Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Т. Дмитриенко, В. Г. Звягин, О разрешимости краевой задачи для математической модели стационарных течений нелинейно-вязкой жидкости, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 6, 843–853

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm698>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 17:49:22

УДК 517.93

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В. Т. Дмитриенко, В. Г. Звягин

Установлена теорема существования слабых решений краевой задачи для стационарных уравнений, описывающих как ламинарные, так и турбулентные течения нелинейно-вязкой жидкости.

Библиография: 6 названий.

Хорошо известна система уравнений движения жидкости в форме Коши [1]. Формально она описывает течения всех видов жидкостей. Однако эта система содержит тензор касательных напряжений, который явно не выражен через неизвестные этой системы. Чтобы это сделать, как правило, используют соотношения между тензором касательных напряжений и тензором скоростей деформации. Эти соотношения можно отнести к разряду гипотез, которые должны подтверждаться для конкретных жидкостей и конкретных течений экспериментальными данными. Одна из таких гипотез, описывающих как ламинарные, так и турбулентные течения нелинейно-вязкой жидкости, предложена в [2].

Однако, решения, существование которых устанавливается в [2] для стационарного случая, зависят от радиуса ядра некоторого усредняющего оператора. В связи с этим в [2] был поставлен вопрос (замечание п. 5) о существовании решений стационарной задачи, соответствующей исходной математической модели без оператора усреднения. Настоящая статья и посвящена решению этой задачи.

Метод исследования, используемый в данной работе, аналогичен методу, примененному в [3]. Поставленная задача заменяется операторным уравнением, разрешимость которого устанавливается на основе априорных оценок и теории степени.

1. В этом пункте опишем математическую модель, предложенную в работе [2] для изучения ламинарных и турбулентных течений вязкой и нелинейно-вязкой жидкости в стационарном случае.

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$. Будем предполагать, что Ω разбита на открытые непересекающиеся подобласти Ω_i , $i = 1, 2, \dots, m$, такие, что $\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^m \overline{\Omega}_i$, $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ для $i \neq j$. Обозначим через Γ границу области Ω . Будем предполагать, что Γ липшицева и Γ_1, Γ_2 – непустые подмножества Γ такие, что $\Gamma = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 98-01-00029 и № 99-01-00380.

Пусть также для каждого $i = 1, 2, \dots, m$ $(n-1)$ -мерная мера пересечения $\bar{\Omega}_i \cap \Gamma_1$ положительна.

Пример области Ω и ее разбиения, приведенный на рис. 1, удовлетворяет всем перечисленным выше требованиям (см. [2]).

Рис. 1

В данной статье изучается стационарное (установившееся) течение жидкости, заполняющей область Ω . Поэтому $v(x) = (v_1(x), \dots, v_n(x))$ – вектор скорости частицы в точке $x \in \Omega$ – не зависит от времени t . Обозначим через $\mathcal{E}$ тензор скоростей деформаций с компонентами

$$\mathcal{E}_{ij} = \mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad I(v) = \sum_{i,j=1}^n (\mathcal{E}_{ij}(v))^2.$$

Для каждой функции v определим на Ω числовую функцию $U(v)$ с помощью равенства

$$U(v)(x) = k_i \int_{\Omega_i} I(v) dy, \quad x \in \Omega_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

с положительными константами k_i .

Следуя [2], будем предполагать, что функция $U(v)$ служит характеристикой течения жидкости в области Ω . Так, течение считаем *ламинарным* на Ω_i , если $U(v)(x) < a$ для $x \in \Omega_i$ и некоторой положительной константы a , и *турбулентным*, если $U(v)(x) > a$. Уровень a определяет границу, при переходе через которую течение становится турбулентным.

Обозначим через σ тензор касательных напряжений (девиатор тензора напряжений). Будем предполагать, следуя математической модели работы [2], что тензор $\sigma = (\sigma_{ij})$ и тензор скоростей деформаций $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ij})$ связаны определяющим уравнением

$$\sigma_{ij} = 2[\varphi_1(U(v)) + \varphi_2(I(v), U(v))] \mathcal{E}_{ij}(v). \quad (1.1)$$

Свойства функций φ_1 и φ_2 будут описаны позже. Если компоненты $\sigma_{ij}(x)$ дифференцируемы по x , то символом $\text{Div } \sigma$ будем обозначать вектор с координатами

$$\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_j}, \sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j}, \dots, \sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_{nj}}{\partial x_j} \right),$$

т.е. вектор, координаты которого являются дивергенцией строк матрицы $\sigma = (\sigma_{ij}(x))$.

Хорошо известно, что установившееся течение несжимаемой жидкости описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \rho v_k \frac{\partial v}{\partial x_k} + \text{grad } p &= \text{Div } \sigma + \varphi && \text{в } \Omega, \\ \text{div } v &= 0 && \text{в } \Omega. \end{aligned}$$

Здесь ρ – плотность жидкости, $p = p(x)$ – давление жидкости в точке x , φ – вектор-функция объемной силы, действующей на жидкость. Здесь и далее мы будем использовать соглашение о суммировании по повторяющимся индексам.

Будем предполагать, что на части Γ_1 границы задано условие “прилипания”

$$v|_{\Gamma_1} = 0,$$

на части Γ_2 задана поверхностная сила Φ

$$(-pE + \sigma)\nu|_{\Gamma_2} = \Phi,$$

где ν – единичная внешняя нормаль к Γ_2 , а E – единичная матрица.

Подставим выражение σ из определяющего соотношения (1.1) в уравнение движения жидкости и граничные условия. Получим следующую краевую задачу:

$$\rho v_k \frac{\partial v}{\partial x_k} + \text{grad } p - \text{Div} (2(\varphi_1(U(v)) + \varphi_2(I(v), U(v))) \mathcal{E}(v)) = \varphi, \quad (1.2)$$

$$\text{div } v = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (1.3)$$

$$v|_{\Gamma_1} = 0, \quad (1.4)$$

$$(-pE + 2(\varphi_1(U(v)) + \varphi_2(I(v), U(v))) \mathcal{E}(v)) \cdot \nu|_{\Gamma_2} = \Phi. \quad (1.5)$$

Будем предполагать, что функции $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y_1, y_2)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\varphi_1 \text{ непрерывна на } \mathbb{R}_+ \text{ и } \varphi_1(y) \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}_+ = \{y \in \mathbb{R}; y \geq 0\}; \quad (1.6)$$

$$\varphi_1(y_1) \geq \varphi_1(y_2), \quad \text{если } y_1 \geq y_2; \quad (1.7)$$

$$\varphi_1(y) \geq a_1 y \quad \text{для } y \in (a, +\infty); \quad (1.8)$$

где a, a_1 – положительные константы, причем a – та же константа, о которой говорилось в определении ламинарного и турбулентного течения;

$$\varphi_2(y_1, y_2) \text{ непрерывна на } \mathbb{R}_+^2; \quad (1.9)$$

$$0 \leq \varphi_2(y_1, y_2) \leq M(y_2) \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}_+; \quad (1.10)$$

$$[\varphi_2(y_1^2, y_2)y_1 - \varphi_2(y_2^2, y_2)y_3](y_1 - y_3) \geq a_2(y_1 - y_3)^2 \quad \forall y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}_+; \quad (1.11)$$

где a_2 – положительная константа, $M(y_2)$ – возрастающая функция на $\mathbb{R}_+$.

Отметим, что указанные выше условия на функции φ_1 и φ_2 являются более общими, чем условия, предложенные в работе [2].

Решением задачи (1.2)–(1.5) называют вектор-функцию $v = (v_1, \dots, v_n)$ и скалярную функцию p на Ω , определяющие соответственно скорость течения и давление жидкости, имеющие необходимые производные и удовлетворяющие уравнениям (1.2)–(1.5).

2. Опишем пространства функций на Ω , используемые в дальнейшем:

$L_2(\Omega)$ – множество функций $w: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, интегрируемых с квадратом; скалярное произведение для $w, v \in L_2(\Omega)$ обозначим $(w, v)_{L_2(\Omega)}$;
 $W_2^1(\Omega)$ – функции из $L_2(\Omega)$ с частными производными первого порядка, принадлежащими $L_2(\Omega)$.

Пусть теперь v, w – функции на Ω со значениями в пространстве $\mathbb{R}^n$;

$L_2(\Omega)^n$ – множество функций $w: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ с координатами из $L_2(\Omega)$;

$W_2^1(\Omega)^n$ – функции $w: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ с координатами из $W_2^1(\Omega)$.

Следуя [2], положим

$$X = \{v \in W_2^1(\Omega)^n : v|_{\Gamma_1} = 0\},$$

$$V = \{v \in W_2^1(\Omega)^n : v|_{\Gamma_1} = 0, \operatorname{div} v = 0\}.$$

Пространства X и V гильбертовы со скалярным произведением

$$(v, u)_X = \int_{\Omega} \mathcal{E}_{ij}(u) \mathcal{E}_{ij}(v) dx.$$

Соответствующая норма определяется равенством

$$\|v\| = \left(\int_{\Omega} I(v) dx \right)^{1/2}.$$

Из неравенства Корна и того факта, что $(n-1)$ -мерная мера пересечения $\bar{\Omega}_i \cap \Gamma_1$ положительна, следует, что эта норма на пространствах X и V эквивалентна норме, индуцированной из пространства $W_2^1(\Omega)^n$.

Сужения функций из V на Ω_i образуют пространство, которое мы обозначим через V_i . Норма в пространстве V_i определяется равенством

$$\|v\|_i = \left(\int_{\Omega_i} I(v) dx \right)^{1/2}.$$

Пусть H – замыкание V в норме пространства $L_2(\Omega)^n$, S – множество ступенчатых функций, принимающих постоянное значение на каждом Ω_i , $i = 1, \dots, m$; X^*, V^* – пространства, сопряженные к X и V соответственно. Обозначим через (f, v) действие функционала f из V^* (или X^*) на функцию v из V (или X).

3. В этом пункте будет дана постановка задачи о слабых решениях задачи (1.2)–(1.5).

Введем операторы в функциональных пространствах X и V с помощью следующих равенств:

$$N_1: X \rightarrow X^*, \quad (N_1(u), h) = 2 \int_{\Omega} \varphi_1(U(u)) \mathcal{E}_{ij}(u) \mathcal{E}_{ij}(h) dx, \quad (3.1)$$

$$N_2: X \times S \rightarrow X^*, \quad (N_2(u, s), h) = 2 \int_{\Omega} \varphi_2(I(u), s) \mathcal{E}_{ij}(u) \mathcal{E}_{ij}(h) dx, \quad (3.2)$$

$$K: X \rightarrow X^*, \quad (K(u), h) = \rho \int_{\Omega} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} h_i dx, \quad (3.3)$$

где $u, h \in X$, $s \in S$.

Отметим, что те же равенства определяют отображения

$$N_1: V \rightarrow V^*, \quad N_2: V \times S \rightarrow V^*, \quad K: V \rightarrow V^*,$$

если $u, h \in V$.

Пусть $D: X \rightarrow L_2(\Omega)$, $Du = \operatorname{div} u$ и $D^*: L_2(\Omega) \rightarrow X^*$ – сопряженный к D линейный оператор:

$$(Du, \mu)_{L_2(\Omega)} = (u, D^* \mu) \quad \text{для } u \in X, \mu \in L_2(\Omega).$$

Будем предполагать, что $\Phi \in L_{4/3}(\Gamma_2)^n$, $\varphi \in L_{4/3}(\Omega)^n$, $n = 2, 3$. Эти функции определяют функционалы F, f на X с помощью следующих равенств:

$$(F, h) = \int_{\Gamma_2} \Phi \cdot h \, dx, \quad (f, h) = \int_{\Omega} \varphi \cdot h \, dx \quad \text{для } h \in X.$$

Определения корректны, так как $h \in W_2^1(\Omega)^n \subset L_4(\Gamma_2)^n$ и $h \in L_4(\Omega)$ для $n = 2, 3$.

Слабым решением задачи (1.2)–(1.5) называют функции $v \in X$, $p \in L_2(\Omega)$ такие, что

$$\begin{aligned} (N_1(v) + N_2(v, U(v)) + K(v), h) - (D^*p, h) &= (F + f, h) \quad \forall h \in X, \\ (Dv, q)_{L_2(\Omega)} &= 0 \quad \forall q \in L_2(\Omega). \end{aligned}$$

Используя формулу Грина, можно проверить, что каждое решение v, p задачи (1.2)–(1.5) является слабым решением.

Заметим, что если v – слабое решение задачи (1.2)–(1.5), то $v \in V$, и если $h \in V$, то $(D^*p, h) = (p, Dh)_{L_2(\Omega)} = 0$, так как $Dh = \operatorname{div} h = 0$. Поэтому слабое решение задачи (1.2)–(1.5) является решением следующей задачи: найти функцию $v \in V$ такую, что

$$(N_1(v) + N_2(v, U(v)) + K(v), h) = (F + f, h) \quad \forall h \in V.$$

Полученную задачу можно записать в виде операторного уравнения

$$N_1(v) + N_2(v, U(v)) + K(v) = F + f. \quad (3.4)$$

Заметим, что в уравнении (3.4) можно считать, что $F, f \in V^*$. Для слабого решения v, p задачи (1.2)–(1.5) функция v является решением операторного уравнения (3.4). Обратно, пусть v – решение уравнения (3.4). Тогда разность

$$q = N_1(v) + N_2(v, U(v)) + K(v) - F - f$$

по теореме Хана–Банаха определяет функционал на X такой, что $(q, h) = 0$ для всех $h \in V$. Учтывая теперь, что оператор D^* является изоморфизмом из пространства $L_2(\Omega)$ на пространство $V^0 = \{u \in X^*, (u, h) = 0 \quad \forall h \in V\}$ (см. [2, лемма 4.4]), полагаем $D^*p = q$, $p \in L_2(\Omega)$, и получаем функцию p такую, что v, p – слабое решение задачи (1.2)–(1.5). Следовательно, операторное уравнение (3.4) эквивалентно задаче о слабом решении задачи (1.2)–(1.5).

4. Мы будем использовать ряд свойств операторов N_1, N_2, K , установленных в работе [2]. Кроме того, будут доказаны дополнительные свойства этих операторов. В этом пункте для удобства читателя приведены все свойства используемых в дальнейшем операторов.

ЛЕММА 4.1. *Если функция φ_1 удовлетворяет условиям (1.6)–(1.8), то отображение N_1 , определяемое соотношением (3.1), является монотонным, непрерывным и имеет место оценка*

$$(N_1(u), u) \geq a_1 \alpha_0 \|u\|^4 - C \quad \forall u \in V, \quad (4.1)$$

где $\alpha_0 = \min_i k_i$ и константа C не зависит от u .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непрерывность отображения N_1 следует из условия (1.6). Монотонность N_1 устанавливается с помощью условий (1.6), (1.7) и рассуждений, приведенных в лемме 4.1 работы [2]. Покажем, что справедливо неравенство (4.1).

По определению

$$(N_1(u), u) = 2 \int_{\Omega} \varphi_1(U(u)) \mathcal{E}_{ij}(u) \mathcal{E}_{ij}(u) dx = 2\varphi_1(k_i \|u\|_i^2) \|u\|_i^2.$$

В силу условий (1.6)–(1.8) имеем

$$\varphi_1(k_i \|u\|_i^2) \|u\|_i^2 \geq \begin{cases} 0, & \text{если } \|u\|_i^2 \leq \frac{a}{k_i}, \\ a_1 k_i \|u\|_i^4, & \text{если } \|u\|_i^2 > \frac{a}{k_i}, \end{cases}$$

откуда

$$\varphi_1(k_i \|u\|_i^2) \|u\|_i^2 \geq a_1 k_i \|u\|_i^4 - a_1 \frac{a^2}{k_i}$$

для каждого $i = 1, 2, \dots, m$. Так как

$$\|u\| \leq \sum_{i=1}^m \|u\|_i,$$

то отсюда следует, что

$$(N_1(u), u) \geq 2a_1 \|u\|^4 \min_i k_i - 2a_1 a^2 \max_i k_i^{-1},$$

т.е. получаем (4.1) с $C = 2a_1 a^2 \max_i k_i^{-1}$ и $\alpha_0 = 2 \min_i k_i$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.2. *Если функция φ_2 удовлетворяет условиям (1.9)–(1.11), то отображение N_2 , определяемое соотношением (3.2), непрерывно и для любой ступенчатой функции s справедливо неравенство*

$$(N_2(u, s) - N_2(v, s), u - v) \geq 2a_2 \int_{\Omega} [I(u)^{1/2} - I(v)^{1/2}]^2 dx \quad \forall u, v \in V, \quad (4.2)$$

причем из равенства $(N_2(u, s) - N_2(v, s), u - v) = 0$ следует, что $u = v$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим непрерывность отображения N_2 .

По определению

$$(N_2(u, s), h) = 2 \int_{\Omega} \varphi_2(I(u), s) \mathcal{E}_{ij}(u) \mathcal{E}_{ij}(h) dx,$$

поэтому достаточно показать непрерывность отображения

$$\Phi_2: (u, s) \mapsto \varphi_2(I(u), s) \mathcal{E}_{ij}(u),$$

действующего из $V \times S$ в $L_2(\Omega)$. Если $|s| \leq R$, то в силу (1.10)

$$|\varphi_2(I(u), s) \mathcal{E}_{ij}(u)| \leq M(R) |\mathcal{E}_{ij}(u)|. \quad (4.3)$$

Из неравенства (4.3) и теоремы Красносельского [4] (см. также [5]) следует непрерывность оператора суперпозиции

$$(w, s, \overline{\mathcal{E}}) \mapsto \varphi_2(w, s) \overline{\mathcal{E}}$$

из $L_1(\Omega) \times S \times L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. Отображение Φ_2 представляет собой композицию оператора суперпозиции и непрерывных отображений

$$u \mapsto I(u) \text{ из } V \text{ в } L_1(\Omega), \quad u \mapsto \mathcal{E}(u) \text{ из } V \text{ в } L_2(\Omega),$$

поэтому отображение Φ_2 непрерывно. Оставшаяся часть утверждения устанавливается с помощью условий (1.9)–(1.11) и рассуждений, приведенных в лемме 4.2 [2]. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.3. *Отображение K , определяемое формулой (3.3), вполне непрерывно, причем если $u_l \rightharpoonup u_0$ слабо в V , то $K(u_l) \rightarrow K(u_0)$ сильно в V^* и имеет место неравенство*

$$(K(u), u) \leq C \|u\|^3 \quad \forall u \in V \quad (4.4)$$

с константой C , не зависящей от u .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В лемме 4.3 работы [2] показано, что если u_l сходится к u_0 слабо в X , то $K(u_l)$ сходится к $K(u_0)$ сильно в X^* . Эти рассуждения справедливы для оператора K и в пространстве V . Далее, неравенство (4.4) следует из определения оператора K (см. (3.3)) и неравенства Гёльдера. Приведенные выше факты и обеспечивают вполне непрерывность оператора K . Лемма доказана.

Введем отображение

$$A: V \times S \rightarrow V^*, \quad A(u, s) = N_1(u) + N_2(u, s),$$

соответствующее главной части операторного уравнения (3.4).

ТЕОРЕМА 4.1. *Если выполнены условия (1.6)–(1.11), то для любой функции $s \in S$ отображение $A(\cdot, s): V \rightarrow V^*$ обратимо, причем $A^{-1}(\cdot, s)$ – непрерывный, ограниченный, строго монотонный оператор.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из лемм 4.1 и 4.2 следует, что $A(\cdot, s)$ – непрерывный и строго монотонный оператор.

Коэрцитивность оператора $A(\cdot, s)$ следует из неравенств (4.1) и (4.2), если заметить, что $N_2(0, s) = 0$.

Теперь утверждение о существовании обратного оператора следует из [6, гл. III, теорема 2.2]. Теорема доказана.

Введем вспомогательное семейство операторных уравнений

$$N_1(v) + N_2(v, s) + \tau K(v) = g, \quad \tau \in [0, 1], \quad (4.5)$$

для $s \in S$ и $g \in V^*$.

ТЕОРЕМА 4.2. Для любых функций $g \in V^*$, $s \in S$ каждое решение v любого из уравнений семейства (4.5) удовлетворяет оценке

$$\|v\| \leq C \quad (4.6)$$

с константой $C = C(g)$, не зависящей от $s \in S$ и $\tau \in [0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть v – решение уравнения из семейства (4.5) для некоторых $\tau \in [0, 1]$, $s \in S$ и $g \in V^*$. Рассмотрим действие функционалов равенства (4.5) на функцию v :

$$(N_1(v), v) + (N_2(v, s), v) + \tau(K(v), v) = (g, v). \quad (4.7)$$

Из неравенства (4.2) для $u = 0$ имеем

$$(N_2(v, s), v) \geq 2a_2\|v\|^2.$$

С помощью этого неравенства, неравенств (4.1), (4.4), а также неравенства Гёльдера преобразуем (4.7) в неравенство

$$a_1\alpha_0\|v\|^4 - C + 2a_2\|v\|^2 \leq \|g\|_{V^*}\|v\| + C_1\|v\|^3$$

или

$$a_1\alpha_0\|v\|^4 - C_1\|v\|^3 + 2a_2\|v\|^2 - \|g\|_{V^*}\|v\| - C \leq 0.$$

Нетрудно видеть, что левая часть неравенства стремится к бесконечности при $\|v\| \rightarrow \infty$, поэтому все решения неравенства ограничены, т.е. $\|v\| < C$ для некоторой константы C . Константа C не зависит от выбора s и τ . Теорема доказана.

В теореме 4.1 для каждого $s \in S$ устанавливается существование отображения

$$A^{-1}(\cdot, s): V^* \rightarrow V,$$

обратного к отображению $A(\cdot, s)$. В следующем утверждении мы изучим характер зависимости $A^{-1}(g, s)$ от s и g .

ТЕОРЕМА 4.3. Отображение $A^{-1}: V^* \times S \rightarrow V$, $(g, s) \mapsto A^{-1}(g, s)$, обратное к отображению $A(\cdot, s)$, непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть заданы произвольные последовательности

$$\begin{aligned} \{s_l\}: s_l \in S, \quad s_l \rightarrow s_0 \text{ сильно в } L_\infty(\Omega) \cap S; \\ \{g_l\}: g_l \in V^*, \quad g_l \rightarrow g_0 \text{ сильно в } V^*. \end{aligned}$$

Введем обозначение $v_l = A^{-1}(g_l, s_l)$. Тогда

$$N_1(v_l) + N_2(v_l, s_l) = g_l. \quad (4.8)$$

Так как последовательность $\{g_l\}$ ограничена, то в силу теоремы 4.2 функции v_l удовлетворяют оценке (4.6) с константой C , общей для всех l . Поэтому без уменьшения общности рассуждений будем считать, что

$$v_l \rightharpoonup v_0 \text{ слабо в } V.$$

Обозначим через g функцию

$$N_1(v_0) + N_2(v_0, s_0) = g.$$

Вычтем это равенство из равенства (4.8) и рассмотрим действие полученных функционалов на $v_l - v_0$:

$$(N_1(v_l) - N_1(v_0), v_l - v_0) + (N_2(v_l, s_l) - N_2(v_0, s_0), v_l - v_0) = (g_l - g, v_l - v_0).$$

Преобразуем это равенство к виду

$$\begin{aligned} (N_1(v_l) - N_1(v_0), v_l - v_0) + (N_2(v_l, s_l) - N_2(v_0, s_l), v_l - v_0) \\ = (g_l - g, v_l - v_0) - (N_2(v_0, s_l) - N_2(v_0, s_0), v_l - v_0). \end{aligned} \quad (4.9)$$

В силу оценки (4.2) и монотонности отображения N_1 левая часть равенства снизу оценивается числом $2a_2(\|v_l\| - \|v_0\|)^2$. Покажем, что правая часть стремится к нулю при $l \rightarrow \infty$. В самом деле, запишем первое слагаемое в правой части (4.9) в виде

$$(g_l - g, v_l - v_0) = (g_l - g_0, v_l - v_0) + (g_0 - g, v_l - v_0).$$

В силу сильной сходимости g_l к g_0 в V^* и слабой сходимости $v_l \rightharpoonup v_0$ в V каждое слагаемое стремится к нулю при $l \rightarrow \infty$. Далее, в силу леммы 4.2 отображение $N_2(v, s)$ непрерывно, поэтому $N_2(v_0, s_l) \rightarrow N_2(v_0, s_0)$ сильно в V^* . Так как $v_l \rightharpoonup v_0$ слабо в V , отсюда следует, что

$$(N_2(v_0, s_l) - N_2(v_0, s_0), v_l - v_0) \rightarrow 0 \quad \text{при } l \rightarrow \infty.$$

Таким образом, из (4.9) следует, что $\|v_l\| \rightarrow \|v_0\|$ при $l \rightarrow \infty$, и в силу теоремы 5.12 из [6, гл. I] из этого факта и слабой сходимости $v_l \rightharpoonup v_0$ будет следовать сильная сходимость $v_l \rightarrow v_0$ в V . Используя теперь непрерывность отображений N_1 и N_2 , выполним предельный переход в равенстве (4.8). Получим, что $N_1(v_0) + N_2(v_0, s_0) = g_0$. Так как решение v_0 этого уравнения единственное, то $g = g_0$ и предел v_0 не зависит от выбора слабо сходящейся подпоследовательности из последовательности $\{v_l\}$. Следовательно, v_l сходится к v_0 сильно в V . Теорема доказана.

5. В этом пункте формулируется и доказывается теорема о существовании слабого решения уравнения (3.4).

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть выполнены условия (1.6)–(1.11) и $n = 2, 3$. Тогда для любых $f, F \in V^*$ уравнение (3.4) имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее оценке (4.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим уравнение (3.4) в виде

$$N_1(v) + N_2(v, U(v)) = F + f - K(v)$$

или $A(v, U(v)) = F + f - K(v)$. Для ступенчатой функции $U(v)$ в силу теоремы 4.1 существует оператор $A^{-1}(\cdot, U(v))$, обратный к оператору $A(\cdot, U(v))$. Применим обратный оператор к каждой части последнего уравнения, получим

$$v = A^{-1}(F + f - K(v), U(v)). \quad (5.1)$$

Заметим, что ограниченное, непрерывное отображение $U: V \rightarrow S \subset L_\infty(\Omega)$ является вполне непрерывным. В силу леммы 4.3 отображение $F + f - K$ также вполне непрерывно. Поэтому суперпозиция этих отображений и непрерывного отображения A^{-1} определяет вполне непрерывное отображение $C: V \rightarrow V$:

$$C(v) = A^{-1}(F + f - K(v), U(v)).$$

Уравнение (3.4) эквивалентно уравнению (5.1) и может быть записано в виде

$$v - C(v) = 0. \quad (5.2)$$

Исследование разрешимости этого уравнения выполним с помощью теории степени Лере–Шаудера.

Рассмотрим вспомогательное семейство операторных уравнений

$$v - C(\tau, v) = 0, \quad \tau \in [0, 1], \quad (5.2_\tau)$$

где $C(\tau, v) = A^{-1}(F + f - \tau K(v), \tau U(v))$. Это семейство эквивалентно семейству уравнений

$$N_1(v) + N_2(v, \tau U(v)) + \tau K(v) = f + F.$$

В силу теоремы 4.2 все решения этих уравнений удовлетворяют априорной оценке (4.6):

$$\|v\| \leq C_0 \quad (5.3)$$

с константой C_0 , не зависящей от τ . Поэтому уравнения (5.2 $_\tau$) не имеют решений на границе шара B_{C_0+1} в V радиуса $C_0 + 1$. Тогда для каждого из отображений $I - C(\tau, \cdot)$ определена степень Лере–Шаудера на шаре B_{C_0+1} :

$$\deg(I - C(\tau, \cdot), B_{C_0+1}, 0).$$

Отображение $C(\tau, v)$ определяет вполне непрерывную гомотопию, поэтому из свойств степени следует, что значения степени равны при всех τ :

$$\begin{aligned}\deg(I - C(1, \cdot), B_{C_0+1}, 0) &= \deg(I - C(0, \cdot), B_{C_0+1}, 0) \\ &= \deg(I - A^{-1}(F + f, 0), B_{C_0+1}, 0) \\ &= \deg(I, B_{C_0+1}, A^{-1}(F + f, 0)).\end{aligned}$$

Так как функция $\tilde{v} = A^{-1}(F + f, 0)$ удовлетворяет оценке (5.3) и, следовательно, содержится в шаре B_{C_0+1} , то

$$\deg(I, B_{C_0+1}, A^{-1}(F + f, 0)) = 1.$$

Тогда $\deg(I - C(1, \cdot), B_{C_0+1}, 0) = 1$. Отличие от нуля степени отображения обеспечивает существование решения уравнения (5.2). Полученное решение удовлетворяет оценке (5.3). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что в теореме 5.1 получен результат о слабой разрешимости краевой задачи для основной модели работы [2]. В самой же работе [2] соответствующая теорема разрешимости получена лишь для модели с модифицированным определяющим уравнением

$$\sigma_{ij} = 2[\varphi_1(U(v)) + \varphi_2(I(v), U(A(v)))] \mathcal{E}_{ij}(v),$$

где A – некоторый оператор усреднения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. Серия “Теоретическая физика”. Т. 6. М.: Наука, 1986.
- [2] Litvinov W. G. Some models and problems for laminar and turbulent flows of viscous and nonlinear viscous fluids // J. Math. Phys. Sci. 1996. V. 30. №3. P. 101–157.
- [3] Dmitrienko V. T., Zvyagin V. G. Topological degree method in the equations of the Navier–Stokes type // Abstract and Applied Analysis. 1997. V. 1–2. P. 1–45.
- [4] Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956.
- [5] Appell J., Zabrejko P. P. Nonlinear Superposition Operators: Cambridge Univ. Press, 1990.
- [6] Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.

(В. Т. Дмитриенко) Северодонецкий технологический институт
(В. Г. Звягин) Воронежский государственный университет

Поступило
08.10.1999