Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Гайсин, Максимальный член измененного ряда Дирихле, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 6, 828–842

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm697>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 18:25:07

УДК 517.53

МАКСИМАЛЬНЫЙ ЧЛЕН ИЗМЕНЕННОГО РЯДА ДИРИХЛЕ

А. М. Гайсин

Найден критерий того, чтобы логарифм максимального члена ряда Дирихле, абсолютно сходящегося в некоторой полуплоскости, на асимптотическом множестве был эквивалентен логарифму максимального члена его адамаровской композиции с любым другим рядом Дирихле из определенного класса.

Библиография: 8 названий.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ ($0 < \lambda_n \uparrow \infty$) – последовательность, удовлетворяющая условию

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln \lambda_n} = a < \infty. \quad (1)$$

Через $D_0(\Lambda)$ обозначим класс всех функций $F(s)$, представимых в полуплоскости $\Pi_0 = \{s : \operatorname{Re} s < 0\}$ рядами Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it), \quad (2)$$

сходящимися лишь в данной полуплоскости. Из условия (1) следует, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0.$$

Так что ряд (2) сходится в полуплоскости Π_0 абсолютно и равномерно, а его сумма $F(s)$ – аналитическая в Π_0 функция [1].

Наряду с рядом (2) введем в рассмотрение измененный ряд Дирихле

$$F^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n e^{\lambda_n s}, \quad (3)$$

где последовательность $\{b_n\}$ ($b_n \neq 0$ при $n \geq N$) удовлетворяет условию

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |b_n|}{\lambda_n} = 0. \quad (4)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00655.

Поскольку $F \in D_0(\Lambda)$, то [1]

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n} = 0.$$

Следовательно, с учетом (4) заключаем, что ряд (3) также сходится в полуплоскости Π_0 , причем абсолютно и равномерно, а его сумма $F^*(s)$ является аналитической в данной полуплоскости.

Заметим, что при условии (4) имеет смысл рассматривать также абсолютно сходящиеся в полуплоскости Π_0 ряды Дирихле

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n b_n^{-1} e^{\lambda_n s}.$$

Пусть $\mu(\sigma)$ и $\mu^*(\sigma)$ – максимальные члены рядов (2) и (3) соответственно, т.е.

$$\mu(\sigma) = \max_{n \geq 1} \{|a_n| e^{\lambda_n \sigma}\}, \quad \mu^*(\sigma) = \max_{n \geq 1} \{|a_n b_n| e^{\lambda_n \sigma}\}.$$

Через $\nu = \nu(\sigma)$ и $k = k(\sigma)$ в дальнейшем будем обозначать центральные индексы рядов (2) и (3), т.е.

$$\nu(\sigma) = \max\{n \geq 1 : |a_n| e^{\lambda_n \sigma} = \mu(\sigma)\}, \quad k(\sigma) = \max\{n \geq 1 : |a_n b_n| e^{\lambda_n \sigma} = \mu^*(\sigma)\}.$$

В статье исследуется вопрос: при каких условиях на последовательность $\{b_n\}$ при $\sigma \rightarrow 0-$ вдоль достаточно массивного множества $A \subset [-1, 0)$ имеет место следующее асимптотическое равенство

$$\ln \mu(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu^*(\sigma).$$

Напомним, что множество A называется *асимптотическим*, а его дополнение $e = [-1, 0) \setminus A$ – *исключительным*.

Пусть e – измеримое по мере Лебега m подмножество полуинтервала $[-1, 0)$. *Верхней и нижней плотностями* множества e (обозначаемыми De и de соответственно) называются величины

$$De = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow 0-} \frac{m(e \cap [\sigma, 0))}{|\sigma|}, \quad de = \underline{\lim}_{\sigma \rightarrow 0-} \frac{m(e \cap [\sigma, 0))}{|\sigma|}.$$

В дальнейшем подразумевается, что все исключительные множества представляют собой объединение счетного числа отрезков вида

$$[a_n, a'_n] \quad (-1 \leq a_1 < a'_1 \leq a_2 < a'_2 \leq \dots \leq a_n < a'_n \leq \dots < 0).$$

Пусть L – класс положительных, непрерывных и неограниченно возрастающих на $[0, \infty)$ функций. Через W обозначим подкласс функций $w = w(x)$ из L таких, что

$$\int_1^{\infty} \frac{w(x)}{x^2} dx < \infty.$$

Пусть $D(\Lambda)$ – класс всех целых функций $F(s)$, представимых абсолютно сходящимися во всей плоскости рядами Дирихле (2). Если

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \left(|b_n| + \frac{1}{|b_n|} \right) < \infty, \quad (5)$$

то ряд (3) также абсолютно сходится во всей плоскости, $F^* \in D(\Lambda)$.

В работе [2] установлена следующая

ТЕОРЕМА А. Пусть $\{b_n\}$ – некоторая последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию (5).

Для того чтобы для любой функции $F \in D(\Lambda)$ при $\sigma \rightarrow +\infty$ вне некоторого множества $e \subset [0, \infty)$ отрезков $[c_n, c'_n]$ ($0 \leq c_1 < c'_1 \leq c_2 < c'_2 \leq \dots \leq c_n < c'_n \leq \dots$) суммарной конечной длины имело место асимптотическое равенство

$$\ln \mu(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu^*(\sigma),$$

необходимо и достаточно, чтобы для некоторой функции $w \in W$ выполнялись оценки

$$|b_n| + \frac{1}{|b_n|} \leq e^{w(\lambda_n)} \quad (n \geq N). \quad (6)$$

Цель статьи – перенести этот результат на ряды Дирихле, сходящиеся лишь в полуплоскости Π_0 . В этой ситуации возникают серьезные трудности, связанные, в первую очередь, с оценкой размеров исключительных множеств $\{e\} \subset [-1, 0)$ при $\sigma \rightarrow 0-$. По этой причине обычно приходится требовать выполнения некоторой оценки снизу для максимального члена ряда (2) (см. например, в [3]–[5]). Кроме того, в дальнейшем мы будем рассматривать только те последовательности $\{b_n\}$, которые, по крайней мере, удовлетворяют условию (6). Это вызвано тем, что в нашей ситуации теоремы типа Бореля–Неванлинны содержательны лишь для мажорант w из класса W (см. [5, лемма 5]).

Пусть N – класс функций Φ , принадлежащих L и таких, что

- 1) $(\Phi(x)/x) \uparrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$;
- 2) $x\Phi(x) < \Phi(kx)$ при $x \geq x_0$, где k – некоторая постоянная.

Отметим, что класс N содержит сужения на полуось $[0, \infty)$ всех так называемых N -функций, удовлетворяющих Δ_3 -условию [6]. Примерами функций из N , в частности, являются e^x , e^{x^2} , e^{e^x} , $x^{\ln x}$ и т.д. Все эти функции растут быстрее любой степени x^n . Это не случайно, так как в силу условия 2) при $x \geq x_0 k^n$ выполнены неравенства [6]

$$\Phi(x) > \frac{x}{k} \Phi\left(\frac{x}{k}\right) > \frac{x^2}{k^3} \Phi\left(\frac{x}{k^2}\right) > \dots > \frac{x^n}{k^{n(n+1)/2}} \Phi\left(\frac{x}{k^n}\right) > \frac{\Phi(x_0)}{k^{n(n+1)/2}} x^n. \quad (7)$$

Каждой функции Φ из N поставим в соответствие ее обратную функцию φ . Тогда получим новый класс функций, обозначим его через N^{-1} . Таким образом, классы $N = \{\Phi\}$ и $N^{-1} = \{\varphi\}$ состоят из взаимно обратных функций. Заметим (это следует из условия 1)), что если $\varphi \in N^{-1}$, то $(\varphi(t)/t) \downarrow 0$ при $t \uparrow \infty$.

Пусть φ – некоторая функция из L ; обозначим

$$W_\varphi = \{w : w \in W, \varphi(t)J(t; w) = o(1), t \rightarrow \infty\},$$

где

$$J(t; w) = \int_t^\infty \frac{w(x)}{x^2} dx.$$

И, наконец, пусть $\Phi \in N$,

$$\overline{D}_0(\Lambda, \Phi) = \left\{ F \in D_0(\Lambda) : \sup_{\tau > 0} \lim_{\sigma \rightarrow 0-} \frac{\ln \mu_F(\sigma)}{|\sigma| \Phi(\tau/|\sigma|)} > 0 \right\},$$

где $\mu_F(\sigma)$ – максимальный член ряда (2). В дальнейшем максимальный член этого ряда будем обозначать, как и прежде, через $\mu(\sigma)$.

Сформулируем теперь основной результат.

ТЕОРЕМА В. Пусть Φ – некоторая фиксированная функция из класса N .

Для того чтобы для любой функции $F \in \overline{D}_0(\Lambda, \Phi)$ при $\sigma \rightarrow 0-$ вне некоторого исключительного множества $e \subset [-1, 0)$ нулевой нижней плотности de имело место асимптотическое равенство

$$\ln \mu(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu^*(\sigma), \quad (8)$$

необходимо и достаточно, чтобы для некоторой функции $w \in W_\varphi$ выполнялись оценки

$$|b_n| + \frac{1}{|b_n|} \leq e^{w(\lambda_n)} \quad (n \geq N). \quad (9)$$

Здесь φ – функция, обратная к Φ .

Приведем следствие, вытекающее из теоремы В.

Пусть область сходимости степенного ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (10)$$

– единичный круг $D = \{z : |z| < 1\}$. Сделаем замену $z = e^s$. Тогда $F \in D_0(\Lambda)$, где $\Lambda = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$, а $F(s) = f(e^s)$ ($s = \sigma + it$).

Пусть $\Phi \in N$, а φ – функция, обратная к Φ . Поскольку $e^\sigma = |z| = r \rightarrow 1-$, $|\sigma| = |\ln r| = 1 - r + o(1 - r)$ при $\sigma \rightarrow 0-$, а $\varphi(2t) \leq 2\varphi(t)$, то классу $\overline{D}_0(\Lambda, \Phi)$ функций F будет соответствовать следующий класс:

$$\overline{K}(\Phi) = \left\{ f : \sup_{\tau > 0} \overline{\lim}_{r \rightarrow 1-} \frac{\ln \mu_f(r)}{(1-r)\Phi(\tau/(1-r))} > 0 \right\},$$

где f – функция, заданная в круге D рядом (10), а $\mu_f(r)$ – максимальный член этого ряда. Через $\mu_f^*(r)$ обозначим максимальный член измененного степенного ряда

$$f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n,$$

где $\{b_n\}$ ($b_n \neq 0$ при $n \geq N$) – любая последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию (6).

Если $e_1 \subset [0, 1)$ – образ множества $e \subset [0, 1)$ при отображении $r = e^\sigma$, то условие $de = 0$ означает, что $d'e_1 = 0$, где

$$d'e_1 = \lim_{r \rightarrow 1-} \frac{m(e_1 \cap [r, 1))}{1-r}.$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА С. Пусть Φ – некоторая фиксированная функция из класса N . Для того чтобы для любой функции $f \in \overline{K}(\Phi)$ при $r \rightarrow 1-$ вне некоторого исключительного множества $e_1 \subset [0, 1)$, $d'e_1 = 0$, выполнялось асимптотическое равенство

$$\ln \mu_f(r) = (1 + o(1)) \ln \mu_f^*(r),$$

необходимо и достаточно, чтобы для некоторой функции $w \in W_\varphi$ выполнялись оценки (9). Здесь φ – функция, обратная к Φ .

1. Вспомогательные результаты. Пусть L – класс функций, введенный выше, а H – подкласс L , состоящий из функций Φ , для которых

- а) $\varphi(2t) \leq a\varphi(t)$ ($0 < a < \infty$);
- в) $\varphi(t)t^{-1} \ln t = o(1)$, $t \rightarrow \infty$,

где φ – функция, обратная к Φ . Ясно, что $N \subset H$. Действительно, если $\Phi \in N$, то $\varphi(t_1)/t_1 > \varphi(t_2)/t_2$ при $t_1 < t_2$. Следовательно, $\varphi(2t) < 2\varphi(t)$. Условие в) немедленно следует из оценки (7) (если положить $n = 2$, видно, что $\varphi(t) = O(t^{1/2})$ при $t \rightarrow \infty$).

ЛЕММА 1. Пусть $u(t)$ – непрерывная, неубывающая на $[-1, 0)$ функция, $u(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0-$, причем для некоторой функции Φ из H выполняется условие

$$\lim_{t \rightarrow 0-} \frac{e^{u(t)}}{\Phi(1/|t|)} > 0. \quad (11)$$

Если для некоторой функции w из L имеет место асимптотика

$$\frac{\varphi(x)w(x)}{x} = o(1), \quad x \rightarrow \infty$$

(φ – функция, обратная к Φ), а $v = v(t)$ – решение уравнения

$$w(v) = e^{u(t)}, \quad (12)$$

то при $t \rightarrow 0-$ вне некоторого множества $e_1 \subset [-1, 0)$ нулевой нижней плотности de_1 имеет место асимптотика

$$\frac{w(v(t))}{v(t)|t|} = o(1). \quad (13)$$

Смысл условия (13) в том, что при $t \rightarrow 0-$ вне исключительного множества e_1 выполняется неравенство

$$t + \frac{w(v(t))}{v(t)} = t(1 + o(1)) < 0.$$

ЛЕММА 2. Пусть выполняется условие (11). Если φ – функция, обратная к Φ , а $w \in W_\varphi$, то при $t \rightarrow 0-$ вне некоторого множества $e_2 \subset [-1, 0)$, $de_2 = 0$, имеет место асимптотическое равенство

$$u(t + h(t)) = u(t) + o(1),$$

где $h(t) = w(v(t))/v(t)$, а $v = v(t)$ – решение уравнения (12).

Леммы 1 и 2 установлены в работе [5].

ЗАМЕЧАНИЕ. В [5] показано, что множество $e = e_1 \cup e_2$ имеет также нулевую нижнюю плотность, т.е. $de = 0$.

ЛЕММА 3. Пусть $\alpha = \alpha(t)$ – положительная, убывающая и непрерывная справа на луче $[a, \infty)$ ($0 < a < \infty$) функция, причем

$$\int_a^\infty \frac{\alpha(x)}{x^2} dx < \infty.$$

Если $\varphi \in L$, $\varphi(t)/t \downarrow$ при $t \uparrow$ и

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \varphi(t)J(t; \alpha) > 0, \quad J(t; \alpha) = \int_t^\infty \frac{\alpha(x)}{x^2} dx, \quad (14)$$

то существует подпоследовательность $\{t_{n_j}\}$ последовательности $\{t_n\}$ всех точек разрыва функции $\alpha(t)$ такая, что

$$\varphi(t_{n_j})J(t_{n_j}; \alpha) \geq d > 0 \quad (j \geq 1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (14) получаем, что для некоторой последовательности $\{\tau_j\}$ ($a < \tau_j \uparrow \infty$) имеет место оценка

$$\varphi(\tau_j)J(\tau_j; \alpha) \geq q > 0 \quad (j \geq 1). \quad (15)$$

Если $\tau_j \in [t_{n-1}, t_n)$, то

$$\begin{aligned} \varphi(\tau_j)J(\tau_j; \alpha) &= \varphi(\tau_j) \int_{\tau_j}^{t_n} \frac{\alpha(x)}{x^2} dx + \varphi(\tau_j)J(t_n; \alpha) \\ &\leq \frac{\varphi(\tau_j)}{\tau_j} \alpha(t_{n-1}) + \varphi(t_n)J(t_n; \alpha). \end{aligned} \quad (16)$$

Поскольку $t_{n-1} \leq \tau_j < t_n$, а

$$\frac{\varphi(\tau_j)}{\tau_j} \leq \frac{\varphi(t_{n-1})}{t_{n-1}},$$

то из (16) получаем, что

$$\begin{aligned} \varphi(\tau_j)J(\tau_j; \alpha) &\leq \frac{\varphi(t_{n-1})}{t_{n-1}} \alpha(t_{n-1}) + \varphi(t_n)J(t_n; \alpha) \\ &\leq \varphi(t_{n-1})J(t_{n-1}; \alpha) + \varphi(t_n)J(t_n; \alpha) = J_{n-1} + J_n. \end{aligned}$$

Если $\max(J_{n-1}, J_n) = J_{n_j}$ ($n_j = n-1$ или $n_j = n$), то

$$\frac{1}{2} \varphi(\tau_j)J(\tau_j; \alpha) \leq J_{n_j} = \varphi(t_{n_j})J(t_{n_j}; \alpha).$$

Отсюда с учетом (15) получаем требуемую оценку.

Теперь вкратце остановимся на некоторых свойствах максимального члена ряда Дирихле. Хорошо известно геометрическое описание максимального члена степенного ряда или ряда Дирихле, задающего целую функцию, через выпуклый полигон Ньютона (см., например, [1]). Аналогичное описание максимального члена степенного ряда, сходящегося лишь в единичном круге, дается также в ряде работ (см., например, в [7]).

Построим выпуклый полигон Ньютона для ряда Дирихле (2), абсолютно сходящегося лишь в полуплоскости Π_0 . Для этого, предполагая, что $\sup_n |a_n| = \infty$ (можно также считать, что $a_1 \neq 0$), отметим на плоскости XOY точки $P_n = (\lambda_n, g_n)$, где $g_n = -\ln |a_n|$ (если $a_n = 0$, то полагаем $g_n = \infty$). Поскольку $F \in D_0(\Lambda)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n} = 0. \quad (17)$$

Учитывая это, через $Q(F)$ обозначим выпуклую оболочку точек P_n ($n \geq 1$). Пусть $\gamma(x) = \inf\{y : (x, y) \in Q(F)\}$. Линия, описываемая уравнением $y = \gamma(x)$ ($x \geq 1$), называется *диаграммой* или *выпуклым полигоном Ньютона* [7]. Из (17) следует, что диаграмма Ньютона, обозначим ее $L(F)$, есть выпуклая вниз ломаная линия.

Пусть $F \in D_0(\Lambda)$,

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \quad \sup |a_n| = \infty.$$

Положим

$$\hat{F}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n e^{\lambda_n s}, \quad T_n = e^{-\gamma(\lambda_n)} \quad (n \geq 1). \quad (18)$$

Функция $\hat{F}$ называется *мажорантой Ньютона* функции $F \in D_0(\Lambda)$.

Пусть $\gamma(\lambda_n) = G_n$ ($n \geq 1$). Тогда $(\lambda_n, G_n) \in L(F)$. Для бесконечного множества значений λ_n , в частности, для абсцисс λ_{n_i} ($i \geq 1$, $n_1 = 1$) всех вершин полигона $L(F)$ имеем $G_n = -\ln |a_n|$. Отметим, что точка $P_n = (\lambda_n, -\ln |a_n|)$ лежит либо на полигоне $L(F)$ (точка P_{n_i} обязательно лежит на полигоне), либо над ним. Угловой коэффициент отрезка, соединяющего вершины P_{n_i} и $P_{n_{i+1}}$ полигона $L(F)$, равен

$$R_i = \frac{G_{n_{i+1}} - G_{n_i}}{\lambda_{n_{i+1}} - \lambda_{n_i}} \quad (i \geq 1, \quad \lambda_1 = 1).$$

Ясно, что $R_i \uparrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Следовательно, при $R_{i-1} \leq \sigma < R_i$ центральный индекс $\nu(\sigma) = n_i = \text{const}$, а $\ln \mu(\sigma) = \ln |a_{n_i}| + \lambda_{n_i} \sigma$ [1]. Отсюда, в частности, следует, что $\mu(\sigma) = \hat{\mu}(\sigma)$, $\nu(\sigma) = \hat{\nu}(\sigma)$, где $\hat{\mu}(\sigma)$ и $\hat{\nu}(\sigma)$ – максимальный член и центральный индекс ряда (18). Известно также, что функция $\ln \mu(\sigma)$ непрерывна, а при $\sup_n |a_n| = \infty$ неограниченно возрастает на интервале $[-1, 0]$ [1].

2. Доказательство теоремы В. Достаточность. Пусть $F \in \overline{D}_0(\Lambda, \Phi)$, где $\Phi \in N$, а φ ($\varphi \in N^{-1}$) – обратная к Φ функция.

Последовательность $\{b_n\}$ подчинена условию: существует $w \in W_\varphi$ такая, что

$$|b_n| + \frac{1}{|b_n|} \leq e^{w(\lambda_n)} \quad (n \geq N).$$

Следовательно, имеется функция $w^* \in W_\varphi$ такая, что $w(x) = o(w^*(x))$ и $\sqrt{x} \leq w^*(x)$ при $x \rightarrow \infty$ [5].

Пусть $v = v(\sigma)$ – решение уравнения

$$w^*(v) = 3 \ln \mu(\sigma). \quad (19)$$

Положим

$$R_v = \sum_{\lambda_j > v} |a_j| e^{\lambda_j \sigma}, \quad h = \frac{w^*(v)}{v}, \quad v = v(\sigma).$$

Пусть $m \geq 1$ такое, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^m} < \infty.$$

В силу условия (1) такое m существует.

Поскольку $F \in \overline{D}_0(\Lambda, \Phi)$, то существует последовательность $\{\tau_j\}$ ($0 < \tau_j \uparrow 0$) такая, что при некоторых $\tau > 0$, $P > 0$ и $\sigma = \tau_j$ ($j \geq 1$) выполнена оценка

$$\frac{\ln \mu(\sigma)}{|\sigma| \Phi(\tau/|\sigma|)} \geq P > 0.$$

Пользуясь тем, что $\Phi \in N$, отсюда при некотором q ($0 < q < 1$) получаем, что

$$\ln \mu(\sigma) \geq \frac{\Phi(\tau|\sigma|^{-1})}{|\sigma|^{-1}} > P \tau \Phi_1(|\sigma|^{-1}), \quad \sigma = \tau_j \quad (j \geq j_0), \quad (20)$$

где $\Phi_1(t) = \Phi(qt)$. Легко проверяется, что $\Phi_1 \in N$. Значит, $\Phi_1 \in H$. Следовательно, применяя леммы 1 и 2, а также учитывая замечание к ним, при $\sigma \rightarrow 0$ – вне некоторого множества $e_1 \subset [-1, 0)$ нулевой нижней плотности получаем, что

$$\begin{aligned} \sigma + h &= \sigma \left(1 + \frac{h}{\sigma} \right) = \sigma(1 + o(1)) < 0, \\ \mu(\sigma + h) &< \mu(\sigma)^{1+o(1)}, \quad h = \frac{w^*(v)}{v}, \end{aligned} \quad (21)$$

где $v = v(\sigma)$ – решение уравнения (19). Если $\{\tau_j\}$ – последовательность, фигурирующая в оценках (20), то (это легко усматривается из доказательств лемм 1 и 2) [5]

$$\frac{m(e_1 \cap [\tau_j, 0])}{|\tau_j|} = o(1), \quad \tau_j \rightarrow 0-. \quad (22)$$

Далее, при $\sigma \in [\sigma_0, 0) \setminus e_1$ имеем

$$R_v \leq \mu(\sigma + h) \sum_{\lambda_n > v} e^{-h\lambda_n} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^m} \right) \mu(\sigma + h) \exp[\max_{t \geq v} \psi(t)],$$

где $\psi(t) = m \ln t - ht$. Поскольку $\psi'(t) = 0$ в точке $t = t_0$,

$$t_0 = \frac{m}{h} = m \frac{v}{w^*(v)} \leq m\sqrt{v} < v = v(\sigma)$$

при $\sigma_1 \leq \sigma < 0$, то

$$R_v \leq C\mu(\sigma + h) \exp[-v(1 + o(1))h], \quad C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^m}.$$

Отсюда, учитывая (21), получаем, что при $\sigma \rightarrow 0-$ вне исключительного множества $e_1 \subset [-1, 0)$, для которого $de_1 = 0$, выполнена оценка

$$R_v \leq C\mu(\sigma)^{1+o(1)} \exp[-w^*(v)(1 + o(1))] = \mu(\sigma)^{-2(1+o(1))}.$$

Значит, при $\sigma_2 \leq \sigma < 0$, $\sigma \notin e_1$, имеем $\lambda_{\nu(\sigma)} \leq v(\sigma)$, где $\nu = \nu(\sigma)$ – центральный индекс ряда (2). Тогда при $\sigma \rightarrow 0-$ вне e_1

$$\mu(\sigma) = |a_{\nu}|e^{\lambda_{\nu}\sigma} = |a_{\nu}b_{\nu}|e^{\lambda_{\nu}\sigma}|b_{\nu}|^{-1} \leq \mu^*(\sigma)e^{w(v)} = \mu^*(\sigma)\mu(\sigma)^{o(1)}.$$

Следовательно, при $\sigma \rightarrow 0-$ вне некоторого множества $e_1 \subset [-1, 0)$ нулевой нижней плотности

$$(1 + o(1)) \ln \mu(\sigma) \leq \ln \mu^*(\sigma). \quad (23)$$

Далее, поскольку $|b_n| \leq e^{w(\lambda_n)}$ ($n \geq N$), то при $\sigma_2 \leq \sigma < 0$

$$\mu^*(\sigma) = |a_k b_k|e^{\lambda_k \sigma} \leq \mu(\sigma)e^{w(\lambda_k)}, \quad (24)$$

где $k = k(\sigma)$ – центральный индекс ряда (3).

Пусть $x = x(\sigma)$ – решение уравнения $w^*(x) = 3 \ln \mu^*(\sigma)$, а

$$R_x^* = \sum_{\lambda_n > x} |a_n b_n|e^{\lambda_n \sigma}.$$

Положим $x_j = \inf\{x : x \in A_j\}$, где $A_j = \{x : x \geq \tau_j, \ln \mu(\tau_j) \leq 2 \ln \mu^*(x)\}$ ($j \geq 1$). Если $\tau_j \notin e_1$ при $j \geq j_1$, то из (23) заключаем, что $x_j = \tau_j$ при $j \geq j_2$. В противном случае $\tau_j \leq x_j$. Но поскольку $m(e_1 \cap [\tau_j, 0)) = o(|\tau_j|)$ при $\tau_j \rightarrow 0-$, то

$$\frac{x_j - \tau_j}{|\tau_j|} = 1 - \frac{|x_j|}{|\tau_j|} = o(1), \quad \tau_j \rightarrow 0-.$$

Значит, в любом случае $x_j = (1 + o(1))\tau_j$, $\tau_j \rightarrow 0-$. Следовательно, с учетом (20) получаем, что

$$\ln \mu^*(x_j) \geq \frac{1}{2} \ln \mu(\tau_j) > \frac{1}{2} P\tau \Phi_2(|x_j|^{-1}) \quad (j \geq j_2),$$

где $\Phi_2(t) = \Phi(q^*t)$ ($0 < q^* < q$). Поскольку $\Phi_2 \in H$, то опять, применяя леммы 1, 2, при $\sigma \rightarrow 0-$ вне некоторого множества $e_2 \subset [-1, 0)$, $m(e_2 \cap [x_j, 0)) = o(|x_j|)$, $x_j \rightarrow 0-$, имеем

$$R_x^* \leq C\mu^*(\sigma)^{-2(1+o(1))}, \quad C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^m}. \quad (25)$$

Оценки величин R_x^* и $m(e_2 \cap [x_j, 0))$ получаются из тех же соображений, что и оценки для величин R_v и $m(e_1 \cap [\tau_j, 0))$. Но так как $x_j = (1 + o(1))\tau_j$ при $\tau_j \rightarrow 0-$, то

$$\frac{m(e_2 \cap [\tau_j, 0))}{|\tau_j|} = o(1), \quad \tau_j \rightarrow 0-. \quad (26)$$

Далее, из (25) получаем, что $\lambda_{k(\sigma)} \leq x(\sigma)$ при $\sigma_3 \leq \sigma < 0$, $\sigma \notin e_2$. Следовательно, из (24) получаем, что при $\sigma \rightarrow 0-$ вне e_2 выполняется неравенство

$$\mu^*(\sigma) \leq \mu(\sigma)\mu^*(\sigma)^{o(1)},$$

т.е.

$$(1 + o(1)) \ln \mu^*(\sigma) \leq \ln \mu(\sigma). \quad (27)$$

Теперь из оценок (23), (27) окончательно получаем, что при $\sigma \rightarrow 0-$ вне множества $e = e_1 \cup e_2$ имеет место асимптотическое равенство

$$\ln \mu(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu^*(\sigma).$$

С учетом (22), (26) осталось только заметить, что

$$\lim_{\tau_j \rightarrow 0-} \frac{m(e \cap [\tau_j, 0))}{|\tau_j|} = 0.$$

Таким образом, $de = 0$ и достаточность доказана.

Необходимость. Пусть Φ — некоторая функция из класса N , а φ — обратная к ней функция. Покажем, что если для любой функции $F \in \overline{D}_0(\Lambda, \Phi)$ при $\sigma \rightarrow 0-$ вне некоторого множества $e \subset [-1, 0)$, $de = 0$, выполняется равенство (8), то существует функция $w \in W_\varphi$ такая, что

$$|b_n| + \frac{1}{|b_n|} \leq e^{w(\lambda_n)} \quad (n \geq N). \quad (28)$$

Для этого заметим, что условие (28) равносильно предположению: существует функция $g \in W_\varphi$ такая, что при $n \geq N$

- 1) $|b_n| \leq e^{g(\lambda_n)}$;
- 2) $|b_n|^{-1} \leq e^{g(\lambda_n)}$.

Действительно, то, что 1), 2) следуют из (28), очевидно. Обратно, из 1), 2) имеем

$$|b_n| + |b_n|^{-1} \leq 2e^{g(\lambda_n)} \quad (n \geq N).$$

Следовательно, (28) имеет место с мажорантой $w(x) = \ln 2 + g(x)$.

Предположим, что условие (28) не выполнено. Тогда хотя бы для одной из последовательностей

$$\{\ln |b_n|\}_{n=N}^\infty, \quad \{-\ln |b_n|\}_{n=N}^\infty$$

не существует мажоранты вида $w(\lambda_n)$, где $w \in W_\varphi$. Пусть, ради определенности, последовательность $\{\ln |b_n|\}_{n=N}^\infty$ обладает этим свойством. Это означает, что

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) \int_t^\infty \frac{\alpha(x)}{x^2} dx > 0, \quad (29)$$

где $\alpha = \alpha(t)$ – наименьшая неубывающая мажоранта последовательности $\{\ln |b_n|\}_{n=N}^{\infty}$, т.е. $\alpha(t) = \max_{\lambda_n \leq t} \{\ln |b_n| : n \geq N\}$. Заметим, что $\alpha(t)$ – ступенчатая функция, непрерывная справа. Не теряя общности, можно считать, что $\alpha(t) > 0$ при $n \geq N$.

Рассмотрим два случая. Пусть сначала

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\lambda_n) \varphi(\lambda_n)}{\lambda_n} = 0. \quad (30)$$

Если $T = \{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность всех точек разрыва функции $\alpha(t)$, то, очевидно, $T \subset \Lambda$, т.е. $t_n = \lambda_{j_n}$ ($n \geq 1$). Пусть q ($0 < q < 1$) – произвольное, но фиксированное число, $\beta(t) = q\alpha(t)$, $I_n = J(t_n; \beta)$, $G_n = -t_n I_n$ ($n \geq 1$). Положим

$$a_k = \begin{cases} e^{-G_1}, & \text{если } k = 1, 2, \dots, j_1; \\ e^{-G_n}, & \text{если } k = j_n \quad (n \geq 1); \\ e^{-\gamma_n(\lambda_k)-1}, & \text{если } j_n < k < j_{n+1} \quad (n \geq 1), \end{cases}$$

где $y = \gamma_n(x)$ – уравнение прямой, проходящей через точки $P_n = (t_n, G_n)$ и $P_{n+1} = (t_{n+1}, G_{n+1})$.

Убедимся, что $R_n \uparrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, где

$$R_n = \frac{G_{n+1} - G_n}{t_{n+1} - t_n}.$$

Действительно, $R_n = -I_n + \beta(t_n)/t_n$ ($n \geq 1$) (мы воспользовались тем, что $\beta(t) = q\alpha(t)$, а $\alpha(t) = \alpha(t_n)$ при $t_n \leq t < t_{n+1}$). Отсюда получаем, что

$$R_{n+1} - R_n = q \left(\frac{\alpha(t_{n+1}) - \alpha(t_n)}{t_{n+1}} \right) > 0 \quad (n \geq 1).$$

Но так как $G_n = o(t_n)$ при $n \rightarrow \infty$, то, действительно, $R_n \uparrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, совокупность всех отрезков прямых $y = \gamma_n(x)$, соединяющих точки P_n и P_{n+1} ($n \geq 1$), есть выпуклый полигон Ньютона $L(F)$ для ряда Дирихле

$$F(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k s}, \quad (31)$$

а поскольку точки $(\lambda_k, -\ln |a_k|)$ при $j_n < k < j_{n+1}$ ($n \geq 1$) лежат выше $L(F)$, то вершинами полигона $L(F)$ являются как раз точки

$$P_n = (t_n, G_n), \quad t_n = \lambda_{j_n} \quad (n \geq 1).$$

Оценим максимальный член $\mu(\sigma)$ ряда (31) сверху. Для $R_{n-1} \leq \sigma < R_n$ имеем

$$\begin{aligned} \ln \mu(\sigma) &= -G_n + t_n \sigma = t_n (I_n + \sigma) \\ &< \frac{t_n t_{n+1}}{t_{n+1} - t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\beta(x)}{x^2} dx = q\alpha(t_n) \quad (n \geq 1). \end{aligned} \quad (32)$$

С другой стороны,

$$\mu^*(\sigma) \geq |a_{j_n} b_{j_n}| e^{\lambda_{j_n} \sigma}, \quad \lambda_{j_n} = t_n \quad (n \geq 1).$$

Следовательно, для $R_{n-1} \leq \sigma < R_n$ получаем, что

$$\ln \mu^*(\sigma) \geq \alpha(t_n) + t_n(I_n + \sigma) = \alpha(t_n) + \ln \mu(\sigma) > \alpha(t_n) \quad (n \geq 1). \quad (33)$$

Но тогда из (32), (33) окончательно получаем, что для $R_{n-1} \leq \sigma < R_n$ выполняется неравенство

$$\ln \mu(\sigma) < q \ln \mu^*(\sigma).$$

Значит,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0-} \frac{\ln \mu(\sigma)}{\ln \mu^*(\sigma)} \leq q < 1$$

и оценка (8) для построенного нами ряда (31) не имеет места. Осталось только показать, что $F \in \overline{D}_0(\Lambda, \Phi)$.

Поскольку $\Phi \in N$, то $(\varphi(t)/t) \downarrow 0$ при $t \uparrow \infty$. Следовательно, учитывая (29) и применяя лемму 3, получаем, что

$$\varphi(\tau_k) J(\tau_k; \alpha) \geq \tau > 0, \quad (34)$$

где $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$ – некоторая подпоследовательность последовательности $T = \{t_n\}$ всех точек разрыва функции $\alpha(t)$.

Пусть $\tau_k = t_{n_k}$ ($k \geq 1$) и $R_{n_k-1} \leq \sigma < R_{n_k}$. Тогда $\lambda_{\nu(\sigma)} = \tau_k$, $|R_{n_k}| < |\sigma| \leq |R_{n_k-1}|$ ($\nu(\sigma)$ – центральный индекс ряда (31)).

Учитывая (30), (34), а также равенство $R_{n_k} = -I_{n_k} + q\alpha(t_{n_k})/t_{n_k}$ ($k \geq 1$), имеем

$$\varphi(\tau_k) |R_{n_k}| = \varphi(\tau_k) I_{n_k} - q \frac{\alpha(\tau_k) \varphi(\tau_k)}{\tau_k} \geq \frac{\tau}{2} > 0 \quad (k \geq k_0).$$

Следовательно, при $k \geq k_0$

$$\varphi(\lambda_{\nu(\sigma)}) \geq \frac{\tau q}{2|\sigma|}, \quad |R_{n_k}| < |\sigma| \leq |R_{n_k-1}| \quad (0 < q < 1).$$

Отсюда при $k \geq k_0$, $|R_{n_k}| < |\sigma| \leq |R_{n_k-1}|$, имеем

$$\lambda_{\nu(\sigma)} \geq \Phi \left(\frac{\tau q}{2|\sigma|} \right). \quad (35)$$

Далее, из известного представления [1]

$$\ln \mu(\sigma) = \ln \mu(-1) + \int_{-1}^{\sigma} \lambda_{\nu(t)} dt$$

получаем, что

$$\ln \mu \left(\frac{\sigma}{2} \right) \geq \int_{\sigma}^{\sigma/2} \lambda_{\nu(t)} dt \geq \frac{|\sigma|}{2} \lambda_{\nu(\sigma)}.$$

Следовательно, учитывая (35), имеем

$$\ln \mu \left(\frac{\sigma}{2} \right) \geq \frac{|\sigma|}{2} \Phi \left(\frac{\tau q}{2|\sigma|} \right), \quad |R_{n_k}| < |\sigma| \leq |R_{n_k-1}| \quad (k \geq k_0).$$

Таким образом,

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow 0-} \frac{\ln \mu(\sigma)}{|\sigma| \Phi(a/|\sigma|)} \geq 1, \quad a = \frac{\tau q}{2}.$$

Значит, $F \in \overline{D}_0(\Lambda, \Phi)$ и в случае выполнения условия (30) пример построен.

Пусть теперь

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(\lambda_n) \alpha(\lambda_n)}{\lambda_n} > 0. \quad (36)$$

Тогда существует подпоследовательность $\{\lambda_{n_k}\}$ такая, что

$$\alpha(\lambda_{n_k}) \geq \beta \frac{\lambda_{n_k}}{\varphi(\lambda_{n_k})} \quad (k \geq 1, \quad \beta > 0).$$

Рассмотрим ряд Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it), \quad (37)$$

где

$$a_n = \begin{cases} \exp \left(\frac{\beta}{2} \frac{\lambda_n}{\varphi(\lambda_n)} \right), & \text{если } n = n_k, \\ 0, & \text{если } n \neq n_k. \end{cases}$$

Пусть $\nu = \nu(\sigma)$ – центральный индекс ряда (37). Тогда

$$\ln \mu(\sigma) = \max_{k \geq 1} \left(\frac{\beta}{2} \frac{\lambda_{n_k}}{\varphi(\lambda_{n_k})} - \lambda_{n_k} |\sigma| \right) = \frac{\beta}{2} \frac{\lambda_\nu}{\varphi(\lambda_\nu)} - \lambda_\nu |\sigma| < \frac{\beta}{2} \frac{\lambda_\nu}{\varphi(\lambda_\nu)},$$

$$\ln \mu^*(\sigma) \geq \ln |a_\nu| + \ln |b_\nu| - \lambda_\nu |\sigma| = \ln \mu(\sigma) + \ln |b_\nu| > \ln |b_\nu| = \alpha(\lambda_\nu) \geq \beta \frac{\lambda_\nu}{\varphi(\lambda_\nu)}.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow 0-} \frac{\ln \mu(\sigma)}{\ln \mu^*(\sigma)} \leq \frac{1}{2}.$$

Убедимся, что $F \in \overline{D}_0(\Lambda, \Phi)$. Действительно, для любого $\sigma < 0$

$$\ln \mu(\sigma) \geq \frac{\beta}{2} \frac{m_k}{\varphi(m_k)} - m_k |\sigma| \quad (m_k = \lambda_{n_k}, \quad k \geq 1).$$

Пусть $\sigma = \sigma_k$ – корень уравнения

$$m_k = \Phi \left(\frac{\beta}{4|\sigma|} \right) \quad (k \geq k_0).$$

Тогда

$$\ln \mu(\sigma_k) \geq \Phi \left(\frac{\beta}{4|\sigma_k|} \right) |\sigma_k| \quad (k \geq k_0).$$

Значит,

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow 0-} \frac{\ln \mu(\sigma)}{|\sigma| \Phi(a/|\sigma|)} \geq 1 \quad \left(a = \frac{\beta}{4} \right).$$

Таким образом, $F \in \overline{D}_0(\Lambda, \Phi)$ и необходимость полностью доказана.

3. Некоторые применения к рядам Дирихле заданного роста. Пусть функция F принадлежит $D_0(\Lambda)$ и максимальный член представляющего ее ряда (2) имеет ненулевой порядок по Ритту в полуплоскости Π_0 , т.е. [8]

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow 0-} \frac{\ln \ln \mu(\sigma)}{|\sigma|^{-1}} = \rho_R > 0. \quad (38)$$

Тогда существует последовательность $\{\sigma_k\}$, $\sigma_k \uparrow 0$, такая, что для $\sigma = \sigma_k$

$$\ln \mu(\sigma) > |\sigma| e^{a|\sigma|^{-1}} \quad (0 < a < \rho_R).$$

Отсюда

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow 0-} \frac{\ln \mu(\sigma)}{|\sigma| \Phi(a|\sigma|^{-1})} > 0,$$

где $\Phi(t) = e^t$. Ясно, что $\Phi \in N$, $\varphi(t) = \ln t$. Имея это в виду, через $\overline{D}_0(\Lambda, R)$ обозначим подкласс функций из $\overline{D}_0(\Lambda, \Phi)$, для которых выполняется условие (38).

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА D. *Для того чтобы для любой функции $F \in \overline{D}_0(\Lambda, R)$ при $\sigma \rightarrow 0-$ вне некоторого множества $e \subset [-1, 0)$ нулевой нижней плотности выполнялось асимптотическое равенство*

$$\ln \mu(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu^*(\sigma),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \ln t \int_t^\infty \frac{\alpha(x)}{x^2} dx = 0. \quad (39)$$

Здесь $\alpha = \alpha(t)$ — наименьшая неубывающая мажоранта последовательности $\{|b_n| + |b_n|^{-1}\}_{n=N}^\infty$.

Теорема D есть простое следствие теоремы C.

Легко сформулировать соответствующую теорему и в случае, когда $\Phi(t) = \exp_k t$, где

$$\exp_k t = \underbrace{\exp \exp \cdots \exp}_k t.$$

Мы ограничимся формулировкой теоремы только о степенных рядах, непосредственно вытекающей из теоремы D.

Пусть область сходимости степенного ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (40)$$

— единичный круг $D(0, 1) = \{z : |z| < 1\}$. Для функции $\Phi(t) = e^t$ класс $\overline{K}(\Phi)$ представляет собой множество

$$\overline{K}(\exp) = \left\{ f : \sup_{\tau > 0} \overline{\lim}_{r \rightarrow 1-} \frac{\ln \mu_f(r)}{(1-r) \exp[\tau(1-r)^{-1}]} > 0 \right\},$$

где $\mu_f(r)$ — максимальный член ряда (40).

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА Е. Для того чтобы для любой функции $f \in \overline{K}(\exp)$ при $r \rightarrow 1-$ вне некоторого множества $e_1 \subset [0, 1)$ такого, что $d'e_1 = 0$, имело место асимптотическое равенство

$$\ln \mu_f(r) = (1 + o(1)) \ln \mu_f^*(r),$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (39).

Здесь

$$d'e_1 = \lim_{r \rightarrow 1-} \frac{m(e_1 \cap [r, 1))}{1 - r}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.
- [2] Гайсин А. М. Оценка ряда Дирихле с лакунами Фейера на кривых // Докл. РАН. 2000. Т. 370. № 6. С. 735–737.
- [3] Wiman A. Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Function und dem grössten Betrage bei gegebenem Argumente der Function // Acta Math. 1916/18. V. 41. P. 1–28.
- [4] Скаскив О. Б. К теореме Вимана о минимуме модуля аналитической в единичном круге функции // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53. № 4. С. 833–850.
- [5] Гайсин А. М. Поведение логарифма модуля ряда Дирихле, сходящегося в полуплоскости // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 4. С. 173–185.
- [6] Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958.
- [7] Цегелик Г. Г. Свойства мажоранты и диаграммы Ньютона функции, аналитической в круге // Укр. матем. ж. 1977. Т. 29. № 4. С. 560–562.
- [8] Гайсин А. М. Оценка роста функции, представленной рядом Дирихле, в полуполосе // Матем. сб. 1982. Т. 117(159). № 3. С. 412–424.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН (г. Уфа)
E-mail: napalkov@imat.rb.ru

Поступило
03.05.2000