Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Карпунин, Минимальные сети на правильном n -мерном симплексе, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 6, 854–865

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm699>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 16:13:22

УДК 519.711.72

МИНИМАЛЬНЫЕ СЕТИ НА ПРАВИЛЬНОМ n -МЕРНОМ СИМПЛЕКСЕ

Г. А. Карпунин

Данная работа посвящена доказательству следующего факта: все простые, т.е. без вершин степени 2, деревья, затягивающие вершины правильного n -мерного симплекса, реализуются как невырожденные минимальные параметрические сети.

Библиография: 10 названий.

1. Введение

В данной работе изучаются минимальные параметрические сети в $\mathbb{R}^n$. *Минимальной параметрической сетью* называется сеть, доставляющая абсолютный минимум функционала длины на классе всех линейных сетей с заданной топологией и заданной границей (точные определения см. ниже).

Как было показано в работе автора [1] (см. также [2]), минимальные параметрические сети являются критическими точками функции длины ℓ на конфигурационном пространстве $\mathcal{H}$ всех линейных сетей, затягивающих данное граничное множество $\mathcal{A}$. Оценивая их индексы, можно подсчитать количество локальных минимумов функции ℓ на $\mathcal{H}$. Эти локальные минимумы являются локально минимальными сетями, затягивающими $\mathcal{A}$, т.е. такими сетями, каждый достаточно малый фрагмент которых абсолютно минимален.

Таким образом, изучение минимальных параметрических сетей тесно связано с кругом задач, объединенных под общим названием *обобщенная проблема Штейнера*. Обобщенная проблема Штейнера состоит в том, чтобы по заданному граничному множеству $\mathcal{A}$ описать все локально минимальные сети, затягивающие $\mathcal{A}$. В таком виде эта проблема впервые была сформулирована Ивановым и Тужилиным в [3]. В серии работ этих авторов обобщенная проблема Штейнера была хорошо изучена для случая плоскости $\mathbb{R}^2$. Однако, в случае $n > 2$ практически ничего неизвестно, кроме нескольких примеров, приведенных в работах [4] и [5].

Мы ограничимся рассмотрением локально минимальных сетей без циклов. Известно, что любую локально минимальную сеть без циклов можно однозначно разбить на локально минимальные подсети, топологии которых представляют собой бинарные деревья. Если граничное множество не фиксировано, то любое бинарное дерево может быть реализовано на плоскости как локально минимальная сеть (см. [3]). В случае же фиксированного граничного множества $\mathcal{A}$ это, вообще говоря, уже не так. Возникает естественный вопрос, поставленный Ивановым и Тужилиным в [3]: *существует ли*

универсальное граничное множество (т.е. такое множество $\mathcal{A}$, на котором любое бинарное дерево G , затягивающее $\mathcal{A}$, может быть реализовано как локально минимальная сеть)? Последнее означает, что существует локально минимальная сеть Γ с той же топологией и той же границей, что и дерево G .

В случае плоскости, $n = 2$, ответ, по-видимому, отрицательный. Например [1], для множества $\mathcal{A}$ общего положения, состоящего из четырех точек, локально минимальных сетей, затягивающих $\mathcal{A}$, может быть не более двух; хотя бинарных деревьев, затягивающих $\mathcal{A}$, – три. А для множества $\mathcal{A}$ общего положения, состоящего из пяти точек, локально минимальных сетей, затягивающих $\mathcal{A}$, может быть не более восьми; хотя бинарных деревьев, затягивающих $\mathcal{A}$, – пятнадцать.

Однако, для фиксированного количества граничных точек в размерности больше 2 такое универсальное множество уже существует. Иванов и Тужилин выдвинули гипотезу о том, что на граничном множестве $\mathcal{A}$, состоящем из вершин правильного n -мерного симплекса, любое бинарное дерево, затягивающее $\mathcal{A}$, может быть реализовано как локально минимальная сеть. Оказывается имеет место более сильный результат.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Любое простое, т.е. без вершин степени 2, дерево, затягивающее вершины правильного n -мерного симплекса, может быть реализовано как невырожденная минимальная параметрическая сеть.*

В случае бинарного дерева невырожденная минимальная параметрическая сеть является локально минимальной сетью.

Доказательству этой теоремы и посвящена данная работа.

Пользуясь случаем, автор выражает глубокую благодарность д.ф.-м.н. А.О. Иванову и д.ф.-м.н. А.А. Тужилину за постановку задач и помощь в работе.

2. Основные определения

Напомним основные определения из общей теории минимальных сетей (большая часть из этих определений взята из [6] и [7]).

2.1. Топологические графы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Топологическим графом G назовем произвольный конечный одномерный клеточный комплекс с фиксированным клеточным разбиением. Клетки размерности 0 называются вершинами графа G , а клетки размерности 1 – ребрами.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Ясно, что мы получили топологическое представление абстрактных графов самого общего вида, т.е. графов с петлями и кратными ребрами, поэтому на топологические графы непосредственно переносится вся терминология как теории абстрактных графов, так и теории топологических пространств. Поэтому далее в силу отмеченного соответствия между топологическими и абстрактными графами мы часто для краткости будем называть топологические графы просто графами, опуская слово “топологический”.

Пусть e – ребро графа G . Объявим все точки ребра e в графе G эквивалентными. Про фактор-граф $\tilde{G} = G/e$ будем говорить, что он получен из G *редукцией по ребру e* .

Предположим, что в графе G выделено некоторое подмножество M множества его вершин. Пару (G, M) мы будем называть *графом с границей M* . Иногда, неформально мы будем говорить, что граф G *имеет границу M* , и обозначать ее ∂G .

Вершины из ∂G будем называть *граничными* или *неподвижными*, а все остальные вершины графа G – *внутренними* или *подвижными*. Ребра, инцидентные граничным вершинам, называются *граничными*, а все остальные ребра графа G – *внутренними*.

Пусть G – произвольный граф с границей ∂G (возможно, пустой) и $P \in G$ – некоторая его точка (P не обязательно является вершиной графа G , см. замечание выше). *Допустимой окрестностью* $U \subset G$ точки P графа G называется замыкание связной окрестности этой точки, не содержащее вершин графа G , отличных от P , если P – вершина, и не содержащее петель из G .

Наделим допустимую окрестность U структурой графа, объявив вершинами все точки из $\partial U \cup \{P\}$, а ребрами отрезки в U , соединяющие эти точки. Полученное дерево обозначим через G_U и будем называть *локальным графом с центром в точке P* . Определим *каноническую границу* ∂G_U локального графа G_U , включив в нее все вершины из ∂U , а также вершину P , если P – граничная вершина графа G .

2.2. Параметрические сети.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть G – связный граф. Кусочно-гладкое отображение Γ графа G в плоскость $\mathbb{R}^2$ называется *параметрической сетью* (или просто *сетью*), а подмножество плоскости, совпадающее с образом $\text{Im } \Gamma$, называется *следом* параметрической сети Γ . При этом граф G называется *параметризующим графом сети Γ* , а класс графов, изоморфных G , называется *топологией сети Γ* .

Ограничение отображения Γ на вершину графа G назовем *вершиной*, а ограничение Γ на ребро графа G назовем *ребром* этой параметрической сети. Под *длиной сети* будем понимать сумму длин входящих в нее ребер.

Далее мы будем использовать следующие обозначения: $\Gamma[G]$ – сеть с параметризующим графом G , $\Gamma[e]$ – ребро сети $\Gamma[G]$, соответствующее ребру e графа G .

Пусть $\Gamma[G]$ – параметрическая сеть и ∂G – граница графа G . Ограничение отображения Γ на ∂G является подмножеством множества вершин сети Γ , которое мы назовем *границей сети Γ* и обозначим $\partial \Gamma$. При этом если $\mathcal{A}$ – произвольное конечное подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$ и Γ – сеть с границей $\partial \Gamma$, образ которой совпадает с $\mathcal{A}$, то будем говорить, что сеть Γ *затягивает множество $\mathcal{A}$* по граничному отображению $\partial \Gamma$. Подмножество $\mathcal{A}$ называется *граничным множеством* для сети Γ .

Вершины сети Γ , принадлежащие границе $\partial \Gamma$, называются *граничными* или *неподвижными*, а все остальные вершины из Γ – *внутренними* или *подвижными*. Ребра сети, инцидентные граничным вершинам, будем также называть *граничными*, а ребра, не инцидентные никаким граничным вершинам, назовем *внутренними*.

Пусть опять $\Gamma[G]$ – произвольная сеть, P – любая точка графа G и G_U – локальный граф с центром в P . Сеть с границей, равной ограничению отображения Γ на G_U , называется *локальной сетью с центром в точке P* и обозначается через Γ_U . При этом ограничение отображения Γ на каноническую границу ∂G_U локального графа G_U называется *канонической границей* локальной сети Γ_U и обозначается через $\partial \Gamma_U$.

2.3. Локально минимальные сети.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Сеть Γ , затягивающая конечное множество $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ точек плоскости $\mathbb{R}^2$, называется *абсолютно минимальной*, если ее длина наименьшая среди длин всех сетей, затягивающих $\mathcal{A}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Сеть Γ , затягивающая множество $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$, называется *локально минимальной*, если для любой ее точки P некоторая локальная сеть с центром в P является абсолютно минимальной сетью.

Ребро $\Gamma[e]$ сети $\Gamma[G]$ называется *вырожденным*, если его длина равна 0. Соответствующее ребро e графа G также называется *вырожденным*. Очевидно, что вырожденное ребро e целиком переводится отображением Γ в точку. Сети, не имеющие вырожденных ребер, назовем *невыврожденными*.

Следующая теорема (доказательство см., например, в [8]) полностью описывает локальное устройство невырожденных локально минимальных сетей.

ТЕОРЕМА 2.1. *Невырожденная сеть Γ с границей $\mathcal{A}$ локально минимальна, если и только если выполнены следующие условия:*

- 1) *ребра сети Γ – прямолинейные отрезки;*
- 2) *угол между любыми двумя смежными ребрами не меньше 120° ;*
- 3) *все вершины степени 1 являются граничными;*
- 4) *если вершина степени 2 не граничная, то угол между выходящими из нее ребрами равен 180° .*

Условия 1), 3) и 4) типичны для критериев различных понятий минимальности сетей. Эти условия мотивируют изначальные ограничения, накладываемые на классы рассматриваемых сетей, и следующие ниже определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Сеть Γ называется *линейной*, если все ее ребра – прямолинейные отрезки. Множество всех линейных сетей Γ с фиксированной топологией G , граничным множеством $\mathcal{A}$ и граничным отображением $b: \partial G \rightarrow \mathcal{A}$ обозначим через $\mathcal{L}[G, \mathcal{A}, b]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Связный топологический граф, являющийся деревом и не имеющий вершин степени 2, называется *простым деревом*. В данной работе, если не оговорено противное, все рассматриваемые параметризующие графы сетей будут предполагаться простыми деревьями.

Как следует из условия 2) теоремы 2.1, степень любой вершины невырожденной локально минимальной сети не больше 3. Выделим среди простых деревьев один важный класс графов, называемых *бинарными деревьями* (или *2-деревьями*), у которых любая вершина имеет степень 1 или 3.

Будем считать, что у всех простых деревьев все вершины степени 1 являются *граничными*, а остальные – *подвижными*.

2.4. Критерий минимальности параметрической сети. Пусть $\Gamma[G]$ – параметрическая сеть и $\Gamma[e]$ – вырожденное ребро сети Γ . Пусть также граф $\tilde{G}$ получен из графа G редукцией по ребру e . Тогда корректно определено отображение $\tilde{\Gamma}[\tilde{G}]$ такое, что $\tilde{\Gamma} \circ \pi = \Gamma$, где $\pi: G \rightarrow \tilde{G}$ – стандартная проекция на фактор-пространство. Ясно, что $\tilde{\Gamma}$ – кусочно-гладкое и поэтому определяет параметрическую сеть $\tilde{\Gamma}[\tilde{G}]$. Мы будем говорить, что сеть $\tilde{\Gamma}$ получена из сети Γ *редукцией по вырожденному ребру $\Gamma[e]$* . След сети $\tilde{\Gamma}$ совпадает, очевидно, со следом сети Γ .

Связные компоненты множества всех вырожденных ребер графа G назовем *компонентами вырождения* параметризующего графа сети Γ . Каждая компонента вырождения, очевидно, является подграфом в G , целиком отображающимся в точку. Ясно, что две различные компоненты вырождения графа G не пересекаются.

Проредуцируем теперь сеть Γ по всем вырожденным ребрам. Полученную сеть $\tilde{\Gamma}$ будем называть *приведенной параметрической сетью* для сети Γ . Приведенная сеть уже не содержит вырожденных ребер. След приведенной сети $\tilde{\Gamma}$ совпадает, очевидно, со следом сети Γ .

Пусть Γ – параметрическая сеть с некоторой границей $\partial\Gamma: \partial G \rightarrow \mathbb{R}^2$ и $\tilde{\Gamma}$ – соответствующая приведенная сеть. Вершину приведенной сети назовем *подвижной*, если ее прообраз при редукции содержит хотя бы одну подвижную вершину сети Γ ; вершину приведенной сети назовем *чисто подвижной*, если ее прообраз при редукции не содержит граничных вершин сети Γ . Остальные вершины сети $\tilde{\Gamma}$ будут считаться *граничными*.

Определим еще одно понятие – понятие ветки дерева. Выкинем из множества ребер дерева G какое-нибудь произвольное ребро e . Тогда G распадется на два поддерева G_1 и G_2 , которые мы и будем называть *ветками* дерева G , *инцидентными* ребру e .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Линейная сеть $\Gamma \in \mathcal{L}[G, \mathcal{A}, b]$ называется *минимальной параметрической сетью*, если она является точкой абсолютного минимума функции длины среди всех сетей из класса $\mathcal{L}[G, \mathcal{A}, b]$.

Сформулируем теперь критерий того, что данная линейная сеть Γ является минимальной параметрической (доказательство см. в [1]). Обозначим через $G_d^{\tilde{v}}$ компоненту вырождения вершины $\tilde{v} \in \tilde{\Gamma}$, а через N_v сумму единичных направляющих векторов невырожденных ребер, выходящих из вершины $v \in \Gamma$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. Для того чтобы Γ была минимальной параметрической сетью, необходимо и достаточно, чтобы для каждой подвижной вершины $\tilde{v}$ приведенной сети $\tilde{\Gamma}$ выполнялось следующее условие: для каждой ветки G_b дерева $G_d^{\tilde{v}}$, не содержащей граничной вершины графа G , имеет место оценка

$$\left| \sum_{v \in G_b} N_v \right| \leq 1.$$

Если $\tilde{v}$, к тому же, является чисто подвижной вершиной, то

$$\sum_{v \in G_d^{\tilde{v}}} N_v = 0.$$

3. Основная теорема

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что граф G *затягивает* множество $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^2$, если задано граничное отображение $b: \partial G \rightarrow \mathcal{A}$. Граф G , *затягивающий* множество $\mathcal{A}$, *реализуется как сеть*, обладающая свойством $\mathfrak{P}$, если существует сеть Γ топологии G с $\partial\Gamma = b: \partial G \rightarrow \mathcal{A}$, также обладающая свойством $\mathfrak{P}$.

Далее мы будем иметь дело со свойством сети быть невырожденной минимальной параметрической сетью.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Любое простое дерево, затягивающее вершины правильного n -мерного симплекса, может быть реализовано как невырожденная минимальная параметрическая сеть.

Поскольку, как следует из теоремы 2.1 и утверждения 2.1, в случае бинарных деревьев невырожденная минимальная параметрическая сеть является локально минимальной, то из основной теоремы мы получаем следствие.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Любое бинарное дерево, затягивающее вершины правильного n -мерного симплекса, может быть реализовано как невырожденная локально минимальная сеть.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ. 3.1. Приведем здесь идею доказательства, детали которого излагаются, начиная с п. 3.2. Очевидно, что любое простое дерево G может быть реализовано как минимальная параметрическая сеть в соответствующем классе линейных сетей $\mathcal{L}[G, \mathcal{A}, b]$. Однако, у такой сети, вообще говоря, могли бы быть вырожденные ребра. Покажем, что в случае, когда граничное множество состоит из вершин правильного n -мерного симплекса, все ребра невырожденные.

Доказательство будет вестись от противного. Пусть Γ – некоторая минимальная параметрическая сеть, затягивающая вершины правильного n -мерного симплекса Δ . Предположим, что у сети Γ имеются вырожденные ребра, через $e = (uv)$ обозначим одно из них. Рассмотрим две ветки $\Gamma_u \ni u$ и $\Gamma_v \ni v$, инцидентные этому ребру. Через Δ_u обозначим грань симплекса Δ , образованную граничными вершинами, принадлежащими ветке Γ_u , а через Δ_v обозначим грань симплекса Δ , образованную граничными вершинами, принадлежащими ветке Γ_v . Единичные направляющие векторы невырожденных ребер, принадлежащих ветке Γ_u и инцидентных компоненте вырождения ребра e , “смотрят” в грань Δ_u , а единичные направляющие векторы невырожденных ребер, принадлежащих ветке Γ_v и инцидентных компоненте вырождения ребра e , “смотрят” в грань Δ_v (лемма 3.1). Одна из сумм этих единичных векторов, соответствующих вершине u или вершине v , по модулю будет строго больше 1 (следствие утверждения 3.1), что противоречит критерию минимальности параметрических сетей (теорема 2.1).

3.2. Пусть e – единичный направляющий вектор некоторого невырожденного ребра, инцидентного компоненте вырождения, содержащей вершину u .

ЛЕММА 3.1. Луч, проведенный через вершину u в направлении вектора e , пересекает грань Δ_u .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим приведенную ветку $\tilde{\Gamma}_u$. Ветку $\tilde{\Gamma}_u$ рассматриваем как дерево с корнем $\tilde{u}$, где $\tilde{u}$ – естественная проекция вершины u .

Далее проведем индукцию снизу вверх по глубине вершины $\tilde{u}'$ в ветке $\tilde{\Gamma}_u$. Пусть $\tilde{u}''$ – некоторая вершина глубины k , а e'' – направляющий вектор некоторого ребра, соединяющего вершину $\tilde{u}''$ с вершиной глубины $k + 1$. Предположим, что для всех таких вершин $\tilde{u}''$ и векторов e'' доказано, что луч, проведенный через вершину $\tilde{u}''$ в направлении вектора e'' , пересекает грань Δ_u .

Заметим, что, если некоторый вектор e' равняется сумме всех единичных направляющих векторов ребер, соединяющих вершину $\tilde{u}''$ с вершинами глубины $k + 1$, то луч, проведенный через вершину $\tilde{u}''$ в направлении вектора e' , также пересекает грань Δ_u .

Возьмем вершину $\tilde{u}'$ глубины $k - 1$. Пусть e' – единичный направляющий вектор ребра, соединяющего вершину $\tilde{u}'$ с вершиной $\tilde{u}''$ глубины k . Согласно критерию минимальности параметрических сетей (теорема 2.1) вектор e' будет равен сумме всех единичных направляющих векторов ребер, соединяющих вершину $\tilde{u}''$ с вершинами глубины $k + 1$. Следовательно, луч, проведенный через вершину $\tilde{u}'$ в направлении вектора e' , будет проходить и через вершину $\tilde{u}''$ в направлении вектора e' и по уже доказанному будет пересекать грань Δ_u .

Двигаясь так снизу (с самых глубоких вершин) вверх, мы за конечное число шагов доберемся и до вершины $\tilde{u}$. Лемма доказана.

3.3. Обозначим через s_u и s_v суммы единичных направляющих векторов невырожденных ребер, инцидентных компонентам вырождения вершин u и v в ветках Γ_u и Γ_v соответственно. Тогда согласно критерию минимальности параметрической сети (теорема 2.1) имеют место неравенства $|s_u| \leq 1$ и $|s_v| \leq 1$.

Отвлечемся от минимальной параметрической сети и немного упростим картину. Поскольку мы предположили, что ребро (uv) вырожденное, то точки, соответствующие вершинам u и v , совпадают в пространстве $\mathbb{R}^n$. Обозначим через O точку их совпадения. Проведем из точки O лучи в направлениях невырожденных ребер, инцидентных компонентам вырождения вершин u и v . Согласно лемме 3.1 те лучи, которые отвечают ребрам, связанным с вершиной u , пересекут грань Δ_u , а те лучи, которые отвечают ребрам, связанным с вершиной v , пересекут грань Δ_v . Ограничимся рассмотрением отрезков этих лучей от точки O до пересечений с гранями.

Забудем теперь про сеть Γ , и тогда у нас останется следующая картина. Из точки O выходят две совокупности отрезков: $OU_1, \dots, OU_r$, вторые концы которых лежат в грани Δ_u , и $OV_1, \dots, OV_m$, вторые концы которых лежат в грани Δ_v . Отметим, что сумма единичных направляющих векторов отрезков, относящихся к грани Δ_u , равна s_u , а сумма единичных направляющих векторов отрезков, относящихся к грани Δ_v , равна s_v . Напомним, что $|s_u| \leq 1$ и $|s_v| \leq 1$. Чтобы прийти к противоречию, покажем, что одновременно оба эти неравенства выполняются не могут.

3.4. Далее, если не оговорено противное, расстояние между вершинами правильного симплекса будет считаться равным $\sqrt{2}$ (удобно считать вершинами правильного симплекса концы единичных векторов стандартного ортонормированного базиса). Центром правильного симплекса мы будем называть его центр масс.

Приведем здесь формулировку ключевой леммы, доказательство которой будет дано в разделе 4.

Пусть дан правильный $(q - 1)$ -мерный симплекс Δ в пространстве $\mathbb{R}^n$. Проведем гиперплоскость π , параллельную симплексу Δ , через d обозначим расстояние между ними. Рассмотрим произвольную точку O на плоскости π и проведем из нее k отрезков, оканчивающихся в симплексе Δ , $k \leq q$. Пусть вектор s равен сумме единичных направляющих векторов этих отрезков. Обозначим через O' точку на плоскости π , ближайшую к центру C какой-нибудь $(k - 1)$ -мерной грани Δ' симплекса Δ . Заметим, что длина отрезка CO' равна d , и он перпендикулярен как плоскости π , так и симплексу Δ' .

ЛЕММА 3.2. *Минимум модуля вектора s , взятый по всем расположениям точки O на гиперплоскости π и по всем расположениям вторых концов отрезков в*

симплексе Δ , равен

$$\min |s| = \sqrt{\frac{k^3 d^2}{k - 1 + kd^2}}.$$

Он достигается, например, в ситуации, когда точка O совпадает с O' , а вторые концы k отрезков совпадают с различными вершинами грани Δ' .

3.5. Выберем произвольно $(r-1)$ -мерную подгрань Δ'_u в грани Δ_u и $(m-1)$ -мерную подгрань Δ'_v в грани Δ_v . Обозначим через U и V центры граней Δ'_u и Δ'_v соответственно. Несложно проверить, что прямая (UV) перпендикулярна обоим этим граням. Проведем теперь через точку O гиперплоскость π перпендикулярно прямой (UV) . Тогда π будет параллельна как грани Δ'_u , так и грани Δ'_v . Пусть O' – точка пересечения гиперплоскости π и прямой (UV) .

Применим лемму 3.2 к грани Δ_u (здесь она выступает в качестве самостоятельного правильного симплекса) и совокупности отрезков $OU_1, \dots, OU_r$, чтобы минимизировать модуль вектора s_u . Для этого заменим отрезки $OU_1, \dots, OU_r$ совокупностью отрезков $O'U'_1, \dots, O'U'_r$, где $U'_1, \dots, U'_r$ – различные вершины грани Δ'_u . Соответствующая сумма единичных направляющих векторов отрезков $O'U'_1, \dots, O'U'_r$, которую мы обозначим через s'_u , будет по модулю не больше модуля вектора s_u , $|s'_u| \leq |s_u| \leq 1$.

Аналогично, заменим отрезки $OV_1, \dots, OV_m$ совокупностью отрезков $O'V'_1, \dots, O'V'_m$, где $V'_1, \dots, V'_m$ – различные вершины грани Δ'_v . Обозначим через s'_v соответствующую сумму единичных направляющих векторов отрезков $O'V'_1, \dots, O'V'_m$. Тогда, как следует из леммы 3.2, модуль вектора s'_v будет не больше модуля вектора s_v , $|s'_v| \leq |s_v| \leq 1$.

Ограничимся теперь рассмотрением отрезков $O'U'_1, \dots, O'U'_r, O'V'_1, \dots, O'V'_m$ и симплекса Δ' , образованного вершинами $U'_1, \dots, U'_r, V'_1, \dots, V'_m$. Дальнейшая наша цель – показать, что одновременное выполнение двух неравенств $|s'_u| \leq 1$ и $|s'_v| \leq 1$ невозможно.

3.6. Рассмотрим $(q'-1)$ -мерный правильный симплекс Δ' и точку O' на серединном перпендикуляре к Δ' . Обозначим через d расстояние от O' до Δ . Соединим точку O' отрезком с каждой вершиной симплекса Δ' . Пусть s – сумма единичных направляющих векторов этих q' отрезков, направленных к вершинам симплекса. Согласно второму утверждению леммы 3.2 модуль вектора s равен $\sqrt{q'^3 d^2 / (q' - 1 + q' d^2)}$. Из этой формулы мы видим, что $|s|$ монотонно возрастает с ростом d . Найдём такое $d(q')$, при котором $|s| = 1$. Имеем

$$d(q') = \frac{1}{\sqrt{q'(q' + 1)}}.$$

Это расстояние мы назовем *критическим*.

ЛЕММА 3.3. Сумма критического расстояния до грани Δ'_u и критического расстояния до грани Δ'_v строго меньше длины отрезка UV .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть грань Δ'_u имеет размерность $r-1$, а грань Δ'_v – размерность $m-1$. Тогда длина отрезка UV равна $\sqrt{(r+m)/(rm)}$; а критические расстояния до граней Δ'_u и Δ'_v равны $1/\sqrt{r(r+1)}$ и $1/\sqrt{m(m+1)}$ соответственно. Нужно доказать, что

$$\frac{1}{\sqrt{r(r+1)}} + \frac{1}{\sqrt{m(m+1)}} < \sqrt{\frac{r+m}{rm}}.$$

Делая элементарные преобразования, легко показать, что это неравенство эквивалентно неравенству

$$4(rm + r + m + 1) < rm((r - m)^2 + 4(rm + r + m + 1)),$$

которое всегда верно, если хотя бы одно из чисел r, m строго больше 1. Лемма доказана.

3.7. Из определения критического расстояния в п. 3.6 и леммы 3.3 непосредственно следует утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *Для любой точки O' , принадлежащей отрезку UV , хотя бы один из векторов s'_u или s'_v по модулю строго больше 1.*

Учитывая утверждение 3.1 и неравенства $|s'_u| \leq |s_u|$ и $|s'_v| \leq |s_v|$ из п. 3.5, получаем, что хотя бы один из векторов s_u или s_v по модулю строго больше 1. Таким образом, мы пришли к противоречию с критерием минимальности параметрических сетей (теорема 2.1) и доказали основную теорему.

4. Доказательство леммы 3.2

4.1. Поскольку точки $U_1, \dots, U_k$ принадлежат правильному симплексу со стороной $\sqrt{2}$, то очевидно, что попарные расстояния между ними не больше $\sqrt{2}$. Можно считать, что все эти k точек лежат в некотором $(k - 1)$ -мерном шаре, в который можно вписать правильный $(k - 1)$ -мерный симплекс со стороной $\sqrt{2}$. Радиус такого шара равен $\sqrt{2}\sqrt{(k - 1)/(2k)}$. В самом деле, достаточно воспользоваться теоремой Юнга [9] (см. также [10, с. 111]).

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть D — подмножество диаметра w в $\mathbb{R}^{k-1}$. Существует $(k - 1)$ -мерный шар радиуса $w\sqrt{(k - 1)/(2k)}$, который содержит подмножество D .*

4.2. Рассмотрим теперь вспомогательную задачу. Пусть B — $(k - 1)$ -мерный шар радиуса R в пространстве $\mathbb{R}^n$. Проведем на расстоянии d от шара B параллельную ему гиперплоскость π . Рассмотрим произвольную точку O на плоскости π и проведем из нее k отрезков $OU_1, \dots, OU_k$, оканчивающихся в шаре. Пусть вектор s равен сумме единичных направляющих векторов этих отрезков. Обозначим через O' точку на плоскости π , ближайшую к центру U . Заметим, что длина отрезка UO' равна d и он перпендикулярен как плоскости π , так и шару B .

ЛЕММА 4.1. *Минимум модуля вектора s , взятый по всем расположениям точки O на гиперплоскости π и по всем расположениям точек $U_1, \dots, U_k$ в шаре B , равен*

$$\min |s| = \sqrt{\frac{k^2 d^2}{R^2 + d^2}}.$$

Он достигается, например, в ситуации, когда точка O совпадает с O' , а точки $U_1, \dots, U_k$ образуют правильный $(k - 1)$ -мерный симплекс, вписанный в B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что нам достаточно доказать лемму 4.2 в случае, когда $n = k$. В самом деле, гиперплоскость π расслаивается на $(k - 1)$ -мерные аффинные подпространства, параллельные шару B . Для каждого такого аффинного подпространства решаем задачу минимизации модуля вектора s . Ответ в каждой отдельной задаче зависит только от расстояния между шаром B и аффинным подпространством, причем минимальное значение модуля вектора s является монотонно возрастающей функцией от этого расстояния. Следовательно, минимум в целом будет достигаться тогда, когда точка O принадлежит ближайшему к шару аффинному подпространству.

Покажем, что можно свести задачу к случаю, когда точка O фиксирована и совпадает с O' , а вторые концы отрезков $U_1, \dots, U_k$, как и раньше, произвольно расположены в шаре B .

Рассмотрим конус C над шаром B с вершиной в точке O . Все направляющие векторы отрезков $OU_1, \dots, OU_k$ лежат в конусе C . Граница ∂C этого конуса, которая также является конусом, но над границей шара B , представляет собой поверхность второго порядка. Ее ось симметрии обозначим через (OM) , $M \in B$. Если провести двумерную плоскость σ через прямую (OM) , то в пересечении σ с ∂C образуется угол и $[OM]$ будет его биссектрисой.

Проведем через точку K , находящуюся на луче $[OM]$ на расстоянии d от точки O , гиперплоскость π_1 , перпендикулярную лучу $[OM]$. Рассмотрим в гиперплоскости π_1 шар B_1 с центром в точке K и радиусом R . Конус с вершиной в точке O над шаром B_1 обозначим через C_1 , а его границу, также являющуюся конусом, но над границей шара B_1 , — через ∂C_1 .

Рис. 1

Покажем, что C лежит внутри C_1 . Рассмотрим точку $P \in B$ и проведем через нее и прямую (OM) двумерную плоскость σ (см. рис. 1). Достаточно показать, что $\operatorname{tg} \beta \leq \frac{R}{d}$. В обозначениях рис. 1

$$\begin{aligned} OH = d, \quad PH - P'H = PP' = 2R, \\ P'H = d \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta \right), \quad PH = d \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \beta \right), \quad OM = \frac{d}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем равенство

$$\frac{(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg}^2 \beta - \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{R}{d}.$$

Учитывая это равенство и тот факт, что при $\pi/2 > \alpha > \beta > 0$ выполнено $\operatorname{ctg}^2 \beta - \operatorname{ctg}^2 \alpha > 0$, после элементарных преобразований получим, что доказываемое неравенство $\operatorname{tg} \beta \leq R/d$ эквивалентно неравенству

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \beta + \operatorname{ctg}^2 \alpha \geq 0.$$

Последнее неравенство, очевидно, выполняется при всех α и β .

Поскольку нас интересует сумма единичных направляющих векторов отрезков, которые лежат в конусе C , а значит, и в C_1 , то исходная задача на минимум эквивалентна задаче, в которой точка O фиксирована и совпадает с O' , а вторые концы отрезков, как и раньше, произвольно расположены в шаре B .

Можно считать, что вторые концы отрезков $U_1, \dots, U_k$ лежат на границе шара B . В самом деле, предположим, что конец какого-то отрезка лежит не на границе шара. Обозначим через e направляющий единичный вектор этого отрезка, а через s' сумму всех остальных направляющих векторов отрезков. Тогда этот отрезок можно пошевелить так, чтобы увеличить угол между e и s' , а значит, уменьшить модуль их суммы, т.е. уменьшить модуль вектора s . Следовательно, такое расположение не минимизирует модуль вектора s .

Наша задача минимизации сводится к задаче минимизации модуля вектора s в случае, когда отрезки исходят не из точки O' , а из центра U шара B . Покажем это и получим ответ.

Введем для краткости обозначения: $u_i = \overrightarrow{O'U_i}$, $e_i = u_i/|u_i|$, $x_i = \overrightarrow{UU_i}$. Тогда $u_i = x_i + \overrightarrow{O'U}$, $|x_i| = R$, $|\overrightarrow{O'U}| = d$. А поскольку $x_i \perp \overrightarrow{O'U}$, то $|u_i| = \sqrt{R^2 + d^2}$. Расписывая теперь $|s|^2$, получим

$$\begin{aligned} |s|^2 &= |e_1 + \dots + e_k|^2 = \sum_{i,j} \frac{\langle u_i, u_j \rangle}{|u_i||u_j|} = \frac{1}{R^2 + d^2} \sum_{i,j} \langle u_i, u_j \rangle \\ &= \frac{1}{R^2 + d^2} \sum_{i,j} (\langle x_i, x_j \rangle + d^2) = \frac{k^2 d^2}{R^2 + d^2} + \frac{1}{R^2 + d^2} \sum_{i,j} \langle x_i, x_j \rangle \\ &= \frac{k^2 d^2}{R^2 + d^2} + \frac{1}{R^2 + d^2} |x_1 + \dots + x_k|^2. \end{aligned}$$

Минимум выражения $|x_1 + \dots + x_k|^2$ равен 0, и достигается он, в частности, когда концы векторов x_i , т.е. точки $U_1, \dots, U_k$, являются вершинами правильного симплекса.

4.3. Подставляя теперь в лемме из п. 4.2 вместо R выражение $\sqrt{2}\sqrt{(k-1)/(2k)}$ из теоремы Юнга 4.1, получим утверждение основной леммы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Карпунин Г. А. Аналог теории Морса для плоских линейных сетей и обобщенная проблема Штейнера // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 2. С. 64–90.
- [2] Карпунин Г. А. Аналог теории Морса для плоских линейных сетей и обобщенная проблема Штейнера // Дополнение 2 к книге. Иванов А. О., Тужилин А. А. Разветвленные геодезические. Геометрическая теория локально минимальных сетей. Lewiston: The Edwin Mellen Press, 1999. С. 388–407.
- [3] Иванов А. О., Тужилин А. А. Геометрия минимальных сетей и одномерная проблема Плато // УМН. 1992. Т. 47. № 2. С. 53–115.
- [4] Gilbert E. N., Pollak H. O. Steiner minimal trees // SIAM J. Appl. Math. 1968. V. 16. P. 1–29.
- [5] Smith W. D. How to find Steiner minimal trees in Euclidean d -space // Algorithmica. 1992. V. 7. P. 137–177.
- [6] Иванов А. О., Тужилин А. А. Геометрия множества минимальных сетей данной топологии с фиксированной границей // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. № 6. С. 119–152.
- [7] Иванов А. О. Геометрические свойства локально минимальных сетей. Дисс. ... д.ф.-м.н. М.: МГУ, 1998.
- [8] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Minimal Networks. The Steiner Problem and Its Generalizations. Boca Raton: CRC Press, 1994.
- [9] Jung H. W. E. Ueber die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschliesst // J. Reine Angew. Math. 1901. V. 123. P. 241–257.
- [10] Eggleston H. G. Convexity. Cambridge Tracts in Math. and Math. Phys. V. 47. Cambridge, 1992.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: karpunin@mccme.ru, grkarpun@mech.math.msu.su

Поступило
11.04.2000