и (5г). Покажем, что функцию $f \in C(Q, \tilde{\mathbb{C}})$ можно заменить функцией $g(t) = f(t)/(1 + |f(t)|)$, которая принадлежит $C(Q)$. Так как $g(t)/(1 - |g(t)|) = f(t)$, то для z' с $|z'| < 1$ и $z = z'/(1 - |z'|)$ имеем $N_{z',g} = N_{z,f}$, а для $|z'| \geq 1$ $N_{z',g} = \emptyset$. Это дает (5в).

Докажем (5г) для g . Для этого нужно показать, что в каждой точке $t_0 \in \partial N_{z',g}$

($|z'| < 1$) существует предел

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{g(t) - z'}{|g(t) - z'|}, \quad \text{где } t \rightarrow t_0, \quad t \notin N_{z',g},$$

или, что то же ввиду $N_{z',g} = N_{z_0,f}$, $z_0 = z'/(1 - |z'|)$, $f(t_0) = z_0$, предел

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{D}{|D|}, \quad \text{где } D = \frac{f(t)}{1 + |f(t)|} - \frac{z_0}{1 + |z_0|}.$$

Полагая $f(t) = z$, мы видим, что $z \rightarrow z_0$. Далее, в силу условия (5г) для функции f $(z - z_0)/|z - z_0| \rightarrow s_0$, где $s_0 \in \mathbb{S}$. Обозначим через B числитель дроби

$$\frac{z - z_0 - |z|z_0 + z|z_0|}{(1 + |z|)(1 + |z_0|)} = \frac{z}{1 + |z|} - \frac{z_0}{1 + |z_0|}.$$

Нам нужно доказать, что $B/|B|$ сходится, когда $z \rightarrow z_0$, $(z - z_0)/|z - z_0| \rightarrow s_0$. Имеем

$$\begin{aligned} z\bar{z} - z_0\bar{z}_0 &= z\bar{z} - z_0\bar{z} + z_0\bar{z} - z_0\bar{z}_0 = \bar{z}(z - z_0) + z_0(\overline{z - z_0}) \\ &= \bar{z}(z - z_0) + z_0(z - z_0) \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} = (z - z_0) \left[\bar{z} + z_0 \left(\frac{|z - z_0|}{z - z_0} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} B &= z - z_0 - |z|z_0 + z|z_0| - z_0|z_0| + z_0|z_0| = z - z_0 + (z - z_0)|z_0| - (|z| - |z_0|)z_0 \\ &= (z - z_0)(1 + |z_0|) - \frac{z_0}{|z| + |z_0|}(z\bar{z} - z_0\bar{z}_0) \\ &= (z - z_0) \left[1 + |z_0| - \frac{z_0}{|z| + |z_0|} \left(\bar{z} + \frac{z_0}{s^2} \right) \right], \end{aligned}$$

где $s = (z - z_0)/|z - z_0| \rightarrow s_0$. Обозначим выражение в квадратных скобках через E , тогда $B/|B| = sE/|E|$, E равно 1 при $z_0 = 0$, а при $z_0 \neq 0$ стремится к числу

$$1 + |z_0| - \frac{z_0}{2|z_0|} \left(\bar{z}_0 + \frac{z_0}{s_0^2} \right),$$

которое не равно 0, ибо

$$1 + |z_0| > |z_0| \geq \left| \frac{z_0}{2|z_0|} \left(\bar{z}_0 + \frac{z_0}{s_0^2} \right) \right|.$$

Таким образом, $B/|B|$ сходится и g удовлетворяет всем условиям теоремы 3.

Достаточность. В силу ограниченности функции g она удовлетворяет всем условиям теоремы 3. Таким образом, если в теореме 3 функцию f заменить на g , то получим чебышевское подпространство L коразмерности n .

Заметим, что в вещественном случае условия теоремы 5 по существу совпадают с условиями теоремы 2 Брауна [4]. Комплексный аналог его теоремы 3, дающий более глубокую характеристику бикомпактов, нам получить не удалось.

Автор выражает благодарность Е. Г. Пыткееву, указавшему на сходство построения бикомпакта с общей конструкцией Федорчука [10], и Н. И. Черных за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Phelps R. R. Čebyšev subspaces of finite codimension in $C(X)$ // Pacific J. Math. 1963. V. 13. № 2. P. 647–655.
- [2] Гаркави А. Л. Задача Хелли и наилучшее приближение в пространстве непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31. № 3. С. 641–656.
- [3] Гаркави А. Л. О компактах, допускающих чебышевские системы мер // Матем. сб. 1967. Т. 74 (116). № 2. С. 209–217.
- [4] Brown A. L. Chebyshev subspaces of finite codimension in spaces of continuous functions // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1978. V. 26. № 1. P. 99–109.
- [5] Власов Л. П. Аппроксимативные свойства подпространств конечной коразмерности в $C(Q)$ // Матем. заметки. 1980. Т. 28. № 2. С. 205–222.
- [6] Власов Л. П. Существование элементов наилучшего приближения в комплексном $C(Q)$ // Матем. заметки. 1986. Т. 40. № 5. С. 627–634.
- [7] Власов Л. П. Чебышевские подпространства конечной коразмерности в комплексном $C(Q)$ // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 2. С. 178–191.
- [8] Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. ИЛ: М., 1962.
- [9] Келли Дж. Л. Общая топология. М.: Наука, 1968.
- [10] Федорчук В. О бикомпактах с несовпадающими размерностями // Докл. АН СССР. 1968. Т. 182. № 2. С. 275–277.

Институт математики и механики УрО РАН
E-mail: leonid.vlasov@apprekat.imm.uran.ru

Поступило
26.07.1999