Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Дюкарев, О критериях неопределенности матричной проблемы моментов Стильтеса, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 1, 71–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm7>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 11:50:55

УДК 517.5

О КРИТЕРИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ МАТРИЧНОЙ ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ СТИЛТЬЕСА

Ю. М. Дюкарев

В этой статье получены критерии неопределенности матричной проблемы моментов Стильтеса. Найдены явные формулы для параметров Стильтеса и исследована мультипликативная структура резольвентной матрицы. В неопределенном случае изучены аналитические свойства резольвентной матрицы проблемы моментов. В терминах дробно-линейных преобразований над стилтьесовскими парами дано описание множества всех матриц-функций, ассоциированных с неопределенной проблемой моментов Стильтеса.

Библиография: 14 названий.

1. Введение. Пусть дано целое число $m \geq 1$. Символом $\mathbb{C}^{m \times m}$ обозначим множество комплексных квадратных матриц m -го порядка, а символом $\mathbb{C}_H^{m \times m}$ – множество эрмитовых матриц m -го порядка. Эрмитова матрица $A \in \mathbb{C}_H^{m \times m}$ называется *неотрицательной*, если $(f, Af) \geq 0 \quad \forall f \in \mathbb{C}^m$. Символом $\mathbb{C}_{\geq}^{m \times m}$ обозначим множество эрмитовых неотрицательных матриц m -го порядка. Неотрицательная матрица $A \in \mathbb{C}_{\geq}^{m \times m}$ называется *строго положительной*, если $(f, Af) > 0$ для всех ненулевых векторов $f \in \mathbb{C}^m$. Символом $\mathbb{C}_{>}^{m \times m}$ обозначим множество эрмитовых строго положительных матриц m -го порядка. Кроме того, введем обозначения $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$, $\mathbb{R}_- = \{t \in \mathbb{R} : t < 0\}$, $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$, $\mathbb{C}_{\pm} = \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$.

В статье рассмотрена матричная проблема моментов Стильтеса, в которой по заданной последовательности матриц $s_0, \dots, s_k, \dots \in \mathbb{C}_H^{m \times m}$ требуется описать множество монотонно возрастающих матриц-функций (МФ) $\sigma: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}_H^{m \times m}$ таких, что

$$s_j = \int_0^{+\infty} t^j d\sigma(t) \quad \forall j \geq 0. \quad (1)$$

Можем считать, не изменяя значений интегралов, что МФ σ удовлетворяет следующим условиям нормировки: $\sigma(t)$ непрерывна слева при $t \in (0, +\infty)$ и $\sigma(0) = 0$. Множество нормированных решений σ проблемы моментов (1) обозначим символом $\mathcal{M}_{\infty}$. С каждой $\sigma \in \mathcal{M}_{\infty}$ свяжем МФ

$$s(z) = \int_0^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{t - z}. \quad (2)$$

МФ s определена и голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ и называется *ассоциированной* с проблемой моментов (1). Множество МФ s , ассоциированных с проблемой (1), обозначим символом $\mathcal{F}_{\infty}$. Из формулы обращения Стильтеса следует, что соответствие, устанавливаемое

между $\mathcal{F}_\infty$ и $\mathcal{M}_\infty$ формулой (2), является взаимно однозначным. Поэтому вместо описания множества $\mathcal{M}_\infty$ мы можем ограничиться описанием множества $\mathcal{F}_\infty$.

В неопределенном случае (см. определение 5) существует бесконечно много решений проблемы моментов (1) и множество ассоциированных МФ $\mathcal{F}_\infty$ описывается в терминах дробно-линейных преобразований. Матрица коэффициентов такого дробно-линейного преобразования называется *резольвентной матрицей*.

Приведем краткое описание основных результатов статьи.

1. Теорема 6 является критерием неопределенности проблемы моментов (1). Этот критерий является новым даже для скалярного случая ($m = 1$).

2. Теорема 8 дает еще один критерий неопределенности проблемы (1). Этот критерий является обобщением на матричный случай классического критерия, принадлежащего Стильтесу [1]. Он сформулирован в терминах параметров Стильтеса M_j и L_j . Ранее были известны лишь неявные (рекурсивные) процедуры нахождения этих параметров. Полученные в статье явные формулы (37), связывающие параметры M_j и L_j с исходными моментами, являются новыми даже для скалярного случая.

3. Теоремы 9 и 10 показывают, что элементы резольвентной матрицы неопределенной проблемы моментов (1) являются целыми функциями не выше первого порядка минимального экспоненциального типа. Особо отметим простое доказательство теоремы 10. Для скалярного случая эти теоремы доказаны, например, в [2].

4. Теорема 12 дает описание в неопределенном случае множества $\mathcal{F}_\infty$ в терминах дробно-линейных преобразований.

5. К основным результатам относятся формулы (16), (27) и (29), играющие ключевую роль в этой статье. Эти формулы отражают некоторые фундаментальные свойства матричной проблемы моментов Стильтеса. Они не имеют аналогов в проблеме моментов Гамбургера.

2. Усеченная проблема моментов Стильтеса. Вместе с бесконечной проблемой моментов (1) будем рассматривать и усеченные матричные проблемы моментов Стильтеса. В таких проблемах фиксируется число $k \geq 0$ и требуется описать все нормированные монотонно возрастающие МФ $\sigma: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}_H^{m \times m}$ и матрицы $M \in \mathbb{C}_{\geq}^{m \times m}$ такие, что

$$s_j = \int_0^{+\infty} t^j d\sigma(t), \quad 0 \leq j \leq k-1, \quad s_k = \int_0^{+\infty} t^k d\sigma(t) + M. \quad (3)$$

При $k = 0$ требуем выполнения только второго условия в (3). Матрица M в (3) позволяет учесть возможный скачок МФ σ в бесконечности (см. [3]).

Проблема моментов (3) называется *k-й усеченной проблемой моментов Стильтеса*, а множество ее решений σ обозначается символом $\mathcal{M}_k$. Ясно, что $\mathcal{M}_\infty = \bigcap_{k=0}^\infty \mathcal{M}_k$. Как и в случае проблемы моментов (1), с каждой $\sigma \in \mathcal{M}_k$ свяжем ассоциированную МФ s вида (2). Множество всех МФ s , ассоциированных с проблемой (3), обозначим символом $\mathcal{F}_k$.

При $k = 2n$, $n \geq 1$, с усеченной проблемой (3) свяжем следующие блок-матрицы (каждый блок является $m \times m$ матрицей):

$$K_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n} \end{bmatrix}}_{(n+1)m}, \quad L_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} I & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & I \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{nm}, \quad u_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -s_0 \\ \vdots \\ -s_{n-1} \end{bmatrix}}_m,$$

$$\begin{aligned}
v_1 &= \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_m, & T_1 &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix}}_{(n+1)m}, & R_{T_1}(z) &= \underbrace{\begin{bmatrix} I & \dots & 0 & 0 \\ zI & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z^n I & \dots & zI & I \end{bmatrix}}_{(n+1)m}, \\
K_2 &= \underbrace{\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & \dots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-1} \end{bmatrix}}_{nm}, & L_2 &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ I & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & I \end{bmatrix}}_{nm}, & u_2 &= \underbrace{\begin{bmatrix} -s_0 \\ -s_1 \\ \vdots \\ -s_{n-1} \end{bmatrix}}_m, \\
v_2 &= \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_m, & T_2 &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix}}_{nm}, & R_{T_2}(z) &= \underbrace{\begin{bmatrix} I & \dots & 0 & 0 \\ zI & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z^{n-1}I & \dots & zI & I \end{bmatrix}}_{nm}.
\end{aligned}$$

При $k = 2n + 1$, $n \geq 0$ с усеченной проблемой моментов (3) свяжем следующие блок-матрицы (каждый блок является $m \times m$ матрицей и каждая блок-матрица имеет $(n + 1)m$ строк):

$$\begin{aligned}
K_1 &= \underbrace{\begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n} \end{bmatrix}}_{(n+1)m}, & L_1 &= \underbrace{\begin{bmatrix} I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & I & 0 \\ 0 & \dots & 0 & I \end{bmatrix}}_{(n+1)m}, & u_1 &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -s_0 \\ \vdots \\ -s_{n-1} \end{bmatrix}}_m, \\
v_1 &= \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_m, & T_1 &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix}}_{(n+1)m}, & R_{T_1}(z) &= \underbrace{\begin{bmatrix} I & \dots & 0 & 0 \\ zI & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z^n I & \dots & zI & I \end{bmatrix}}_{(n+1)m}, \\
K_2 &= \underbrace{\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1} \\ s_2 & s_3 & \dots & s_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n+1} & s_{n+2} & \dots & s_{2n+1} \end{bmatrix}}_{(n+1)m}, & L_2 &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix}}_{(n+1)m}, & v_2 &= \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_m, \\
u_2 &= \underbrace{\begin{bmatrix} -s_0 \\ -s_1 \\ \vdots \\ -s_n \end{bmatrix}}_m, & T_2 &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix}}_{(n+1)m}, & R_{T_2}(z) &= \underbrace{\begin{bmatrix} I & \dots & 0 & 0 \\ zI & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z^n I & \dots & zI & I \end{bmatrix}}_{(n+1)m}.
\end{aligned}$$

Непосредственно проверяем, что определенные выше блок-матрицы при $k = 2n$, $n \geq 1$ и при $k = 2n + 1$, $n \geq 0$ удовлетворяют *основному тождеству*

$$L_2 K_2 - K_1 L_1 = v_1 u_2^*. \quad (4)$$

Кроме того, имеют место тождества

$$\begin{aligned} T_1 &= L_2 L_1^*, & T_2 &= L_1^* L_2, & u_1 &= L_2 u_2, & v_2 &= L_1^* v_1, \\ R_{T_1}(z) &= (I - z T_1)^{-1}, & R_{T_2}(z) &= (I - z T_2)^{-1}, & T_1 L_2 &= L_2 T_2, \\ T_2 L_1^* &= L_1^* T_1, & R_{T_1}(z) L_2 &= L_2 R_{T_2}(z), & R_{T_2}(z) L_1^* &= L_1^* R_{T_1}(z). \end{aligned} \quad (5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Усеченная k -я проблема моментов Стильтеса (3) называется *неопределенной*, если выполнены условия $K_1 > 0$, $K_2 > 0$.

Всюду в этой статье будем предполагать, что все усеченные проблемы моментов (3) являются неопределенными.

Рассмотрим две полиномиальные МФ

$$U_1(z) = \begin{bmatrix} I + z v_2^* R_{T_2}^*(z) K_2^{-1} u_2 & -z v_1^* R_{T_1}^*(z) K_1^{-1} v_1 \\ u_2^* R_{T_2}^*(z) K_2^{-1} u_2 & I - z u_1^* R_{T_1}^*(z) K_1^{-1} v_1 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$U_2(z) = \begin{bmatrix} I + z v_2^* R_{T_2}^*(z) K_2^{-1} u_2 & -v_1^* R_{T_1}^*(z) K_1^{-1} v_1 \\ z u_2^* R_{T_2}^*(z) K_2^{-1} u_2 & I - z u_1^* R_{T_1}^*(z) K_1^{-1} v_1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Здесь и в дальнейшем $R_{T_r}^*(z) = (I - z T_r^*)^{-1}$ при $r = 1, 2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Матрица-функция $U_1: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{2m \times 2m}$ называется *резольвентной матрицей* проблемы моментов Стильтеса (3).

Введем разбиение резольвентной матрицы U_1 на четыре $m \times m$ блока

$$U_1(z) = \begin{bmatrix} \alpha(z) & \beta(z) \\ \gamma(z) & \delta(z) \end{bmatrix} \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (8)$$

Можно доказать, что МФ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ невырождены $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Пусть

$$J = \begin{bmatrix} 0_{m \times m} & -i I_{m \times m} \\ i I_{m \times m} & 0_{m \times m} \end{bmatrix}.$$

Непосредственные вычисления с использованием (4) и (5) приводят к следующим выражениям для J -форм МФ U_1 и U_2 :

$$J - U_r(z) J U_r^*(\lambda) = i(z - \bar{\lambda}) \begin{bmatrix} v_r^* \\ u_r^* \end{bmatrix} R_{T_r}^*(z) K_r^{-1} R_{T_r}^*(\lambda) \begin{bmatrix} v_r & u_r \end{bmatrix}, \quad r = 1, 2. \quad (9)$$

Умножим последнее равенство справа на J и подставим в него $\bar{z}$ вместо λ . Учитывая равенство $J^2 = I$, приходим к принципу симметрии

$$U_r^{-1}(z) = J U_r^*(\bar{z}) J, \quad r = 1, 2.$$

Подставим в (9) $\bar{z}$ вместо z и λ и умножим (9) слева и справа на J . Из принципа симметрии и очевидного равенства $R_{T_r}^*(\bar{z}) = R_{T_r}(z)$ следует, что

$$J - U_r^{-1*}(z) J U_r^{-1}(z) = i(\bar{z} - z) J \begin{bmatrix} v_r^* \\ u_r^* \end{bmatrix} R_{T_r}^*(z) K_r^{-1} R_{T_r}(z) \begin{bmatrix} v_r & u_r \end{bmatrix} J. \quad (10)$$

Непосредственные вычисления с использованием (4), (5) и (8) приводят к следующему выражению для J_π -формы МФ U_1 :

$$\begin{aligned} U_1(z)J_\pi U_1^*(z) - J_\pi &= \begin{bmatrix} \alpha(z)\beta^*(z) + \beta(z)\alpha^*(z) & -I + \alpha(z)\delta^*(z) + \beta(z)\gamma^*(z) \\ -I + \gamma(z)\beta^*(z) + \delta(z)\alpha^*(z) & \gamma(z)\delta^*(z) + \delta(z)\gamma^*(z) \end{bmatrix} \\ &= -(z + \bar{z}) \begin{bmatrix} v_1^* \\ u_1^* \end{bmatrix} R_{T_1^*}(z) K_1^{-1} R_{T_1^*}^*(z) [v_1, u_1] \\ &\quad + 2 \begin{bmatrix} z v_2^* \\ u_2^* \end{bmatrix} R_{T_2^*}(z) K_2^{-1} R_{T_2^*}^*(z) [\bar{z} v_2, u_2], \\ J_\pi &= \begin{bmatrix} 0_{m \times m} & I_{m \times m} \\ I_{m \times m} & 0_{m \times m} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть МФ s является ассоциированной с неопределенной проблемой моментов (3), а МФ U_1 и U_2 определены формулами (6) и (7). Тогда $\forall z \in \mathbb{C}_\pm$ выполнены основные матричные неравенства (ОМН) В. П. Потапова

$$[I \bar{z}^{r-1} s^*(z)] \frac{U_r^{-1*}(z) J U_r^{-1}(z)}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} I \\ z^{r-1} s(z) \end{bmatrix} \geq 0, \quad z \in \mathbb{C}_\pm, \quad r = 1, 2. \quad (12)$$

Наоборот, пусть для некоторой голоморфной в $\mathbb{C}_+$ МФ s неравенства (12) выполняются хотя бы $\forall z \in \mathbb{C}_+$. Тогда s допускает представление (2) и $\sigma \in \mathcal{M}_k$, т.е. $s \in \mathcal{F}_k$.

Доказательство этой теоремы имеется в [4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пара $m \times m$ МФ $\text{col}[p(z) \ q(z)]$, мероморфных в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, называется *стильтесовской*, если для нее существует дискретное в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ множество точек $\mathcal{D}_{pq}$ такое, что

- 1) $p^*(z)p(z) + q^*(z)q(z) > 0$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup \mathcal{D}_{pq}\}$;
- 2) $[p^*(z), q^*(z)] \frac{J}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} \geq 0$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R} \cup \mathcal{D}_{pq}\}$;
- 3) $[p^*(z), q^*(z)] J_\pi \begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} \geq 0$, $z \in \{z \in \mathbb{C}: \text{Re } z < 0\} \setminus \mathcal{D}_{pq}$.

На множестве стилтесовских пар введем отношение эквивалентности: пары $\text{col}[p_1(z) \ q_1(z)]$ и $\text{col}[p_2(z) \ q_2(z)]$ называются *эквивалентными*, если существует МФ $Q(z)$ такая, что в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ мероморфны обе МФ $Q(z)$, $(Q(z))^{-1}$ и $p_1(z) = p_2(z)Q(z)$, $q_1(z) = q_2(z)Q(z)$. Множество классов эквивалентности стилтесовских пар обозначим через $\mathcal{S}_\infty$.

Пусть $A, B \in \mathbb{C}^{m \times m}$ и матрица B невырождена. Тогда $\frac{A}{B} := A \cdot B^{-1}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть проблема моментов (3) является неопределенной и резольвентная матрица U_1 разбита на четыре $m \times m$ блока $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (см. (8)).

Тогда формула

$$s(z) = \frac{\gamma(z)p(z) + \delta(z)q(z)}{\alpha(z)p(z) + \beta(z)q(z)} \quad (13)$$

устанавливает биективное соответствие между $\mathcal{F}_k$ и $\mathcal{S}_\infty$.

Доказательство использует систему ОМН (12) и проводится по аналогии с доказательством аналогичного утверждения в [5].

3. Экстремальные решения и интервалы Вейля. Подставляя в (13) стилтьевские пары $\text{col}[I \ 0]$ и $\text{col}[0 \ I]$, получим экстремальные МФ

$$s_\mu(z) = \frac{\gamma(z)}{\alpha(z)} \in \mathcal{F}_k, \quad s_M(z) = \frac{\delta(z)}{\beta(z)} \in \mathcal{F}_k. \quad (14)$$

ТЕОРЕМА 3. *Экстремальные МФ допускают представления*

$$s_\mu(z) = u_2^*(K_2 - zL_1^*K_1L_1)^{-1}u_2, \quad s_M(z) = \{v_1^*(L_2K_2L_2^* - zK_1)^{-1}v_1\}^{-1}. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства

$$s_\mu(z) = u_2^*K_2^{-1/2}(I - zK_2^{-1/2}L_1^*K_1L_1K_2^{-1/2})^{-1}K_2^{-1/2}u_2$$

и свойств резольвенты неотрицательной эрмитовой матрицы следует, что $s_\mu(z)$ из (15) определена и голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Далее имеем

$$\begin{aligned} & u_2^*(K_2 - zL_1^*K_1L_1)^{-1}u_2 \cdot \alpha(z) \\ &= u_2^*(K_2 - zL_1^*K_1L_1)^{-1}u_2\{I + zv_2^*R_{T_2}^*(z)K_2^{-1}u_2\} \\ &= u_2^*(K_2 - zL_1^*K_1L_1)^{-1}\{K_2(I - zT_2^*) + zu_2v_2^*\}R_{T_2}^*(z)K_2^{-1}u_2 \\ &= u_2^*(K_2 - zL_1^*K_1L_1)^{-1}\{K_2(I - zT_2^*) + zu_2v_1^*L_1\}R_{T_2}^*(z)K_2^{-1}u_2 \\ &= u_2^*(K_2 - zL_1^*K_1L_1)^{-1}\{K_2(I - zT_2^*) + z(K_2L_2^* - L_1^*K_1)L_1\}R_{T_2}^*(z)K_2^{-1}u_2 \\ &= u_2^*(K_2 - zL_1^*K_1L_1)^{-1}\{K_2 - zL_1^*K_1L_1\}R_{T_2}^*(z)K_2^{-1}u_2 \\ &= u_2^*R_{T_2}^*(z)K_2^{-1}u_2 = \gamma(z). \end{aligned}$$

В этой цепочке равенств первое вытекает из (8) и (6), третье – из (5), четвертое – из (4), пятое – из (5), седьмое – из (8) и (6). Таким образом, $s_\mu(z) = \gamma(z)\alpha^{-1}(z) = u_2^*\{K_2 - zL_1^*K_1L_1\}^{-1}u_2$. Первое из равенств (15) доказано. Второе из равенств (15) доказывается аналогичным образом.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть дана неопределенная проблема моментов (3) и $\mathcal{F}_k$ обозначает множество ассоциированных МФ. И пусть, далее, s_μ и s_M – экстремальные ассоциированные МФ. Тогда*

1) МФ $\{s_M(z) - s_\mu(z)\}^{-1}$ голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ и

$$\{s_M(z) - s_\mu(z)\}^{-1} = -zv_1^*R_{T_1}^*(z)K_1^{-1}R_{T_1}(z)v_1 + z^2v_2^*R_{T_2}^*(z)K_2^{-1}R_{T_2}(z)v_2; \quad (16)$$

2) $s_M(x) > s_\mu(x) \ \forall x \in \mathbb{R}_-;$ (17)

3) $s_\mu(x) \leq s(x) \leq s_M(x) \ \forall s \in \mathcal{F}_k, \ \forall x \in \mathbb{R}_-.$ (18)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $x \in \mathbb{R}_-$. Подставим x в формулу (9) вместо z и λ . Получим $J - U_1(x)JU_1^*(x) = 0$. Но тогда (см. [6]) и $J - U_1^*(x)JU_1(x) = 0$. Отсюда и из (8) следует, что

$$\begin{bmatrix} -\alpha^*(x)\gamma(x) + \gamma^*(x)\alpha(x) & -\alpha^*(x)\delta(x) + \gamma^*(x)\beta \\ -\beta^*(x)\gamma(x) + \delta^*(x)\alpha(x) & -\beta^*(x)\delta(x) + \delta^*(x)\beta(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Таким образом, $-\beta^*(x)\gamma(x) + \delta^*(x)\alpha(x) = I$. В силу (15) $s_M(x) = s_M^*(x)$. Поэтому

$$\begin{aligned} s_M(x) - s_\mu(x) &= \beta^{-1*}(x)\delta^*(x) - \gamma(x)\alpha^{-1}(x) \\ &= \beta^{-1*}(x)\{\delta^*(x)\alpha(x) - \beta^*(x)\gamma(x)\}\alpha^{-1}(x) = \beta^{-1*}(x)\alpha^{-1}(x). \end{aligned} \quad (20)$$

Как уже отмечалось, полиномиальные МФ $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ невырождены в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Поэтому рациональные МФ $\alpha^{-1}(z)$ и $\beta^{-1*}(\bar{z})$ голоморфны в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Из (20) следует, что и МФ $\{s_M(z) - s_\mu(z)\}^{-1}$ голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Далее

$$\begin{aligned} \{s_M(x) - s_\mu(x)\}^{-1} &= \alpha(x)\beta^*(x) = -x\{I + xv_2^*R_{T_2}^*(x)K_2^{-1}u_2\} \cdot \{v_1^*K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1\} \\ &= -x\{v_1^*K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1 \\ &\quad + xv_2^*R_{T_2}^*(x)K_2^{-1}(-L_1^*K_1 + K_2L_2^*)K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1\} \\ &= -x\{v_1^*K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1 - xv_2^*R_{T_2}^*(x)K_2^{-1}L_1^*R_{T_1}(x)v_1 \\ &\quad + xv_2^*R_{T_2}^*(x)L_2^*K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1\} \\ &= -x\{v_1^*K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1 - xv_2^*R_{T_2}^*(x)K_2^{-1}L_1^*R_{T_1}(x)v_1 \\ &\quad + xv_1^*L_1L_2^*R_{T_1}^*(x)K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1\} \\ &= -x\{v_1^*K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1 - xv_2^*R_{T_2}^*(x)K_2^{-1}L_1^*R_{T_1}(x)v_1 \\ &\quad + xv_1^*T_1^*R_{T_1}^*(x)K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1\} \\ &= -x\{v_1^*[I - xT_1^* + xT_1^*]R_{T_1}^*(x)K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1 \\ &\quad - xv_2^*R_{T_2}^*(x)K_2^{-1}L_1^*R_{T_1}(x)v_1\} \\ &= -x\{v_1^*R_{T_1}^*(x)K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1 - xv_2^*R_{T_2}^*(x)K_2^{-1}L_1^*R_{T_1}(x)v_1\} \\ &= -x\{v_1^*R_{T_1}^*(x)K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1 - xv_2^*R_{T_2}^*(x)K_2^{-1}R_{T_2}(x)v_2\}. \end{aligned}$$

В этой цепочке равенств второе равенство следует из (8) и (6), третье – из (4), пятое, шестое и девятое – из (5). Таким образом, при $x < 0$

$$\{s_M(x) - s_\mu(x)\}^{-1} = -x\{v_1^*R_{T_1}^*(x)K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1 - xv_2^*R_{T_2}^*(x)K_2^{-1}R_{T_2}(x)v_2\}.$$

Отсюда в силу аналитичности следует (16).

2) Это утверждение непосредственно следует из (16).

3) Пусть МФ $s \in \mathcal{F}_k$. Тогда она допускает представление (13) с стилтьесовской парой $\text{col}[p \ q]$. Пусть $x \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{D}_{pq}$. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} s_M(x) - s(x) &= \delta(x)\beta^{-1}(x) - \{\gamma(x)p(x) + \delta(x)q(x)\} \cdot \{\alpha(x)p(x) + \beta(x)q(x)\}^{-1} \\ &= \beta^{-1*}(x)\delta^*(x) - \{\gamma(x)p(x) + \delta(x)q(x)\} \cdot \{\alpha(x)p(x) + \beta(x)q(x)\}^{-1} \\ &= \beta^{-1*}(x)\{[\delta^*(x)\alpha(x) - \beta^*(x)\gamma(x)]p(x) \\ &\quad + [\delta^*(x)\beta(x) - \beta^*(x)\delta(x)]q(x)\}\{\alpha(x)p(x) + \beta(x)q(x)\}^{-1} \\ &= \beta^{-1*}(x)p(x)\{\alpha(x)p(x) + \beta(x)q(x)\}^{-1}. \end{aligned}$$

В этой цепочке равенств второе равенство следует из (14) и (15), а последнее – из (19). Окончательно

$$s_M(x) - s(x) = \beta^{-1*}(x)p(x)\{\alpha(x)p(x) + \beta(x)q(x)\}^{-1}.$$

Таким образом, разность $s_M(x) - s(x)$ представлена в виде дробно-линейного преобразования, матрица которого

$$\tilde{U}(x) = \begin{bmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ \beta^{-1*}(x) & 0 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что ее J_π -форма имеет вид

$$\tilde{U}^*(x)J_\pi\tilde{U}(x) - J_\pi = \begin{bmatrix} \beta^{-1}(x)[\beta(x)\alpha^*(x) + \alpha(x)\beta^*(x)]\beta^{-1*}(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Из (11) следует, что $U_1(x)J_\pi U_1^*(x) - J_\pi \geq 0$. Но тогда, снова из (11), $\beta(x)\alpha^*(x) + \alpha(x)\beta^*(x) \geq 0$. Поэтому $\tilde{U}^*(x)J_\pi\tilde{U}(x) \geq J_\pi$. С учетом этого неравенства получаем

$$\begin{aligned} & [p^*(x)\alpha^*(x) + q^*(x)\beta^*(x), p^*(x)\beta^{-1}(x)] J_\pi \begin{bmatrix} \alpha(x)p(x) + \beta(x)q(x) \\ \beta^{-1*}(x)p(x) \end{bmatrix} \\ &= [p^*(x), q^*(x)] \begin{bmatrix} \alpha^*(x) & \beta^{-1}(x) \\ \beta^*(x) & 0 \end{bmatrix} J_\pi \begin{bmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ \beta^{-1*}(x) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(x) \\ q(x) \end{bmatrix} \\ &= [p^*(x), q^*(x)] \tilde{U}^*(x)J_\pi\tilde{U}(x) \begin{bmatrix} p(x) \\ q(x) \end{bmatrix} \geq [p^*(x), q^*(x)] J_\pi \begin{bmatrix} p(x) \\ q(x) \end{bmatrix} \geq 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство вытекает из определения 3. Таким образом,

$$[p^*(x)\alpha^*(x) + q^*(x)\beta^*(x), p^*(x)\beta^{-1}(x)] J_\pi \begin{bmatrix} \alpha(x)p(x) + \beta(x)q(x) \\ \beta^{-1*}(x)p(x) \end{bmatrix} \geq 0.$$

Умножим это неравенство справа на матрицу $\{\alpha(x)p(x) + \beta(x)q(x)\}^{-1}$, а слева на сопряженную матрицу. Получим

$$[I, s_M^*(x) - s^*(x)] J_\pi \begin{bmatrix} I \\ s_M(x) - s(x) \end{bmatrix} \geq 0.$$

Или, учитывая вид матрицы J_π ,

$$s_M^*(x) - s^*(x) + s_M(x) - s(x) \geq 0.$$

МФ s_M и s принадлежат классу $\mathcal{F}_k$ и, следовательно, допускают представления вида (2), откуда следует, что $s_M(x)$ и $s(x)$ эрмитовы. Но тогда из последнего неравенства следует, что $s_M(x) \geq s(x)$. Это неравенство продолжается в точки $x \in \mathbb{R}_- \cap \mathcal{D}_{pq}$ по непрерывности. Неравенство $s_\mu(x) \leq s(x)$ доказывается аналогичным образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть матрицы $A, B \in \mathbb{C}_{>}^{m \times m}$ и выполнено условие $A \leq B$. Матричным интервалом называется

$$[A, B] = \{\kappa \in \mathbb{C}_H^{m \times m} : A \leq \kappa \leq B\}.$$

Матричный интервал $[A, B]$ называется невырожденным, если $A < B$.

Пусть некоторая точка $x_0 \in \mathbb{R}_-$. Матричный интервал

$$\mathcal{J}(x_0) = [s_\mu(x_0), s_M(x_0)]$$

называется интервалом Вейля.

Неравенство (18) означает, что $\{s(x_0) : s \in \mathcal{F}_k\} \subset \mathcal{J}(x_0)$. Можно доказать, что $\{s(x_0) : s \in \mathcal{F}_k\} = \mathcal{J}(x_0)$.

4. Предельные интервалы Вейля. Теперь мы исследуем свойства введенных выше объектов при изменяющихся k . Для этого в обозначения объектов введем верхний индекс (k) , который будет указывать, что соответствующие интервалы Вейля, резольвентные матрицы и т.д. связаны с k -й усеченной проблемой моментов (3).

Пусть даны целые числа $k_2 > k_1 > 0$. Из очевидного включения $\mathcal{F}_{k_2} \subset \mathcal{F}_{k_1}$ следует, что

$$\mathcal{J}^{(k_2)}(x_0) \subset \mathcal{J}^{(k_1)}(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}_-. \quad (21)$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть при любом $k > 0$ проблема моментов (3) является неопределенной и $\mathcal{F}_k$ обозначает множество ассоциированных МФ. И пусть, далее, $s_\mu^{(k)}$ и $s_M^{(k)}$ – соответствующие экстремальные МФ. Тогда

1) существуют пределы

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} s_M^{(k)}(x) > 0, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} s_\mu^{(k)}(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_-; \quad (22)$$

2) существуют равномерные на компактах из $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ пределы

$$s_M^{(\infty)}(z) := \lim_{k \rightarrow +\infty} s_M^{(k)}(z), \quad s_\mu^{(\infty)}(z) := \lim_{k \rightarrow +\infty} s_\mu^{(k)}(z); \quad (23)$$

$$3) s_M^{(\infty)}, s_\mu^{(\infty)} \in \mathcal{F}_\infty; \quad (24)$$

$$4) s_\mu^{(\infty)}(x) \leq s_M^{(\infty)}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_-; \quad (25)$$

$$5) s_\mu^{(\infty)}(x) \leq s(x) \leq s_M^{(\infty)}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_-, \quad \forall s \in \mathcal{F}_\infty. \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Из включения $\mathcal{J}^{(k_2)}(x) \subset \mathcal{J}^{(k_1)}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}_-$, $k_2 > k_1 > 0$ (см. (21)) вытекает неравенство $s_M^{(k_2)}(x) \leq s_M^{(k_1)}(x)$. Поэтому в каждой точке $x \in \mathbb{R}_-$ последовательность эрмитовых матриц $\{s_M^{(k)}(x)\}_{k=1}^\infty$ монотонно убывает и ограничена снизу строго положительной матрицей $s_\mu^{(1)}(x)$. Отсюда следует, что существует предел $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_M^{(k)}(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_-$. Существование второго предела в (22) доказывается аналогичным образом.

2) Покажем, что последовательность МФ $\{s_M^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ равномерно ограничена на компактах из $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. При фиксированном $x \in \mathbb{R}_-$ сходящаяся матричная последовательность $\{s_M^{(k)}(x)\}_{k=1}^\infty$ ограничена. Отсюда и из представления МФ $s_M^{(k)}$ в виде (2) последовательно получаем ограниченность семейства $\{s_M^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ на компактах из левой, верхней

и нижней полуплоскостей (см. [7, с. 32]). Но тогда рассматриваемое семейство ограничено и на произвольном компакте из $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.

Пусть теперь K – произвольный компакт из $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Обозначим через Ω односвязную открытую область с гладкой границей такую, что

- 1) $K \subset \Omega$;
- 2) замыкание Ω является компактом в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$;
- 3) область Ω содержит некоторый интервал $(a, b) \subset \mathbb{R}_-$.

Последовательность $M\Phi \{s_M^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ равномерно ограничена в замыкании области Ω , а значит, и в самой области Ω . Последовательность матриц $\{s_M^{(k)}(x)\}_{k=1}^\infty$ сходится $\forall x \in (a, b)$. По теореме Витали последовательность $M\Phi \{s_M^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ равномерно сходится при $z \in K$. Мы доказали существование первого из пределов в (23). Аналогичным образом доказывается существование второго предела в (23).

3) Пусть зафиксировано целое число $k > 0$ и пусть $l > k$. Тогда $s_M^{(l)} \in \mathcal{F}_k$ и, следовательно, выполнена система ОМН Потапова

$$[I \bar{z}^{r-1} s_M^{(l)*}(z)] \frac{U_r^{(k)-1*}(z) J U_r^{(k)-1}(z)}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} I \\ z^{r-1} s_M^{(l)}(z) \end{bmatrix} \geq 0, \quad z \in \mathbb{C}_\pm, \quad r = 1, 2.$$

Перейдем в этих неравенствах к пределу $l \rightarrow \infty$. Получим, что $s_M^{(\infty)} \in \mathcal{F}_k$. В силу произвольности k отсюда следует, что $s_M^{(\infty)} \in \mathcal{F}_\infty$. Утверждение относительно $s_\mu^{(\infty)}$ доказывается аналогичным образом.

4) В неравенстве $s_\mu^{(k)}(x) < s_M^{(k)}(x) \forall x \in \mathbb{R}_-$ перейдем к пределу $k \rightarrow \infty$.

5) Пусть задана некоторая $M\Phi s \in \mathcal{F}_\infty$. Ясно, что $s \in \mathcal{F}_k \forall k > 0$. По теореме 4 имеют место неравенства $s_\mu^{(k)}(x) \leq s(x) \leq s_M^{(k)}(x)$. Переходя к пределу $k \rightarrow \infty$, получим (26).

Пусть некоторая точка $x \in \mathbb{R}_-$. Матричный интервал

$$\mathcal{J}^{(\infty)}(x) = [s_\mu^{(\infty)}(x), s_M^{(\infty)}(x)]$$

называется *предельным интервалом Вейля*. Из (26) следует включение $\{s(x) : s \in \mathcal{F}_\infty\} \subset \mathcal{J}^{(\infty)}(x)$. Можно доказать, что $\{s(x) : s \in \mathcal{F}_\infty\} = \mathcal{J}^{(\infty)}(x)$.

5. Критерий неопределенности проблемы моментов.

ЛЕММА 1. Пусть дана неопределенная усеченная проблема моментов (3) и пусть $U_1^{(k)}$ обозначает ее резольвентную матрицу, а $s_\mu^{(k)}$ и $s_M^{(k)}$ – соответствующие экстремальные решения. Тогда для всех $x \in \mathbb{R}_-$ имеем

$$U_1^{(k)}(x) J_\pi U_1^{(k)*}(x) - J_\pi = 2 \begin{bmatrix} I & 0 \\ s_\mu^{(k)}(x) & I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (s_M^{(k)}(x) - s_\mu^{(k)}(x))^{-1} & 0 \\ 0 & s_\mu^{(k)}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & s_\mu^{(k)}(x) \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для упрощения записи верхний индекс (k) опускаем. Имеем

$$\begin{aligned} U_1(x) &= \begin{bmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ \gamma(x) & \delta(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & I \\ \gamma(x)\alpha^{-1}(x) & \delta(x)\beta^{-1}(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha(x) & 0 \\ 0 & \beta(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I & I \\ s_\mu(x) & s_M(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha(x)\beta^*(x) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta^{*-1}(x) & 0 \\ 0 & \beta(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I & I \\ s_\mu(x) & s_M(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (s_M(x) - s_\mu(x))^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta^{*-1}(x) & 0 \\ 0 & \beta(x) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

В этой цепочке равенств третье следует из (14), а четвертое – из (20). Далее (для упрощения обозначений опускаем аргумент x)

$$\begin{aligned} U_1 J_\pi U_1^* - J_\pi &= \begin{bmatrix} I & I \\ s_\mu & s_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s_M - s_\mu)^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta^{*-1} & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} J_\pi \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \beta^{-1} & 0 \\ 0 & \beta^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s_M - s_\mu)^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & s_\mu \\ I & s_M \end{bmatrix} - J_\pi \\ &= \begin{bmatrix} I & I \\ s_\mu & s_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s_M - s_\mu)^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} J_\pi \begin{bmatrix} (s_M - s_\mu)^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & s_\mu \\ I & s_M \end{bmatrix} - J_\pi \\ &= \begin{bmatrix} 2(s_M - s_\mu)^{-1} & 2(s_M - s_\mu)^{-1}s_\mu \\ 2s_\mu(s_M - s_\mu)^{-1} & s_\mu(s_M - s_\mu)^{-1}s_M + s_M(s_M - s_\mu)^{-1}s_\mu \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} (s_M - s_\mu)^{-1} & (s_M - s_\mu)^{-1}s_\mu \\ s_\mu(s_M - s_\mu)^{-1} & (s_\mu^{-1} - s_M^{-1})^{-1} \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} (s_M - s_\mu)^{-1} & (s_M - s_\mu)^{-1}s_\mu \\ s_\mu(s_M - s_\mu)^{-1} & s_\mu(s_M - s_\mu)^{-1}s_M \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} (s_M - s_\mu)^{-1} & (s_M - s_\mu)^{-1}s_\mu \\ s_\mu(s_M - s_\mu)^{-1} & s_\mu(s_M - s_\mu)^{-1}s_\mu + s_\mu \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} I & 0 \\ s_\mu & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s_M - s_\mu)^{-1} & 0 \\ 0 & s_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & s_\mu \\ 0 & I \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Мы будем использовать хорошо известное свойство

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} > 0 \implies \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}^{-1} \geq \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

ЛЕММА 2. Пусть $s_M^{(\infty)}, s_\mu^{(\infty)} \in \mathcal{F}_\infty$. Тогда для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_-$ имеет место равенство

$$\text{rank}\{s_M^{(\infty)}(x_1) - s_\mu^{(\infty)}(x_1)\} = \text{rank}\{s_M^{(\infty)}(x_2) - s_\mu^{(\infty)}(x_2)\}. \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (28) вытекают неравенства

$$\begin{aligned} [\{s_{i+j}\}_{i,j=0}^n]^{-1} &\geq \begin{bmatrix} [\{s_{i+j}\}_{i,j=0}^{n-1}]^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ [\{s_{i+j+1}\}_{i,j=0}^n]^{-1} &\geq \begin{bmatrix} [\{s_{i+j+1}\}_{i,j=0}^{n-1}]^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (30)$$

Отсюда и из (11) следует, что при $k > 0$, $\operatorname{Re} z < 0$

$$U_1^{(k+1)}(z)J_\pi U_1^{(k+1)*}(z) - J_\pi \geq U_1^{(k)}(z)J_\pi U_1^{(k)*}(z) - J_\pi \geq 0. \quad (31)$$

По теореме С. А. Орлова (см. [8], [9]) существуют пределы

$$\Gamma(z) := \lim_{k \rightarrow \infty} [U_1^{(k)}(z)J_\pi U_1^{(k)*}(z) - J_\pi]^{-1}, \quad \operatorname{Re} z < 0,$$

и для всех z_1 и z_2 из левой полуплоскости

$$\operatorname{rank} \Gamma(z_1) = \operatorname{rank} \Gamma(z_2). \quad (32)$$

Из формулы (27) имеем ($\forall x \in \mathbb{R}_-$)

$$\Gamma(x) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I & -s_\mu^{(\infty)}(x) \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_M^{(\infty)}(x) - s_\mu^{(\infty)}(x) & 0 \\ 0 & s_\mu^{(\infty)-1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -s_\mu^{(\infty)}(x) & I \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $\operatorname{rank} \Gamma(x) = \operatorname{rank}[s_M^{(\infty)}(x) - s_\mu^{(\infty)}(x)] + m$. Отсюда и из (32) следует (29).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Проблема моментов Стильеса (1) называется *неопределенной*, если все предельные интервалы Вейля

$$\mathcal{J}^{(\infty)}(x) = [s_\mu^{(\infty)}(x), s_M^{(\infty)}(x)] \quad \forall x \in \mathbb{R}_-$$

являются невырожденными матричными интервалами.

Из этого определения и леммы 2 непосредственно вытекает

ЛЕММА 3. Для того чтобы проблема моментов Стильеса (1) была неопределенной, необходимо, чтобы при всех $x \in \mathbb{R}_-$ выполнялось неравенство

$$s_\mu^{(\infty)}(x) < s_M^{(\infty)}(x), \quad (33)$$

и достаточно, чтобы неравенство (33) выполнялось хотя бы для одного $x \in \mathbb{R}_-$.

Другими словами, для неопределенности проблемы (1) необходимо, чтобы при всех $x \in \mathbb{R}_-$ предельные интервалы Вейля были невырождены, и достаточно, чтобы хотя бы для одного $x \in \mathbb{R}_-$ был невырожденным соответствующий предельный интервал Вейля.

ТЕОРЕМА 6. Для того, чтобы проблема моментов Стильеса (1) была неопределенной, необходимо и достаточно, чтобы в любой фиксированной точке $x_0 \in \mathbb{R}_-$ существовали пределы

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} [-x_0 v_1^{(k)*} R_{T_1^*}^{(k)}(x_0) K_1^{(k)-1} R_{T_1}^{(k)}(x_0) v_1^{(k)}] &> 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} [x_0^2 v_2^{(k)*} R_{T_2^*}^{(k)}(x_0) K_2^{(k)-1} R_{T_2}^{(k)}(x_0) v_2^{(k)}] &> 0. \end{aligned} \quad (34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (30) следует, что положительно определенные матрицы

$$-x_0 v_1^{(k)*} R_{T_1^*}^{(k)}(x_0) K_1^{(k)-1} R_{T_1}^{(k)}(x_0) v_1^{(k)}, \quad x_0^2 v_2^{(k)*} R_{T_2^*}^{(k)}(x_0) K_2^{(k)-1} R_{T_2}^{(k)}(x_0) v_2^{(k)}$$

монотонно возрастают с ростом k .

Пусть теперь проблема моментов (1) является неопределенной. Для k -й усеченной проблемы моментов (3) запишем (16) при $z = x_0 \in \mathbb{R}_-$. Получим

$$\begin{aligned} \{s_M^{(k)}(x_0) - s_\mu^{(k)}(x_0)\}^{-1} = & -x_0 v_1^{(k)*} R_{T_1^*}^{(k)}(x_0) K_1^{(k)-1} R_{T_1}^{(k)}(x_0) v_1^{(k)} \\ & + x_0^2 v_2^{(k)*} R_{T_2^*}^{(k)}(x_0) K_2^{(k)-1} R_{T_2}^{(k)}(x_0) v_2^{(k)}. \end{aligned} \quad (35)$$

Оба слагаемых в правой части последнего равенства являются положительно определенными матрицами и монотонно возрастают с ростом k . Левая часть в силу неопределенности проблемы моментов при $k \rightarrow +\infty$ стремится к положительно определенной матрице $\{s_M^{(\infty)}(x_0) - s_\mu^{(\infty)}(x_0)\}^{-1}$. Отсюда следует существование и строгая положительность пределов в (34).

Наоборот, пусть существуют и строго положительны оба предела в (34). Совершим теперь предельный переход $k \rightarrow +\infty$ в обеих частях равенства (35). Получим, что $\{s_M^{(\infty)}(x_0) - s_\mu^{(\infty)}(x_0)\}^{-1} > 0$. Таким образом, предельный интервал Вейля $\mathcal{J}^{(\infty)}(x_0)$ является невырожденным и, следовательно, проблема моментов (1) является неопределенной.

6. Критерий Стилтеса. Имеет место теорема (см. [10], [11]).

ТЕОРЕМА 7. *Резольвентные матрицы усеченных проблем моментов (3) разбиваются в произведение Бляшке–Потапова*

$$\begin{aligned} U_1^{(2n)}(z) &= \begin{bmatrix} I & -zM_0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ L_0 & I \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I & 0 \\ L_{n-1} & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & -zM_n \\ 0 & I \end{bmatrix}, \\ U_1^{(2n+1)}(z) &= \begin{bmatrix} I & -zM_0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ L_0 & I \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I & -zM_n \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ L_n & I \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь

$$\begin{aligned} M_0 &= s_0^{-1} > 0, \quad L_0 = s_0 s_1^{-1} s_0 > 0, \\ M_j &= v_1^{(2j)*} K_1^{(2j)-1} v_1^{(2j)} - v_1^{(2j-2)*} K_1^{(2j-2)-1} v_1^{(2j-2)} > 0, \\ L_j &= u_2^{(2j+1)*} K_2^{(2j+1)-1} u_2^{(2j+1)} - u_2^{(2j-1)*} K_2^{(2j-1)-1} u_2^{(2j-1)} > 0 \end{aligned} \quad (37)$$

для всех $j \geq 1$.

Параметры M_j и L_j называются *параметрами Стилтеса*. Множители Бляшке–Потапова допускают экспоненциальные представления

$$\begin{bmatrix} I & -zM_j \\ 0 & I \end{bmatrix} = \exp \begin{bmatrix} 0 & -zM_j \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I & 0 \\ L_j & I \end{bmatrix} = \exp \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L_j & 0 \end{bmatrix}, \quad j \geq 0.$$

Тогда резольвентную матрицу можно записать в виде ($j \geq 0$)

$$U_1^{(k)}(z) = \prod_{j=0}^k e^{H_j(z)}, \quad H_{2j}(z) = \begin{bmatrix} 0 & -zM_j \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_{2j+1}(z) \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L_j & 0 \end{bmatrix}. \quad (38)$$

В матричных произведениях считаем, что индексы сомножителей возрастают в порядке слева на право.

ТЕОРЕМА 8. Для того, чтобы проблема моментов Стильеса (1) была неопределенной, необходимо и достаточно, чтобы сходились ряды

$$\sum_{j=0}^{\infty} M_j \quad \text{и} \quad \sum_{j=0}^{\infty} L_j. \quad (39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть проблема (1) является неопределенной. Покажем, что для всех $k \geq 1$ выполнены следующие три соотношения:

$$\|U_1^{(k)}(-1)J_\pi U_1^{(k)*}(-1) - J_\pi\| \leq C, \quad \det[U_1^{(k)}(-1)] = 1, \quad H_k(-1)J_\pi \geq 0. \quad (40)$$

Здесь $C \in \mathbb{R}_+$ – некоторая константа. Действительно, из (27), (33) и (22) следует сходимость $U_1^{(k)}(-1)J_\pi U_1^{(k)*}(-1) - J_\pi$ при $k \rightarrow \infty$. Отсюда следует первое из соотношений (40). Равенство в (40) следует из (36). С учетом (38) имеем

$$H_{2j}(-1)J_\pi = \begin{bmatrix} M_j & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0, \quad H_{2j+1}(-1)J_\pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L_j \end{bmatrix} \geq 0.$$

Доказаны все соотношения (40). По теореме Потапова (см. [12]) сходится матричное произведение $\prod_{j=0}^{\infty} e^{H_j(-1)}$ и ряд $\sum_{j=0}^{\infty} H_j(-1)$. Из сходимости последнего ряда и из вида $H_j(-1)$ следует сходимость рядов (39).

Наоборот, пусть сходятся ряды (39). Отсюда и из (38) следует сходимость ряда $\sum_{j=0}^{\infty} H_j(-1)$. Поэтому (см. [12]) существует предел

$$U_1^{(\infty)}(-1) = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{H_0(-1)} e^{H_1(-1)} \dots e^{H_k(-1)}.$$

Из (27) следует

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} s_M^{(k)}(-1) - s_\mu^{(k)}(-1) & 0 \\ 0 & s_\mu^{(k)-1}(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -s_\mu^{(k)}(-1) & I \end{bmatrix} \\ & \times [U_1^{(k)}(-1)J_\pi U_1^{(k)*}(-1) - J_\pi] = 2 \begin{bmatrix} I & s_\mu^{(k)}(-1) \\ 0 & I \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

В этом равенстве все матрицы имеют пределы при $k \rightarrow \infty$, а предел правой части является невырожденной матрицей. Поэтому $s_M^{(\infty)}(-1) - s_\mu^{(\infty)}(-1) > 0$, т.е. проблема моментов (1) является неопределенной.

7. Аналитические свойства резольвентной матрицы. Нетрудно показать, что $\forall A_0, A_1, \dots, A_k \in \mathbb{C}^{m \times m}$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \|e^{A_0} e^{A_1} \dots e^{A_k}\| & \leq \exp\left(\sum_{j=0}^k \|A_j\|\right), \\ \|e^{A_0} e^{A_1} \dots e^{A_k} - I\| & \leq \left(\sum_{j=0}^k \|A_j\|\right) \cdot \exp\left(\sum_{j=0}^k \|A_j\|\right). \end{aligned} \quad (41)$$

ТЕОРЕМА 9. Пусть дана неопределенная проблема моментов (1) и пусть последовательности МФ $\{U_1^{(k)}\}_{k=0}^{+\infty}$ и $\{U_2^{(k)}\}_{k=0}^{+\infty}$ определены формулами (6) и (7). Тогда существуют целые МФ $U_1^{(\infty)}, U_2^{(\infty)}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{2m \times 2m}$ такие, что существуют равномерные на компактах $K \subset \mathbb{C}$ пределы

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} U_1^{(k)}(z) = U_1^{(\infty)}(z), \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} U_2^{(k)}(z) = U_2^{(\infty)}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad (42)$$

Более того, $\det U_1^{(\infty)}(z) \equiv \det U_2^{(\infty)}(z) \equiv 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть резольвентные матрицы усеченных задач (3) записаны в виде (38) и пусть, для определенности, $l \geq k$. Тогда, воспользовавшись неравенствами (41) и сходимостью рядов (39), получим

$$\begin{aligned} \|U_1^{(l)}(z) - U_1^{(k)}(z)\| &\leq \|e^{H_0} e^{H_1} \dots e^{H_k}\| \cdot \|e^{H_{k+1}} e^{H_{k+2}} \dots e^{H_l} - I\| \\ &\leq \exp\left(\sum_{j=0}^k \|H_j\|\right) \cdot \exp\left(\sum_{j=k+1}^l \|H_j\|\right) \cdot \left(\sum_{j=k+1}^l \|H_j\|\right) \\ &\leq \underbrace{\exp\left(|z| \sum_{j=0}^{\infty} \left\| \begin{bmatrix} 0 & M_j \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\| \right)}_{\Phi(z)} \cdot \exp\left(\sum_{j=0}^{\infty} \left\| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L_j & 0 \end{bmatrix} \right\| \right) \cdot \left(\sum_{j=k+1}^l \|H_j\|\right) \\ &= \Phi(z) \cdot \left(|z| \sum_{j \in [k+1, l]}^+ \left\| \begin{bmatrix} 0 & M_{\frac{j}{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\| + \sum_{j \in [k+1, l]}^- \left\| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L_{\frac{j-1}{2}} & 0 \end{bmatrix} \right\| \right). \end{aligned}$$

Здесь символы $\sum^+$ и $\sum^-$ обозначают соответственно суммирование по всем четным или нечетным значениям индекса j . Определенная в последних равенствах функция $\Phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$ непрерывна. Пусть теперь задан произвольный компакт $K \subset \mathbb{C}$ и пусть $C = \max_{z \in K} |\Phi(z)|$ и $c = \max_{z \in K} |z|$. Тогда

$$\|U_1^{(l)}(z) - U_1^{(k)}(z)\| \leq C \left(c \sum_{j \in [k+1, l]}^+ \left\| \begin{bmatrix} 0 & M_{\frac{j}{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\| + \sum_{j \in [k+1, l]}^- \left\| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L_{\frac{j-1}{2}} & 0 \end{bmatrix} \right\| \right).$$

Учитывая сходимость рядов (39), получаем, что последовательность резольвентных матриц $\{U_1^{(k)}(z)\}_{k=0}^{\infty}$ равномерно фундаментальна на компактах из $\mathbb{C}$. Осталось заметить, что элементы резольвентных матриц $\{U_1^{(k)}(z)\}_{k=0}^{\infty}$ являются полиномами по z . Существование второго предела в (42) доказывается аналогичным образом.

Из (36) следует, что $\det U_1^{(k)}(z) \equiv 1$. Совершая предельный переход $k \rightarrow \infty$, получим $\det U_1^{(\infty)}(z) \equiv 1$. Утверждение относительно детерминанта $U_2^{(\infty)}$ вытекает из очевидного тождества

$$U_2^{(k)}(z) = \begin{bmatrix} z^{-1}I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} U_1^{(k)}(z) \begin{bmatrix} zI & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. МФ $U_1^{(\infty)}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{2m \times 2m}$, определенная в (42), называется *резольвентной матрицей неопределенной проблемы моментов* (1).

ТЕОРЕМА 10. Пусть проблема моментов (1) является неопределенной и пусть, далее, $U_1^{(\infty)}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{2m \times 2m}$ – ее резольвентная матрица. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует зависящая только от ε константа C_ε такая, что

$$\|U_1^{(\infty)}(z)\| \leq C_\varepsilon \exp(\varepsilon|z|) \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (43)$$

Другими словами, элементы резольвентной матрицы U_1 являются целыми функциями не выше первого порядка минимального экспоненциального типа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неопределенности проблемы моментов (1) вытекает сходимость рядов (39). Но тогда сходятся ряды $\sum_{j=0}^{\infty} \|M_j\|$ и $\sum_{j=0}^{\infty} \|L_j\|$. Пусть дано некоторое $\varepsilon > 0$. Тогда существует N_ε такое, что для всех $k > N_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\sum_{j \in [N_\varepsilon+1, k]}^+ \left\| \begin{bmatrix} 0 & M_{\frac{j}{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (44)$$

Оценим норму резольвентной матрицы $U_1^{(k)}$:

$$\begin{aligned} \|U_1^{(k)}(z)\| &= \|e^{H_0(z)} e^{H_1(z)} \dots e^{H_k(z)}\| \\ &\leq \|e^{H_0(z)} e^{H_1(z)} \dots e^{H_{N_\varepsilon}(z)}\| \cdot \|e^{H_{N_\varepsilon+1}(z)} \dots e^{H_k(z)}\| \\ &= \|(I + H_0(z))(I + H_1(z)) \dots (I + H_{N_\varepsilon}(z))\| \cdot \|e^{H_{N_\varepsilon+1}(z)} \dots e^{H_k(z)}\| \\ &\leq (1 + \|H_0(z)\|)(1 + \|H_1(z)\|) \dots (1 + \|H_{N_\varepsilon}(z)\|) \cdot \|e^{H_{N_\varepsilon+1}(z)} \dots e^{H_k(z)}\| \\ &= P(|z|) \cdot \|e^{H_{N_\varepsilon+1}(z)} \dots e^{H_k(z)}\|. \end{aligned}$$

Здесь P – многочлен с положительными коэффициентами (см. вид матриц H_j в (38)). Существует зависящая только от ε константа A_ε такая, что

$$P(|z|) \leq A_\varepsilon \exp\left(\frac{\varepsilon|z|}{2}\right) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \|U_1^{(k)}(z)\| &\leq P(|z|) \cdot \|e^{H_{N_\varepsilon+1}(z)} \dots e^{H_k(z)}\| \\ &\leq A_\varepsilon \cdot \exp\left(\frac{\varepsilon|z|}{2}\right) \cdot \|e^{H_{N_\varepsilon+1}(z)} \dots e^{H_k(z)}\| \\ &\leq A_\varepsilon \cdot \exp\left(\frac{\varepsilon|z|}{2}\right) \cdot \exp\left(\sum_{j \in [N_\varepsilon+1, k]} \|H_j(z)\|\right) \\ &= A_\varepsilon \exp\left(\frac{\varepsilon|z|}{2}\right) \cdot \exp\left(\sum_{j \in [N_\varepsilon+1, k]}^+ \|H_j(z)\|\right) \cdot \exp\left(\sum_{j \in [N_\varepsilon+1, k]}^- \|H_j(z)\|\right) \\ &= A_\varepsilon \cdot \exp\left(\frac{\varepsilon|z|}{2}\right) \cdot \exp\left(|z| \sum_{j \in [N_\varepsilon+1, k]}^+ \left\| \begin{bmatrix} 0 & M_{\frac{j}{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\|\right) \\ &\quad \times \exp\left(\sum_{j \in [N_\varepsilon+1, k]}^- \left\| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L_{\frac{j-1}{2}} & 0 \end{bmatrix} \right\|\right) \leq \\ &\leq A_\varepsilon \cdot \exp\left(\sum_{j=0}^{\infty} \left\| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L_j & 0 \end{bmatrix} \right\|\right) \cdot \exp\left(\frac{\varepsilon|z|}{2}\right) \cdot \exp\left(\frac{\varepsilon|z|}{2}\right) \\ &= C_\varepsilon \cdot \exp(\varepsilon|z|), \quad C_\varepsilon = A_\varepsilon \cdot \exp\left(\sum_{j=0}^{\infty} \left\| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L_j & 0 \end{bmatrix} \right\|\right). \end{aligned}$$

В этой цепочке равенств и неравенств третье вытекает из (41), пятое – из (38), шестое – из сходимости ряда $\sum_{j=0}^{\infty} \|L_j\|$ и неравенства (44).

Итак, мы доказали неравенство $\|U_1^{(k)}(z)\| \leq C_\varepsilon \cdot \exp(\varepsilon|z|)$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим (43).

8. Описание множества решений проблемы моментов.

ТЕОРЕМА 11. Пусть МФ $s \in \mathcal{F}_\infty$, а МФ $U_1^{(\infty)}$ и $U_2^{(\infty)}$ определены в (42). Тогда $\forall z \in \mathbb{C}_\pm$ выполнены основные матричные неравенства

$$[I \bar{z}^{r-1} s^*(z)] \frac{U_r^{(\infty)-1*}(z) J U_r^{(\infty)-1}(z)}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} I \\ z^{r-1} s(z) \end{bmatrix} \geq 0, \quad z \in \mathbb{C}_\pm, \quad r = 1, 2. \quad (45)$$

Наоборот, пусть для некоторой голоморфной в $\mathbb{C}_+$ МФ s неравенства (45) выполняются хотя бы $\forall z \in \mathbb{C}_+$. Тогда s допускает представление (2) и участвующая в этом представлении МФ $\sigma \in \mathcal{M}_\infty$, т.е. $s \in \mathcal{F}_\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s \in \mathcal{F}_\infty$. Тогда для всех $k > 0$ МФ $s \in \mathcal{F}_k$. По теореме 1 рассматриваемая МФ s удовлетворяет системе ОМН

$$[I \bar{z}^{r-1} s^*(z)] \frac{U_r^{(k)-1*}(z) J U_r^{(k)-1}(z)}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} I \\ z^{r-1} s(z) \end{bmatrix} \geq 0, \quad z \in \mathbb{C}_\pm, \quad r = 1, 2.$$

Переходя к пределу $k \rightarrow \infty$, получим неравенство (45).

Наоборот, пусть МФ s голоморфна в $\mathbb{C}_+$ и удовлетворяет там системе ОМН (45). Из (10) и (28) вытекает неравенство

$$\frac{U_r^{(k)-1*}(z) J U_r^{(k)-1}(z)}{i(\bar{z} - z)} \geq \frac{U_r^{(l)-1*}(z) J U_r^{(l)-1}(z)}{i(\bar{z} - z)}, \quad z \in \mathbb{C}_+, \quad r = 1, 2, \quad l > k.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $l \rightarrow \infty$, получим

$$\frac{U_r^{(k)-1*}(z) J U_r^{(k)-1}(z)}{i(\bar{z} - z)} \geq \frac{U_r^{(\infty)-1*}(z) J U_r^{(\infty)-1}(z)}{i(\bar{z} - z)}, \quad z \in \mathbb{C}_+, \quad r = 1, 2.$$

Умножим обе части неравенства слева на матрицу $[I \bar{z}^{r-1} s^*(z)]$, а справа на сопряженную матрицу. С учетом (45) получим

$$[I \bar{z}^{r-1} s^*(z)] \frac{U_r^{(k)-1*}(z) J U_r^{(k)-1}(z)}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} I \\ z^{r-1} s(z) \end{bmatrix} \geq 0, \quad z \in \mathbb{C}_+, \quad r = 1, 2.$$

По теореме 1 $s \in \mathcal{F}_k$. В силу произвольности k имеем $s \in \mathcal{F}_\infty$.

Доказательство следующей теоремы опирается на систему ОМН (45) и проводится по аналогии с доказательством аналогичных утверждений в [5], [13] и [14].

ТЕОРЕМА 12. Пусть проблема моментов (1) является неопределенной и резольвентная матрица $U_1^{(\infty)}$ разбита на четыре $t \times t$ блока $\alpha^{(\infty)}$, $\beta^{(\infty)}$, $\gamma^{(\infty)}$, $\delta^{(\infty)}$. Тогда формула

$$s(z) = \frac{\gamma^{(\infty)}(z)p(z) + \delta^{(\infty)}(z)q(z)}{\alpha^{(\infty)}(z)p(z) + \beta^{(\infty)}(z)q(z)}$$

устанавливает биективное соответствие между $\mathcal{F}_\infty$ и $\mathcal{S}_\infty$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Stieltjes T. Recherches sur les fractions continues // Anns. Fac. Sci. Univ. Toulouse. 1894. № 8. P. 1–122; 1895. № 9. P. 1–47.
- [2] Simon B. The classical moment problem as a self-adjoint finite difference operator // Adv. in Math. 1998. V. 137. P. 82–203.
- [3] Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.
- [4] Дюкарев Ю. М. Общая схема решения интерполяционных задач в классе Стильтеса, основанная на согласованных интегральных представлениях пар неотрицательных операторов. I // Матем. физика, анализ, геометрия. 1999. Т. 6. № 1/2. С. 30–54.
- [5] Дюкарев Ю. М., Чоке Риверо А. Е. Степенная проблема моментов на компактном интервале // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 2. С. 200–213.
- [6] Потапов В. П. Дробно-линейные преобразования матриц // Исследования по теории операторов и их приложениям. Киев: Наукова думка, 1979. С. 75–97.
- [7] Donoghue W. F. Monotone Matrix Functions and Analytic Continuation. Springer-Verlag, 1974.
- [8] Орлов С. А. Гнездящиеся матричные круги, аналитически зависящие от параметра и теоремы об инвариантности рангов радиусов предельных матричных кругов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40. № 3. С. 593–644.
- [9] Потапов В. П. К теории матричных кругов Вейля // Функциональный анализ и прикладная математика. Киев: Наукова думка, 1982. С. 113–121.
- [10] Дюкарев Ю. М. Факторизация оператор-функций мультипликативного класса Стильтеса // Докл. НАН Украины. 2000. № 9. С. 23–26.
- [11] Дюкарев Ю. М. Мультипликативная структура резольвентных матриц интерполяционных задач в классе Стильтеса // Вестн. Харьковского ун-та. Сер. Матем., прикладная матем. и мех. 1999. № 458. С. 143–153.
- [12] Потапов В. П. Теорема о модуле // Теория функций, функцион. анализ и их прилож. 1983. № 39. С. 95–106.
- [13] Дюкарев Ю. М., Кацнельсон В. Э. Мультипликативные и аддитивные классы Стильтеса аналитических матриц-функций и связанные с ними интерполяционные задачи // Теория функций, функцион. анализ и их прилож. 1981. № 36. С. 13–27.
- [14] Bolotnikov V., Sakhnovich L. On an operator approach to interpolation problems for Stieltjes functions // Integral Equations Operator Theory. 1999. № 35. P. 423–470.

Харьковский национальный университет
E-mail: Yury.M.Dyukarev@univer.kharkov.ua

Поступило
08.10.2002
Исправленный вариант
13.03.2003