Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Шашкин, Максимальное неравенство для слабо зависимого случайного поля, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 5, 773–782

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm70>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 16:31:01

УДК 519.21

МАКСИМАЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЛЯ СЛАБО ЗАВИСИМОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

А. П. Шашкин

Получено максимальное неравенство для случайного поля, обладающего свойством слабой зависимости, связанным с убыванием ковариаций функций определенного класса от элементов поля, когда расстояние между индексирующими множествами стремится к бесконечности.

Библиография: 15 названий.

Получение оценок для моментов максимума сумм независимых или определенным образом зависимых случайных величин – классическая задача теории вероятностей (см., например, [1, гл. 3], [2, § 1.4.3]). При этом рассматриваются как максимумы частных сумм последовательности случайных величин, так и максимумы сумм значений случайных полей, заданных на решетке $\mathbb{Z}^d$, берущихся по целочисленным параллелепипедам из некоторого подмножества этой решетки (см. [3]–[5]). Такого рода неравенства, наряду с результатами об асимптотической нормальности, позволяют получать принцип инвариантности и функциональный закон повторного логарифма (см., например, [3], [5], [6, гл. 2, § 8], [7]).

Цель данной работы – вывести максимальное неравенство для класса случайных полей, обладающих свойством зависимости, введенным в [8] (сходные условия зависимости рассматривались также в [9] и [10]). Это свойство заключается в должном убывании ковариаций ограниченных липшицевых функций от непересекающихся наборов элементов поля при стремлении расстояния между индексирующими множествами к бесконечности. Напомним, что функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, называется *липшицевой*, если

$$\text{Lip}(f) := \sup_{\substack{x, y \in \mathbb{R}^n \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|_1} < \infty.$$

Здесь $\|z\|_1 = |z_1| + \dots + |z_n|$, $z \in \mathbb{R}^n$. Для конечного множества Q пусть $|Q|$ – его мощность. Множество $\mathbb{Z}^d$ снабдим метрикой

$$\rho(t, t') = \max_{i=1, \dots, d} |t_i - t'_i|, \quad t, t' \in \mathbb{Z}^d.$$

Соответствующее расстояние между подмножествами $I, J \subset \mathbb{Z}^d$

$$\text{dist}(I, J) = \inf\{\rho(i, j) : i \in I, j \in J\}.$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00724.

Нам потребуются также следующие обозначения: для $n \in \mathbb{N}$ и $\tau \in \mathbb{R}$ положим

$$B(n, \tau) = \begin{cases} n^\tau, & \tau > 0, \\ \ln(n \vee e), & \tau = 0, \\ 1, & \tau < 0. \end{cases}$$

Для $x, y \in \mathbb{R}$, как обычно, $x \vee y = \max\{x, y\}$, $x \wedge y = \min\{x, y\}$.

Пусть $X = \{X_j, j \in \mathbb{Z}^d\}$ – центрированное случайное поле с действительными значениями, заданное на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Для $p \geq 1$ положим

$$D_p = \sup_{j \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E}|X_j|^p.$$

Для $W \subset \mathbb{Z}^d$, $|W| < \infty$, пусть $S_W = \sum_{j \in W} X_j$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Поле X называется (BL, θ) -зависимым, если существует последовательность $\theta_r \downarrow 0$, $r \in \mathbb{N}$, такая, что для любых конечных непересекающихся множеств $I, J \subset \mathbb{Z}^d$ таких, что $\text{dist}(I, J) \geq r$, где $r \in \mathbb{N}$, и ограниченных липшицевых функций $F: \mathbb{R}^{|I|} \rightarrow \mathbb{R}$ и $G: \mathbb{R}^{|J|} \rightarrow \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$|\text{cov}(F(X_i, i \in I), G(X_j, j \in J))| \leq \text{Lip}(F) \text{Lip}(G)(|I| + |J|)\theta_r. \quad (1)$$

Имеются интересные модели случайных полей, обладающих свойством (1) и некоторыми сходными свойствами, где θ_r оценивается в терминах ковариационной функции поля X (см., например, [9], [11], [12]). Будем предполагать, что существуют $c_0 > 0$ и $\lambda > 0$ такие, что

$$\theta_r \leq c_0 r^{-\lambda}, \quad r \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Пусть U – произвольный целочисленный параллелепипед в $\mathbb{Z}^d$ с длинами ребер $l_1, \dots, l_d \in \mathbb{N}$, т.е. $U = V \cap \mathbb{Z}^d$, где $V = (a_1, a_1 + l_1] \times \dots \times (a_d, a_d + l_d]$ и $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{Z}$. Обозначим $\mathcal{U}$ класс таких множеств U .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $X = \{X_j, j \in \mathbb{Z}^d\}$ является (BL, θ) -зависимым центрированным случайным полем, удовлетворяющим условию (2). Предположим, что $D_p < \infty$ для некоторого $p > 4$. Тогда для любого $U \in \mathcal{U}$ справедлива оценка

$$\mathbb{E}S_U^4 \leq |U|(D_4 + 6D_2^2|U| + C_1(d, \tau, v)c_0^v D_p^{2/(p-2)} B(|U|, \tau)), \quad (3)$$

где c_0 фигурирует в (2),

$$v = \frac{p-4}{p-2}, \quad \tau = 3 - \frac{\lambda v}{d}, \quad C_1(d, \tau, v) = 290d^2 3^{3d} v^{-1} \psi(\tau), \quad (4)$$

$$\psi(\tau) = \begin{cases} \tau^{-1} \vee 1, & \tau > 0, \\ 2, & \tau = 0, \\ 2(|\tau|^{-1} \vee 1), & \tau < 0. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}S_U^4 &= \sum_{j \in U} \mathbb{E}X_j^4 + \sum_{J_4 \in \Lambda} \mathbb{E}X_{j_1}X_{j_2}X_{j_3}X_{j_4} + 3 \sum_{\substack{j_1, j_2 \in U \\ j_1 \neq j_2}} \mathbb{E}X_{j_1}^2X_{j_2}^2 \\ &= S^{(1)} + S^{(2)} + 3S^{(3)}; \end{aligned}$$

здесь вторая сумма берется по множеству Λ всех упорядоченных наборов индексов $J_4 = (j_1, j_2, j_3, j_4)$ таких, что хотя бы один из четырех индексов отличен от каждого из других.

Очевидно, $S^{(1)} \leq D_4|U|$. Для оценки $S^{(2)}$ представим множество четверок индексов, по которым ведется суммирование в $S^{(2)}$, в виде объединения множеств Λ_r , $r = 1, \dots, l$, по следующему правилу: набор $T_4 = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ принадлежит типу Λ_r , если

$$\max_{q=1,2,3,4} \text{dist}(\{t_q\}, T_4 \setminus \{t_q\}) = r.$$

Без ограничения общности можно считать, что длины ребер U связаны неравенствами $l_1 \leq \dots \leq l_d$. Пусть $l_0 = 0$. Тогда каждому $r = 1, \dots, l_d$ однозначно сопоставляется $k(r)$, $0 \leq k \leq d-1$, такое, что $l_k < r \leq l_{k+1}$. Нетрудно показать (аналогично [9], [13]), что

$$|\Lambda_r| \leq 144d \left(\prod_{i=1}^k l_i \right)^3 (3r)^{3(d-k)-1} |U|, \quad (5)$$

где $k = k(r)$ (как обычно, произведение по пустому множеству индексов считается равным единице). Зафиксируем набор $J_4 = (j_1, j_2, j_3, j_4) \in \Lambda_r$, $r = 1, \dots, l$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\text{dist}(\{j_1\}, T_4 \setminus \{j_1\}) = r$. Для упрощения записи далее будем писать X_q вместо X_{j_q} , $q = 1, 2, 3, 4$. Очевидно, $\mathbb{E}X_1X_2X_3X_4 = \text{cov}(X_1, X_2X_3X_4)$.

Пусть $A > 0$. Введем функцию

$$H_A(t) = (|t| \wedge A) \cdot \text{sgn}(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Тогда $|H^A(t)| \leq A$, $t \in \mathbb{R}$, и $\text{Lip}(H_A) = 1$. Для $u = 2, 3, 4$ представим случайные величины X_u в виде $X_u = X'_u + X''_u$, где $X'_u = H_A(X_u)$, $X''_u = X_u - X'_u$. Ясно, что

$$\begin{aligned} |\text{cov}(X_1, X_2X_3X_4)| &\leq |\text{cov}(X_1, X'_2X'_3X'_4)| + |\text{cov}(X_1, X''_2X'_3X'_4)| \\ &\quad + |\text{cov}(X_1, X'_2X''_3X'_4)| + |\text{cov}(X_1, X'_2X'_3X''_4)| \\ &\quad + |\text{cov}(X_1, X''_2X''_3X'_4)| + |\text{cov}(X_1, X''_2X'_3X''_4)| \\ &\quad + |\text{cov}(X_1, X'_2X'_3X''_4)| + |\text{cov}(X_1, X''_2X''_3X''_4)|. \end{aligned} \quad (7)$$

По определению (BL, θ) -зависимости $|\text{cov}(X_1, X'_2X'_3X'_4)| \leq 4c_0A^2r^{-\lambda}$.

Для $x > 0$ положим

$$f_x(t) = I\{t \geq x\} - I\{t \leq -x\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Используя просто проверяемое равенство

$$X''_u = \int_A^{+\infty} f_x(X_u) dx, \quad u = 2, 3, 4,$$

и теорему Фубини, имеем

$$|\operatorname{cov}(X_1, X_2'' X_3' X_4')| = \left| \operatorname{cov} \left(X_1, \int_A^\infty f_x(X_2) X_3' X_4' dx \right) \right| \leq \int_A^\infty |\mathbb{E} X_1 f_x(X_2) X_3' X_4'| dx.$$

Теперь оценим подынтегральное выражение. Применяя неравенства Гёльдера и Чебышева, имеем

$$\begin{aligned} |\mathbb{E} X_1 f_x(X_2) X_3' X_4'| &\leq \mathbb{E} |X_1 f_x(X_2) X_3' X_4'| \\ &\leq A^2 (\mathbb{E} |X_1|^p)^{1/p} (\mathbb{P}(|X_2| \geq x))^{(p-1)/p} \leq D_p A^2 x^{1-p}, \end{aligned} \quad (8)$$

т.е.

$$|\operatorname{cov}(X_1, X_2'' X_3' X_4')| \leq D_p A^2 \int_A^\infty x^{1-p} dx = \frac{D_p}{p-2} A^{4-p}.$$

Аналогично оцениваются $|\operatorname{cov}(X_1, X_2' X_3'' X_4')|$ и $|\operatorname{cov}(X_1, X_2' X_3' X_4'')|$. Для слагаемого $|\operatorname{cov}(X_1, X_2'' X_3'' X_4')|$, пользуясь теми же рассуждениями, получим, что

$$|\operatorname{cov}(X_1, X_2'' X_3'' X_4')| \leq \int_A^\infty \int_A^\infty |\mathbb{E} X_1 f_{x_2}(X_2) f_{x_3}(X_3) X_4'| dx_2 dx_3. \quad (9)$$

Подынтегральное выражение оценим так же, как в (8), используя то, что $\mathbb{P}(|X_2| \geq x_2, |X_3| \geq x_3) \leq \mathbb{P}(|X_2| \geq x_2) \wedge \mathbb{P}(|X_3| \geq x_3)$ для любых $x_2 > 0, x_3 > 0$. Подставляя полученное выражение в (9), придем к оценке

$$|\operatorname{cov}(X_1, X_2'' X_3'' X_4')| \leq D_p A \int_A^\infty \int_A^\infty (x_2^{1-p} \wedge x_3^{1-p}) dx_2 dx_3 \leq \frac{2D_p}{p-3} A^{4-p}.$$

Аналогично оцениваются $|\operatorname{cov}(X_1, X_2'' X_3' X_4'')|$ и $|\operatorname{cov}(X_1, X_2' X_3'' X_4'')|$. Наконец, для слагаемого $|\operatorname{cov}(X_1, X_2'' X_3'' X_4'')|$ те же рассуждения приводят к тройному интегралу

$$|\operatorname{cov}(X_1, X_2'' X_3'' X_4'')| \leq D_p \int_A^\infty \int_A^\infty \int_A^\infty (x_2 \vee x_3 \vee x_4)^{1-p} dx_2 dx_3 dx_4 \leq \frac{3D_p}{p-4} A^{4-p}.$$

Суммируя полученные оценки, видим, что

$$|\operatorname{cov}(X_1, X_2 X_3 X_4)| \leq 4c_0 A^2 r^{-\lambda} + \frac{12D_p}{p-4} A^{4-p}. \quad (10)$$

Оптимизация по A показывает, что

$$|\operatorname{cov}(X_1, X_2 X_3 X_4)| \leq 4v^{-1} c_0^v \left(\frac{3D_p}{2} \right)^{2/(p-2)} r^{-\lambda v},$$

где v введено в (4). Таким образом, учитывая (5), имеем

$$\begin{aligned} |S^{(2)}| &\leq 4v^{-1} c_0^v \left(\frac{3D_p}{2} \right)^{2/(p-2)} \sum_{r=1}^{l_d} |\Lambda_r| r^{-\lambda v} \\ &\leq 576d |U| v^{-1} c_0^v \left(\frac{3D_p}{2} \right)^{\frac{2}{p-2}} \sum_{k=0}^{d-1} \left(\prod_{i=1}^k l_i \right)^3 \sum_{r: k(r)=k} 3^{3(d-k)-1} r^{3(d-k)-1-\lambda v} \\ &\leq 288d |U| 3^{3d} v^{-1} c_0^v D_p^{2/(p-2)} \sum_{k=0}^{d-1} \left(\prod_{i=1}^k l_i \right)^\tau \sum_{r=l_k+1}^{l_{k+1}} r^{(d-k)\tau-1}, \end{aligned} \quad (11)$$

где τ введено в (4), а сумма по пустому множеству индексов считается равной нулю. Отсюда нетрудно получить, что

$$|S^{(2)}| \leq 288d^2 \cdot 3^{3d} v^{-1} c_0^v D_p^{2/(p-2)} \psi(\tau) |U| B(|U|, \tau).$$

Обратимся теперь к оценке $S^{(3)}$. Воспользуемся представлением

$$X_u^2 = Z'_u + Z''_u, \quad Z'_u = H_{A^2}(X_u^2),$$

где $A > 0$ и $u = j_1, j_2$. Тогда

$$\mathbb{E} X_{j_1}^2 X_{j_2}^2 \leq \mathbb{E} Z'_{j_1} \mathbb{E} Z'_{j_2} + |\text{cov}(Z'_{j_1}, Z'_{j_2})| + \mathbb{E} Z'_{j_1} Z''_{j_2} + \mathbb{E} Z''_{j_1} Z'_{j_2} + \mathbb{E} Z''_{j_1} Z''_{j_2}.$$

Очевидно, $\mathbb{E} Z'_{j_1} \mathbb{E} Z'_{j_2} \leq D_2^2$; далее, учитывая, что

$$Z''_u = 2 \int_A^\infty x I\{|X_u| \geq x\} dx,$$

аналогично (7)–(10) получаем, что для $j_1, j_2 \in U$ таких, что $|j_1 - j_2| = r, r = 1, \dots, l$,

$$\mathbb{E} X_{j_1}^2 X_{j_2}^2 \leq D_2^2 + 8v^{-1} c_0^v D_p^{2/(p-2)} r^{-\lambda v}.$$

Суммируя по r и сравнивая каждое слагаемое с соответствующими элементами суммы в (11), получаем утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. С помощью неравенства Коши–Буняковского–Шварца имеем $|S^{(3)}| \leq D_4 |U|^2$. Оценка $\mathbb{E} S_U^4 \leq C |U|^2$, где C не зависит от U , может быть также получена с помощью результата работы [14]. Однако в доказанной теореме коэффициент при $|U|^2$ в правой части (3) не зависит от моментов величин X_j порядка выше, чем 2. Это будет использовано при доказательстве теоремы 3.

Далее потребуются новые обозначения. Назовем целочисленный параллелепипед $V \subseteq U$, где $U \in \mathcal{U}$, *стандартно вложенным в U* , если минимальная вершина V (в смысле лексикографического порядка в $\mathbb{Z}^d$) совпадает с минимальной вершиной U , и обозначим это соотношение $V \triangleleft U$. Пусть

$$M_U = \max_{V \triangleleft U} |S_V|.$$

Задача оценки максимума модуля сумм, берущихся по произвольным целочисленным параллелепипедам, содержащимся в U , сводится к оценке M_U (см., например, [3]).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены условия предыдущей теоремы и $\lambda \geq 2dv^{-1}$. Тогда

$$\mathbb{E} M_U^4 \leq \alpha^d (7D_4 + C_1(d, \tau, v) c_0^v D_p^{2/(p-2)}) |U|^2. \quad (12)$$

где $\alpha = (5/2)(1 - 2^{-1/4})^{-4}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение следует из (3) и известной теоремы Морица (см. [15, следствие 1]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть X является (BL, θ) -зависимым центрированным случайным полем, причем $D_2 < \infty$ и выполнено (2). Тогда для произвольного $m \in \mathbb{N}$ и любого целочисленного параллелепипеда U верна оценка

$$\mathbb{E} M_U^2 \leq 3m^d \left(D_1^2 |U|^2 + 18 \sum_{j \in U} \mathbb{E} X_j^2 + 16c_0 |U| m^{-\lambda} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можно считать, что вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1) \otimes (\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2)$, причем случайные величины $\{X_j(\omega_1), j \in U, \omega_1 \in \Omega_1\}$ заданы на $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1)$ и на $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2)$ существует случайное поле $\{\varepsilon_j(\omega_2), j \in \mathbb{Z}^d, \omega_2 \in \Omega_2\}$, где величины ε_i независимы и каждая из них принимает значения 1 и -1 с вероятностью $1/2$. Для случайных величин $Y(\omega_1, \omega_2) = F(X_j(\omega_1), \varepsilon_j(\omega_2), j \in U)$, $Y'(\omega_1, \omega_2) = G(X_j(\omega_1), \varepsilon_j(\omega_2), j \in U)$, где $F: \mathbb{R}^{2|U|} \rightarrow \mathbb{R}$ и $G: \mathbb{R}^{2|U|} \rightarrow \mathbb{R}$ – борелевские функции, будем обозначать

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_1 Y &= \int_{\Omega_1} Y d\mathbb{P}_1, & \mathbb{E}_2 Y &= \int_{\Omega_2} Y d\mathbb{P}_2, \\ \text{cov}_1(Y, Y') &= \mathbb{E}_1 Y Y' - \mathbb{E}_1 Y \mathbb{E}_1 Y', & \|Y\| &= (\mathbb{E}_1 Y^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Очевидно, имеем $\mathbb{E}_1 \mathbb{E}_2 Y = \mathbb{E}_2 \mathbb{E}_1 Y = \mathbb{E} Y$, а если при каждом $\omega_2 \in \Omega_2$ F и G – липшицевы функции, то для оценки ковариации $\text{cov}_1(Y, Y')$ можно использовать условие зависимости (1).

Пусть $e_0 \in U$ – минимальный элемент U в смысле лексикографического порядка. Рассмотрим множество $\Gamma = \{0, \dots, m-1\}^d$. Для $\gamma \in \Gamma$ введем целочисленную решетку

$$\mathbb{Z}^d(\gamma) = \{j \in \mathbb{Z}^d : j = e_0 + (mz_1, \dots, mz_d), z_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, d\}$$

и положим $U(\gamma) = U \cap \mathbb{Z}^d(\gamma)$. Очевидно,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |U(\gamma)| = |U| \quad \text{и} \quad \min_{\substack{i, j \in U(\gamma) \\ i \neq j}} \text{dist}(i, j) = m, \quad U(\gamma) \neq \emptyset. \quad (13)$$

Пусть

$$M_U(\gamma) = \max_{V \triangleleft U} |S_{V \cap U(\gamma)}|.$$

Тогда

$$\mathbb{E} M_U^2 \leq m^d \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{E} M_U^2(\gamma). \quad (14)$$

Оценим $\mathbb{E} M_U^2(\gamma)$ для фиксированного $\gamma \in \Gamma$ такого, что $U(\gamma) \neq \emptyset$. Следуя [5], для $V \triangleleft U$ положим

$$\begin{aligned} S_{1,V} &= \sum_{\substack{j \in V \cap U(\gamma) \\ \varepsilon_j = 1}} X_j, & S_{-1,V} &= \sum_{\substack{j \in V \cap U(\gamma) \\ \varepsilon_j = -1}} X_j, & \tilde{S}_V &= S_{1,V} - S_{-1,V}, \\ M &= M_U(\gamma), & M_1 &= \max_{V \triangleleft U} |S_{1,V}|, & M_{-1} &= \max_{V \triangleleft U} |S_{-1,V}|, & \widetilde{M} &= \max_{V \triangleleft U} |\tilde{S}_V|. \end{aligned}$$

Имеем

$$2M_{\pm 1} \leq \max_{V \triangleleft U} |S_{1,V} + S_{-1,V}| + \max_{V \triangleleft U} |S_{1,V} - S_{-1,V}| \leq M + \widetilde{M};$$

следовательно, $M_1 + M_{-1} \leq M + \widetilde{M}$. Очевидно,

$$M \leq M_1 + M_{-1}, \quad |M_1 - M_{-1}| \leq \widetilde{M}.$$

Так как M не зависит от $\{\varepsilon_j, j \in U\}$, то $(EM^2)^{1/2} = \|M\| \leq \|M_1\| + \|M_{-1}\|$. Пусть

$$\xi = \frac{M_1}{\|M_1\| \vee \beta}, \quad \eta = \frac{M_{-1}}{\|M_{-1}\| \vee \beta},$$

где $\beta = (c_0|U(\gamma)|m^{-\lambda})^{1/2}$, причем в случае, когда знаменатель какой-либо из дробей равен нулю, вся дробь полагается равной нулю. Легко видеть, что $\|\xi\| \leq 1$, $\|\eta\| \leq 1$. При каждом $\omega_2 \in \Omega_2$ множества $\{j \in U(\gamma) : \varepsilon_j = 1\}$ и $\{j \in U(\gamma) : \varepsilon_j = -1\}$ не пересекаются, и величины M_1 и M_{-1} представляют собой липшицевы функции от непересекающихся наборов величин $X_j, j \in U(\gamma)$. Для этих функций константы Липшица равны 1. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 \xi M_{-1} &= \text{cov}_1(\xi, M_{-1}) + \mathbf{E}_1 \xi \mathbf{E}_1 M_{-1} \\ &\leq |\text{cov}_1(\xi, M_{-1})| + \|\xi\| \mathbf{E}_1 M_{-1} \leq \beta + \mathbf{E}_1 M_{-1} \end{aligned}$$

ввиду (BL, θ) -зависимости и (13). Аналогично $\mathbf{E}_1 \eta M_1 \leq \beta + \mathbf{E}_1 M_1$. Заметим также, что если $\|M_1\| \geq \beta$, то $\mathbf{E}_1 \xi M_1 = \|M_1\|$, а если $\|M_{-1}\| \geq \beta$, то $\mathbf{E}_1 \eta M_{-1} = \|M_{-1}\|$.

Разберем четыре случая.

Случай 1: $\|M_1\| \geq \beta, \|M_{-1}\| \geq \beta$. В силу доказанных равенств и оценок

$$\begin{aligned} (EM^2)^{1/2} &\leq \|M_1\| + \|M_{-1}\| = \mathbf{E}_1 \xi M_1 + \mathbf{E}_1 \eta M_{-1} \\ &= \mathbf{E}_1 (\xi - \eta)(M_1 - M_{-1}) + \mathbf{E}_1 \xi M_{-1} + \mathbf{E}_1 \eta M_1 \\ &\leq \|\xi - \eta\| \|M_1 - M_{-1}\| + 2\beta + \mathbf{E}_1 (M_1 + M_{-1}) \leq 2\|\widetilde{M}\| + 2\beta + \mathbf{E}_1 (M + \widetilde{M}) \\ &\leq 3\|\widetilde{M}\| + 2\beta + \mathbf{E}_1 M. \end{aligned}$$

Случай 2: $\|M_1\| \geq \beta, \|M_{-1}\| < \beta$. Тогда $\mathbf{E}_1 \eta M_{-1} \leq \beta$. Поэтому

$$\begin{aligned} (EM^2)^{1/2} &\leq \|M_1\| + \|M_{-1}\| \leq \mathbf{E}_1 \xi M_1 + \beta + \mathbf{E}_1 \eta M_{-1} - \mathbf{E}_1 \eta M_{-1} \\ &\leq |\beta - \mathbf{E}_1 \eta M_{-1}| + \mathbf{E}_1 \xi M_1 + \mathbf{E}_1 \eta M_{-1} \leq 2\beta + \mathbf{E}_1 \xi M_1 + \mathbf{E}_1 \eta M_{-1} \\ &\leq 3\|\widetilde{M}\| + 4\beta + \mathbf{E}_1 M \end{aligned}$$

аналогично первому случаю.

Случай 3: $\|M_1\| < \beta, \|M_{-1}\| \geq \beta$. Рассматривается аналогично случаю 2.

Случай 4: $\|M_1\| < \beta, \|M_{-1}\| < \beta$. В этом случае

$$(EM^2)^{1/2} \leq \|M_1\| + \|M_{-1}\| < 2\beta.$$

Итак, имеем $(EM^2)^{1/2} \leq 3\|\widetilde{M}\| + 4\beta + EM$. Таким образом,

$$EM^2 \leq 3(9E\widetilde{M}^2 + (EM)^2 + 16c_0|U(\gamma)|m^{-\lambda}). \quad (15)$$

Оценим $\mathbf{E}\widetilde{M}^2$. При фиксированном $\omega_1 \in \Omega_1$

$$\widetilde{M} = \max_{V \triangleleft U} \left| \sum_{j \in V \cap U(\gamma)} \zeta_j \right|,$$

где $\zeta_j = \varepsilon_j X_j$ – независимые симметричные случайные величины (на вероятностном пространстве $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbf{P}_2)$) с $\mathbf{E}_2 \zeta_j = 0$ и $\mathbf{E}_2 \zeta_j^2 = X_j^2$, $j \in U$. Применяя принцип отражения, видим, что

$$\mathbf{E}_2 \widetilde{M}^2 \leq 2 \mathbf{E}_2 \left(\sum_{j \in U(\gamma)} \zeta_j \right)^2 \leq 2 \sum_{j \in U(\gamma)} X_j^2, \quad (16)$$

поэтому

$$\mathbf{E} \widetilde{M}^2 = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \widetilde{M}^2 \leq 2 \sum_{j \in U(\gamma)} \mathbf{E} X_j^2.$$

Принимая во внимание (13)–(16), получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} M_U^2 &\leq 3m^d \sum_{\gamma \in \Gamma} \left(18 \sum_{j \in U(\gamma)} \mathbf{E} X_j^2 + \left(\sum_{j \in U(\gamma)} \mathbf{E} |X_j| \right)^2 + 16c_0 |U(\gamma)| m^{-\lambda} \right) \\ &\leq 3m^d \left(18 \sum_{j \in U} \mathbf{E} X_j^2 + D_1^2 \sum_{\gamma \in \Gamma} |U(\gamma)|^2 + 16c_0 |U| m^{-\lambda} \right) \\ &\leq 3m^d \left(18 \sum_{j \in U} \mathbf{E} X_j^2 + D_1^2 |U|^2 + 16c_0 |U| m^{-\lambda} \right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть X есть (BL, θ) -зависимое центрированное случайное поле, и существует $q \geq 2$ такое, что $D_q < \infty$, а λ в (2) удовлетворяет условию $\lambda > 3d$. Тогда для любого $U \in \mathcal{U}$ справедливо неравенство

$$|U|^{-1} \mathbf{E} M_U^2 \leq \Delta = (96c_0 + C_2(d, \lambda)(\alpha^d c_0)^{1/2} + (2(6\alpha^d)^{1/2} + 432)D_2 + 24D_2^2 + 8(\alpha^d D_q)^{1/2}),$$

где α введено в (12), $C_2(d, \lambda) = 97d \cdot 3^{3d/2}((\lambda d^{-1} - 3)^{-1/2} \vee 1)$. Если, кроме того, случайное поле $\{X_j^2, j \in \mathbb{Z}^d\}$ равномерно интегрируемо, то и семейство случайных величин $\{|U|^{-1} M_U^2, U \in \mathcal{U}\}$ равномерно интегрируемо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем центрированные урезанные случайные величины

$$X'_j = H_{\sqrt{|U|}}(X_j) - \mathbf{E} H_{\sqrt{|U|}}(X_j), \quad X''_j = X_j - X'_j, \quad j \in U,$$

где функция H_A определена согласно формуле (6). Положим

$$S'_U = \sum_{j \in V} X'_j, \quad S''_U = \sum_{j \in V} X''_j, \quad M'_U = \max_{V \triangleleft U} |S'_V|, \quad M''_U = \max_{V \triangleleft U} |S''_V|.$$

Для оценки моментов величин X_j и X''_j используем простую оценку

$$\mathbf{E}|Z - \mathbf{E}Z|^p \leq 2^p \mathbf{E}|Z|^p, \quad (17)$$

справедливую для любого $p \geq 1$ и любой случайной величины Z , имеющей момент порядка p .

Пусть $m \in \mathbb{N}$ – число, значение которого будет подобрано позже. Оценим $E(M_U'')^2$ с помощью (17) и теоремы 2 (аналогично [5]):

$$\begin{aligned} E(M_U'')^2 &\leq 12m^d \left(\left(|U| \max_{j \in U} E|X_j| I\{|X_j| \geq \sqrt{|U|}\} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 18|U| \max_{j \in U} E X_j^2 I\{|X_j| \geq \sqrt{|U|}\} + 4c_0 |U| m^{-\lambda} \right) \\ &\leq 12m^d |U| (b^2(\sqrt{|U|}) + 18b(\sqrt{|U|}) + 4c_0 m^{-\lambda}), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$b(x) = \sup_{j \in \mathbb{Z}^d} E X_j^2 I\{|X_j| \geq x\} \leq D_2, \quad x > 0.$$

Теперь оценим $E M_U'^4$, пользуясь теоремой 1. Величины X_j' ограничены и, следовательно, имеют конечные абсолютные моменты всех порядков. Для каждого $p \geq q$, используя (17), нетрудно показать, что

$$D_p' = \sup_{j \in \mathbb{Z}^d} E|X_j'|^p \leq 2^p |U|^{(p-q)/2} D_q. \quad (19)$$

Пусть $p > 4, p \geq q$. Применяя теорему 1, с учетом (19) получаем, что

$$\begin{aligned} E S_U'^4 &\leq |U| (6D_2^2 |U| + D_4' + C_1(d, \tau, v) c_0^v D_p'^{2/(p-2)} B(|U|, \tau)) \\ &\leq |U| (6D_2^2 |U| + 16D_q |U|^{(2-q/2) \vee 0} \\ &\quad + 2^{(2p)/(p-2)} C_1(d, \tau, v) c_0^v |U|^{(p-q)/(p-2)} D_q^{2/(p-2)} B(|U|, \tau)), \end{aligned}$$

где v, τ и $C_1(d, \tau, v)$ определены в (4).

При всех достаточно больших p имеем $\tau < 0$ и, следовательно, $B(|U|, \tau) = 1$. Устремив p к бесконечности, приходим к оценке

$$E S_U'^4 \leq (6D_2^2 + 16D_q + 2320d^2 \cdot 3^{3d} ((\lambda d^{-1} - 3)^{-1} \vee 1) c_0) |U|^2.$$

Снова используя теорему Морица, получаем, что при $\lambda > 3d$ выполнено неравенство

$$E(M_U')^4 \leq \alpha^d E(S_U')^4 \leq \alpha^d (6D_2^2 + 16D_q + 2320d^2 \cdot 3^{3d} ((\lambda d^{-1} - 3)^{-1} \vee 1) c_0) |U|^2. \quad (20)$$

Чтобы доказать первое утверждение теоремы, возьмем $m = 1$ в (18). Ввиду (18), (20) и того, что $M_U \leq M_U' + M_U''$, имеем

$$\begin{aligned} E|U|^{-1} M_U^2 &\leq 2|U|^{-1} (E M_U'^2 + E M_U''^2) \\ &\leq 24(b^2(\sqrt{|U|}) + 18b(\sqrt{|U|}) + 4c_0) \\ &\quad + \alpha^{d/2} (2\sqrt{6} D_2 + 8D_q^{1/2} + C_2(d, \lambda) c_0^{1/2}) \leq \Delta. \end{aligned}$$

Пусть теперь семейство $\{X_j^2, j \in \mathbb{Z}^d\}$ равномерно интегрируемо. Тогда $b(x) \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty$. Пусть $m(n), n \in \mathbb{N}$, – последовательность натуральных чисел такая, что $m(n) \rightarrow \infty$ и $m^d(n) b(\sqrt{n}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Возьмем в (18) $m = m(|U|)$. Так как $\lambda > 3d$, при таком выборе m из (18) следует, что $|U|^{-1} \mathbf{E} M_U''^2 \rightarrow 0$, $|U| \rightarrow \infty$. Для произвольного $\mu > 0$ имеем

$$\begin{aligned} |U|^{-1} \mathbf{E} M_U^2 I\{M_U^2 \geq \mu|U|\} &\leq 6|U|^{-1} \mathbf{E} (M_U'')^2 + 2|U|^{-1} \mathbf{E} (M_U')^2 I\{(M_U')^2 \geq \frac{\mu|U|}{4}\} \\ &\leq 6|U|^{-1} \mathbf{E} (M_U'')^2 + 8\mu^{-1} |U|^{-2} \mathbf{E} (M_U')^4 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $|U| \rightarrow \infty$ и $\mu \rightarrow \infty$, откуда легко следует равномерная интегрируемость семейства $\{|U|^{-1} M_U^2, U \in \mathcal{U}\}$. Теорема доказана.

Автор признателен профессору А.В. Булинскому за постановку задачи и помощь в работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987.
- [2] Doukhan P. Mixing: Properties and Examples // Lecture Notes in Statistics. V. 85. Berlin: Springer, 1994.
- [3] Bulinski A. V., Keane M. S. Invariance principle for associated random fields // J. of Math. Sci. 1996. V. 81. № 5. P. 2905–2911.
- [4] Wichura M. J. Inequalities with applications to the weak convergence of random processes with multi-dimensional time parameters // Ann. Math. Statist. 1969. V. 40. № 2. P. 681–687.
- [5] Zhang L.-X., Wen J. A weak convergence for negatively associated fields // Statist. Probab. Lett. 2001. V. 53. № 3. P. 259–267.
- [6] Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
- [7] Булинский А. В. Функциональный закон повторного логарифма для ассоциированных случайных полей // Фундамент. и прикл. матем. 1995. Т. 1. № 3. С. 623–639.
- [8] Bulinski A. V., Suquet C. Normal approximation for quasi-associated random fields // Statist. Probab. Lett. 2001. V. 54. № 2. P. 215–226.
- [9] Doukhan P., Lang G. Rates in the empirical central limit theorem for stationary weakly dependent random fields // Statistical Inference for Stochastic Processes. 2002. V. 5. № 2. P. 199–228.
- [10] Doukhan P., Louhichi S. A new weak dependence condition and application to moment inequalities // Stochastic Process. Appl. 1999. V. 84. № 2. P. 313–342.
- [11] Булинский А. В., Шабанович Э. Асимптотическое поведение некоторых функционалов от положительно и отрицательно зависимых случайных полей // Фундамент. и прикл. матем. 1998. Т. 4. № 2. С. 479–492.
- [12] Шашкин А. П. Квазиассоциированность гауссовской системы случайных векторов // УМН. 2002. Т. 57. № 6. С. 199–200.
- [13] Булинский А. В. Неравенства для моментов сумм ассоциированных мультииндексированных величин // Теория вероятн. и ее примен. 1993. Т. 38. № 2. С. 417–425.
- [14] Бахтин Ю. Ю., Булинский А. В. Моментные неравенства для сумм зависимых мультииндексированных величин // Фундамент. и прикл. матем. 1997. Т. 3. № 4. С. 1101–1108.
- [15] Moricz F. A general moment inequality for the maximum of the rectangular partial sums of multipleseries // Acta Math. Hung. 1983. V. 41. № 3–4. P. 337–346.