Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, Параметрическая буферность в сингулярно возмущенном телеграфном уравнении с маятниковой нелинейностью, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 6, 866–875

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm700>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 12:30:07

УДК 517.926

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ БУФЕРНОСТЬ В СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОМ ТЕЛЕГРАФНОМ УРАВНЕНИИ С МАЯТНИКОВОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов

Рассматривается краевая задача

$$u_{ttt} + \varepsilon u_t + (1 + \varepsilon \alpha \cos 2\tau) \sin u = \varepsilon \sigma^2 u_{xx}, \quad u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0,$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, $\tau = (1 + \varepsilon \delta)t$, $\alpha, \sigma > 0$, а знак δ произволен. Доказано существование (при подходящем выборе параметров внешнего воздействия α, δ и при надлежащем уменьшении σ) любого фиксированного числа экспоненциально устойчивых 2π -периодических по τ решений.

Библиография: 14 названий.

Основы теории нелинейного параметрического резонанса для обыкновенных дифференциальных уравнений были заложены в монографии [1], а ее результаты распространены на некоторые классы волновых уравнений в [2]. Изучение параметрического резонанса в сингулярно возмущенных системах начато по инициативе Ю. С. Колесова в [3] для параболических систем типа реакция-диффузия с малой диффузией. В [4]–[7] проводился анализ параметрических колебаний в сингулярно возмущенных телеграфных уравнениях.

Как отмечено Колесовым [6], мотивацией для таких исследований служит то обстоятельство, что здесь мы оказываемся “в окрестности наиболее глубокой особенности”. А это, в свою очередь, может позволить в полном объеме выявить все динамические эффекты, порождаемые параметрическим внешним воздействием.

Плодотворность такой точки зрения иллюстрируют результаты [8], где показано, что в параболических и гиперболических системах с малыми коэффициентами диффузии реализуется феномен параметрической буферности. Суть этого явления состоит в том, что при подходящем выборе параметров внешнего воздействия и при надлежащем уменьшении диффузии можно гарантировать существование в указанных системах любого фиксированного числа устойчивых периодических по времени решений.

Однако в [8] остался без рассмотрения важный частный случай – телеграфное уравнение с маятниковой нелинейностью (так в теории колебаний принято называть нелинейную зависимость типа “ $\sin u$ ” от искомой функции u). Отметим, что сингулярно возмущенное телеграфное уравнение впервые изучалось в [7], но явление параметрической буферности установлено там не было.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00157.

Цель настоящей статьи – восполнить данный пробел.

1. Постановка задачи и описание результатов. На отрезке $0 \leq x \leq \pi$ рассмотрим краевую задачу

$$u_{tt} + \varepsilon u_t + (1 + \varepsilon \alpha \cos 2\tau) \sin u = \varepsilon \sigma^2 u_{xx}, \quad u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0, \quad (1)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, $\tau = (1 + \varepsilon \delta)t$, параметры $\alpha, \sigma > 0$ и параметр δ , знак которого произволен, имеют порядок единицы.

Будем интересоваться вопросами существования и устойчивости периодических по t решений краевой задачи (1), бифурцирующих из нуля при $\varepsilon > 0$. При этом устойчивость понимается в метрике фазового пространства (пространства начальных условий (u, u_t)) $\dot{W}_2^2(0, \pi) \times W_2^1(0, \pi)$, где $\dot{W}_2^2, W_2^1$ – соболевские пространства функций, причем функции, входящие в первое из них, удовлетворяют граничным условиям из (1). Понятие фазового пространства позволяет практически без изменений переносить на различные классы операторных дифференциальных уравнений основные положения теории нелинейных колебаний.

Для решения поставленной проблемы воспользуемся методом квазинормальных форм Колесова. Следуя методике работ [6], [7], подставим в (1) ряд по нечетным степеням $\sqrt{\varepsilon}$:

$$u = \varepsilon^{1/2} u_0(s, \tau, x) + \varepsilon^{3/2} u_1(s, \tau, x) + \dots, \quad (2)$$

где

$$s = \varepsilon t, \quad u_0 = \xi(s, x) \exp(i\tau) + \bar{\xi}(s, x) \exp(-i\tau), \quad (3)$$

все функции периодичны по τ с периодом 2π , а ξ – неизвестная (подлежащая определению) комплексная “амплитуда”. Приравнивая затем коэффициенты при $\varepsilon^{3/2}$, для нахождения u_1 приходим к обыкновенному линейному неоднородному дифференциальному уравнению, в котором зависящая от s, x как от параметров неоднородность – сумма первых и третьих гармоник по τ . Поэтому для того чтобы его решение u_1 принадлежало нужному классу, в неоднородности следует приравнять к нулю коэффициенты при $\exp(\pm i\tau)$. На этом пути для определения ξ получаем краевую задачу

$$\xi_s = -\frac{i}{2} \sigma^2 \xi_{xx} - \left(\frac{1}{2} + i\delta\right) \xi + \frac{i\alpha}{4} \bar{\xi} - \frac{i}{4} \xi |\xi|^2, \quad \xi_x|_{x=0} = \xi_x|_{x=\pi} = 0, \quad (4)$$

которую согласно терминологии [6] и [7] будем называть *квазинормальной формой* исходной задачи (1).

Справедливо следующее утверждение (см. [6], [7]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть квазинормальная форма (4) имеет экспоненциально устойчивое или дихотомичное (в метрике $\dot{W}_2^2(0, \pi)$) состояние равновесия $\xi = \xi_0(x)$. Тогда при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ в исходной краевой задаче (1) ему отвечает 2π -периодическое по τ решение с теми же свойствами устойчивости, асимптотика которого с точностью до $\varepsilon^{3/2}$ получается из (2), (3).

Сформулированная теорема сводит вопрос о количестве и устойчивости 2π -периодических по τ решений краевой задачи (1) к выявлению количества и устойчивости состояний равновесия у ее квазинормальной формы (4). Обозначим через Ω_n совокупность параметров (σ, α, δ) , при которых (4) имеет не менее n различных экспоненциально устойчивых состояний равновесия.

Наш основной результат – следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2 (о параметрической буферности). Множество Ω_n непусто при любом натуральном n .

2. Существование высокомодовых состояний равновесия. При доказательстве теоремы 2 будем считать, что в (4) параметры имеют вид

$$\alpha = 2 + 4\mu, \quad \frac{\sigma^2}{2} = \mu\beta^2, \quad \delta > 0, \quad (5)$$

где $0 < \mu \ll 1$, $\beta = \text{const} > 0$. Полагая, далее, $w_1 = \text{Re } \xi$, $w_2 = \text{Im } \xi$, $w = \text{colon}(w_1, w_2)$, перепишем при условиях (5) задачу (4) в вещественной форме:

$$w_s = \mu\beta^2 Dw_{xx} + A_0 w + \mu A_1 w + \frac{1}{4}(w, w)Dw, \quad w_x|_{x=0} = w_x|_{x=\pi} = 0, \quad (6)$$

где

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \delta \\ \frac{1}{2} - \delta & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поясним смысл ограничений (5). С этой целью отбросим в (6) нелинейность и применим к получившейся линейной краевой задаче метод Фурье по системе функций $\cos nx$, $n = 0, 1, \dots$. В итоге убедимся, что за устойчивость ее нулевого состояния равновесия отвечает расположение спектра семейства матриц

$$A_0 + \mu A_1 - \mu\beta^2 n^2 D, \quad n = 0, 1, \dots \quad (7)$$

Далее, введем в рассмотрение квадратичный многочлен

$$P_\mu(z) = (z - \delta)^2 - \mu - \mu^2. \quad (8)$$

Несложный анализ показывает, что каждая матрица семейства (7) является гурвицевой в случае, когда $P_\mu(\mu\beta^2 n^2) > 0$, или имеет одно вещественное положительное собственное число в случае, когда $P_\mu(\mu\beta^2 n^2) < 0$. Таким образом, в задаче (6) возбуждены только моды $\cos nx$ с асимптотически высокими номерами n , удовлетворяющими неравенствам

$$z_-(\mu) < \mu\beta^2 n^2 < z_+(\mu), \quad (9)$$

где $z_\pm(\mu) = \delta \pm \sqrt{\mu + \mu^2}$ — корни многочлена (8) (их положительность вытекает из (5)). Отметим еще, что хотя количество номеров n , удовлетворяющих оценкам (9), асимптотически конечно (остается ограниченным при $\mu \rightarrow 0$), оно может быть сделано сколь угодно большим за счет уменьшения параметра β . И наконец, характеристические показатели (положительные собственные числа матриц (7)) на этих модах малы, а точнее говоря, имеют порядок μ . Тем самым, проясняется роль ограничений (5): они делают возможным применение к задаче (6) локальных бифуркационных методов.

Итак, проблема доказательства теоремы 2 сводится к вопросу о существовании и устойчивости состояний равновесия задачи (6), бифурцирующих из нуля при $\mu > 0$ на модах с номерами (9). Для нахождения указанных состояний равновесия воспользуемся принципом подобия (см. [8], [9]).

Этот принцип включает в себя три этапа.

Этап 1. Выполним в (6) замену переменной $nx \rightarrow x$, где n – достаточно большое натуральное число. В результате придем к задаче

$$w_s = (\delta + \sqrt{\mu}\gamma_n(\mu))Dw_{xx} + A_0w + \mu A_1w + \frac{1}{4}(w, w)Dw, \quad w_x|_{x=0} = w_x|_{x=n\pi} = 0, \quad (10)$$

где $\gamma_n(\mu) = (\mu\beta^2n^2 - \delta)/\sqrt{\mu}$ будем считать величиной порядка единицы.

Этап 2. Введем в рассмотрение вспомогательную задачу

$$w_s = (\delta + \sqrt{\mu}\gamma)Dw_{xx} + A_0w + \mu A_1w + \frac{1}{4}(w, w)Dw, \quad w_x|_{x=0} = w_x|_{x=\pi} = 0, \quad (11)$$

получающуюся из (10) заменой дискретного параметра γ_n на непрерывный и переходом от отрезка $0 \leq x \leq n\pi$ на прежний отрезок $0 \leq x \leq \pi$. Предположим, далее, что на некотором промежутке

$$\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2 \quad (12)$$

изменения параметра γ эта задача имеет нетривиально зависящее от x состояние равновесия

$$w = w_0(x, \gamma, \mu). \quad (13)$$

Продолжим это решение по x на отрезок $-\pi \leq x \leq 0$ четным образом, а затем на всю ось x по периодичности с периодом 2π . Тогда, как легко видеть, оно будет удовлетворять граничным условиям из (10) при любом натуральном n , а при $\gamma = \gamma_n(\mu) \in [\gamma_1, \gamma_2]$ всей задаче (10).

Этап 3. Возвращаясь к исходной задаче (6), заключаем, что при сделанных предположениях она имеет высокомодовые состояния равновесия

$$w_n^1(x, \mu) = w_0(nx, \gamma_n(\mu), \mu), \quad w_n^2(x, \mu) = w_0(\pi - nx, \gamma_n(\mu), \mu) \quad (14)$$

с номерами n , удовлетворяющими неравенствам

$$\frac{1}{\beta\sqrt{\mu}}\sqrt{\delta + \gamma_1\sqrt{\mu}} \leq n \leq \frac{1}{\beta\sqrt{\mu}}\sqrt{\delta + \gamma_2\sqrt{\mu}}. \quad (15)$$

Сформулированный принцип сводит исследуемую проблему к нахождению пространственно неоднородных состояний равновесия вспомогательной задачи (11), регулярно зависящей от всех своих параметров. Заметим, далее, что поскольку при $\mu = 0$ линейаризованная в нуле задача (11) имеет простой нулевой характеристический показатель, которому отвечает решение Флоке $w = a \cos x$, $a = \text{colon}(1, 1)$, а все остальные ее характеристические показатели имеют отрицательные действительные части, то речь может идти только о ее состояниях равновесия, бифурцирующих из нуля при $\mu > 0$ на моде $\cos x$.

Для построения асимптотики упомянутых состояний равновесия задачи (11) воспользуемся аналогом одночастотного метода (см. [1]), т.е. подставим в (11) ряд по нечетным степеням $\mu^{1/4}$:

$$w = \mu^{1/4}w_0(x) + \mu^{3/4}w_1(x) + \mu^{5/4}w_2(x) + \dots, \quad (16)$$

где

$$w_0(x) = \eta_0 a \cos x, \quad (17)$$

а η_0 – неизвестная (подлежащая определению) вещественная постоянная. Приравнивая затем коэффициенты при $\mu^{3/4}$ и $\mu^{5/4}$, для нахождения w_1 и w_2 получим краевые задачи (штрих – дифференцирование по x):

$$\delta Dw_1'' + A_0 w_1 + \gamma Dw_0'' + \frac{1}{4}(w_0, w_0)Dw_0 = 0, \quad w_0'|_{x=0} = w_0'|_{x=\pi} = 0; \quad (18)$$

$$\delta Dw_2'' + A_0 w_2 + \gamma Dw_1'' + A_1 w_0 + \frac{1}{2}(w_0, w_1)Dw_0 + \frac{1}{4}(w_0, w_0)Dw_1 = 0, \\ w_2'|_{x=0} = w_2'|_{x=\pi} = 0. \quad (19)$$

Анализ задачи (18) показывает, что в силу равенства $(Da, a) = 0$ она оказывается разрешимой и ее решение имеет вид

$$w_1 = \eta_1 a \cos x + a_1 \left(\gamma \eta_0 - \frac{3}{8} \eta_0^3 \right) \cos x + \frac{\eta_0^3}{64\delta} a \cos 3x, \quad (20)$$

где $a_1 = \text{colon}(-1, 1)$, а η_1 – произвольная вещественная постоянная. Подставляя, далее, (17) и (20) в (19), приходим к выводу, что условие разрешимости задачи (19) задается равенством

$$\Phi(\eta_0) \equiv 2(1 - \gamma^2)\eta_0 + \frac{3}{2}\gamma\eta_0^3 - \frac{9}{32}\eta_0^5 = 0. \quad (21)$$

Предположим, что фигурирующий в (12) параметр γ удовлетворяет условию $\gamma > -1$. Тогда, как легко видеть, уравнение (21) имеет решение

$$\eta_0(\gamma) = \sqrt{\frac{8(\gamma + 1)}{3}}, \quad (22)$$

для которого выполняется неравенство

$$\Phi'(\eta_0) < 0. \quad (23)$$

Подставляя его в (17) и (20), полностью определим первый член ряда (16) и частично – второй. Что же касается фигурирующей в (20) произвольной постоянной η_1 , то она определяется из условия разрешимости аналогичной (19) задачи для w_3 , причем, как это обычно бывает в теории ветвления, для нее получается уже линейное неоднородное уравнение вида $\Phi'(\eta_0)\eta_1 = \varphi_1$. А так как в дальнейшем явная формула для η_1 не потребуется, то соответствующие вычисления опустим.

ЛЕММА 1. *По любым фиксированным $-1 < \gamma_1 < \gamma_2$ можно указать достаточно малое $\mu_0 = \mu_0(\gamma_1, \gamma_2) > 0$ такое, что при всех $0 < \mu \leq \mu_0$ и при значениях γ из отрезка (12) краевая задача (11) имеет два экспоненциально устойчивых состояния равновесия*

$$w_1(x, \gamma, \mu) = w_0(x, \gamma, \mu), \quad w_2(x, \gamma, \mu) = w_0(\pi - x, \gamma, \mu), \quad (24)$$

где функция $w_0(x, \gamma, \mu)$ допускает (в метрике $\dot{W}_2^2([0, \pi]; \mathbb{R}^2)$) асимптотику (16), (17), (22).

Сформулированная лемма представляет собой один из вариантов классической бифуркационной теоремы Тьюринга–Пирожина [10]. Однако в отличие от классической

ситуации, разложение в (16) идет не по степеням корня квадратного из надкритичности μ , а по степеням $\mu^{1/4}$, что связано со спецификой фигурирующей в (6) нелинейности. Именно по этой причине в случае задачи (1) теорема 2 не вытекает непосредственно из результатов [8], хотя применяемая нами общая схема исследования здесь, естественно, та же, что и в [8].

Для доказательства леммы 1 заметим, что при всех $0 < \mu \ll 1$ задача (11) в окрестности нулевого состояния равновесия имеет экспоненциально орбитально устойчивое одномерное интегральное многообразие [11] $w = \eta a \cos x + H(\eta, \mu)$, уравнение на котором после нормировок $\eta/\mu^{1/4} \rightarrow \eta$, $\mu s \rightarrow s$ записывается в виде

$$2 \frac{d\eta}{ds} = \Phi(\eta) + \sqrt{\mu} \Omega(\eta, \mu). \quad (25)$$

Здесь функция Φ определена в (21), а достаточно гладкие по совокупности переменных η , $\sqrt{\mu}$ функции Ω и H со значениями в $\mathbb{R}$ и $\dot{W}_2^2([0, \pi]; \mathbb{R}^2)$ соответственно таковы, что $H(0, \mu) \equiv 0$, $H'_\eta(0, 0) = 0$, $\Omega(0, \mu) \equiv 0$. Таким образом, доказательство леммы сводится к исследованию состояний равновесия скалярного уравнения (25). Остается добавить, что последнее имеет состояние равновесия, асимптотически близкое к (22), а его устойчивость вытекает из неравенства (23).

Установленная лемма и описанный выше принцип подобия приводят к выводу, что при всех $0 < \mu \ll 1$ исходная краевая задача (6) имеет высококомодовые состояния равновесия (14), (15), где в качестве решения (13) фигурирует состояние равновесия $w_0(x, \gamma, \mu)$ из (24).

3. Исследование устойчивости высококомодовых решений. Линеаризуем задачу (6) на произвольном состоянии равновесия (14) с номером n и выполним замену $y = nx$. В результате получим спектральную задачу

$$(\delta + \sqrt{\mu} \gamma) Dh'' + (A_0 + \mu A_1)h + \sqrt{\mu} B_1(y, \gamma)h + \mu B_2(y, \gamma, \mu)h = \lambda h, \quad (26)$$

$$h'|_{y=0} = h'|_{y=n\pi} = 0, \quad ' = \frac{d}{dy},$$

где

$$B_1(y, \gamma)h = \frac{\eta_0^2(\gamma)}{2} [(a, h)Da + Dh] \cos^2 y, \quad (27)$$

$$B_2(y, \gamma, 0)h = \frac{\eta_0(\gamma)}{2} [(a, h)Dw_1(y, \gamma) + (w_1(y, \gamma), h)Da + (a, w_1(y, \gamma))Dh] \cos y,$$

$w_1(y, \gamma)$ – результат подстановки (22) в (20) и последующей замены x на y , а параметр γ , принимающий дискретные значения $\gamma_n = \gamma_n(\mu)$, для удобства будем считать непрерывно меняющимся на промежутке (12).

Проблема устойчивости состояния равновесия (14) сводится, очевидно, к анализу расположения спектра задачи (26). В связи с этим напомним, что, как следует из результатов [12], этот спектр состоит из счетного числа собственных значений, а соответствующая им система собственных и присоединенных функций образует базис Рисса в пространстве $\dot{W}_2^2([0, \pi]; \mathbb{R}^2)$.

Все возможные пределы при $\mu \rightarrow 0$ собственных значений задачи (26) – это собственные значения матриц

$$A_0 - \delta \nu^2 D, \quad \nu = \frac{k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (28)$$

которые можно получить из уравнения (26) при $\mu = 0$, $h = c \cos y$, $c \in \mathbb{R}^2$. Непосредственная проверка показывает гурвицевость матрицы (28) при любом $\nu \neq 1$ и существование у нее при всех ν , близких к единице, непрерывной ветви собственных значений $\lambda(\nu)$: $\lambda(1) = \lambda'(1) = 0$, $\lambda''(1) < 0$. А это, в свою очередь, означает, что равномерно по n все пределы при $\mu \rightarrow 0$ собственных значений задачи (26) лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$.

Итак, исследование устойчивости состояний равновесия (14) сводится к построению асимптотики тех собственных значений задачи (26), которые стремятся к нулю при $\mu \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. В связи с этим заметим, что соответствующие данным собственным значениям при $\mu = 0$ собственные функции $c \cos(1+z)y$, $z = \pm k/n$, $k = 0, 1, \dots$, $c \in \mathbb{R}^2$, можно представить в виде

$$h = h_1(y) \cos zy - h_2(y) \sin zy, \quad (29)$$

$$\left. \frac{dh_1}{dy} \right|_{y=0} = \left. \frac{dh_1}{dy} \right|_{y=\pi} = 0, \quad h_2|_{y=0} = h_2|_{y=\pi} = 0. \quad (30)$$

Поэтому будем искать их в указанном виде и при $\mu > 0$.

Подставляя (29) в (26), получим систему ($' = d/dy$)

$$\begin{aligned} (\delta + \sqrt{\mu} \gamma) D(h_1'' - 2zh_2' - z^2 h_1) + (A_0 + \mu A_1) h_1 \\ + \sqrt{\mu} B_1(y, \gamma) h_1 + \mu B_2(y, \gamma, \mu) h_1 = \lambda h_1, \\ (\delta + \sqrt{\mu} \gamma) D(h_2'' + 2zh_1' - z^2 h_2) + (A_0 + \mu A_1) h_2 \\ + \sqrt{\mu} B_1(y, \gamma) h_2 + \mu B_2(y, \gamma, \mu) h_2 = \lambda h_2, \end{aligned} \quad (31)$$

которую дополним граничными условиями (30). Для удобства параметр z (принимаящий дискретные значения $\pm k/n$, $k = 0, 1, \dots$) ниже будем считать меняющимся непрерывно. Из очевидной связи задач (26) и (31), (30) вытекает, что проблема устойчивости состояний равновесия задачи (14) сводится к асимптотическому вычислению собственных значений задачи (31), (30), стремящихся к нулю при $\mu, z \rightarrow 0$.

При $\mu = z = 0$ задача (31), (30) распадается на две независимые краевые задачи ($' = d/dy$)

$$\begin{aligned} \delta D h_1'' + A_0 h_1 = \lambda h_1, \quad h_1'|_{y=0} = h_1'|_{y=\pi} = 0, \\ \delta D h_2'' + A_0 h_2 = \lambda h_2, \quad h_2|_{y=0} = h_2|_{y=\pi} = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

каждая из которых имеет простое нулевое собственное значение с собственными функциями $h_1^0(y) = a \cos y$ и $h_2^0(y) = a \sin y$ соответственно. Остальные собственные значения задач (32) лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

Обозначим через L дифференциальный оператор, порожденный левыми частями уравнений (31) в пространстве $E = \dot{W}_2^2([0, \pi]; \mathbb{R}^4)$ вектор-функций $\operatorname{colon}(h_1, h_2)$, удовлетворяющих граничным условиям (30). Из изложенного выше следует, что при всех достаточно малых μ и z оператор L имеет двумерное инвариантное подпространство

$$E_0(\mu, z) = \operatorname{span}\{v_1(y, \mu, z), v_2(y, \mu, z)\} \subset E, \quad (33)$$

где $v_j(y, 0, 0) = e_j(y)$, $j = 1, 2$, $e_1(y) = \operatorname{colon}(h_1^0(y), 0)$, $e_2(y) = \operatorname{colon}(0, h_2^0(y))$. Инвариантность подпространства (33) означает существование матрицы второго порядка $\Lambda(\mu, z)$, $\Lambda(0, 0) = 0$, такой, что

$$LV = V\Lambda, \quad (34)$$

где по столбцам матрицы V размера 4×2 стоят базисные функции подпространства $E_0(\mu, z)$ (см. (33)). Отметим также, что матрицы V и Λ можно выбрать гладко зависящими от $\sqrt{\mu}$ и z , так как от этих параметров гладко зависят коэффициенты уравнений (31).

Итак, проблема устойчивости состояний равновесия (14) свелась к исследованию расположения собственных значений матрицы $\Lambda(\mu, z)$, что, в свою очередь, требует знания нескольких членов ее тейлоровского разложения по $\sqrt{\mu}$ и z . Для их нахождения подставим в соотношения (34) разложения

$$\begin{aligned}\Lambda &= \mu\Lambda_1 + \sqrt{\mu}z\Lambda_2 + z^2\Lambda_3 + \dots, \\ V &= V_0 + \sqrt{\mu}V_1 + zV_2 + \mu V_3 + \sqrt{\mu}zV_4 + z^2V_5 + \dots,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}V_0 &= [e_1(y), e_2(y)], \quad V_j = [v_{1j}, v_{2j}], \quad j = 1, \dots, 5, \\ v_{1j} &= \text{colon}(h_{1j}, 0), \quad v_{2j} = \text{colon}(0, h_{2j}), \quad j = 1, 3, 5, \\ v_{1j} &= \text{colon}(0, h_{1j}), \quad v_{2j} = \text{colon}(h_{2j}, 0), \quad j = 2, 4, \\ \Lambda_1 &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_3 \\ \lambda_4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_3 = \begin{pmatrix} \lambda_5 & 0 \\ 0 & \lambda_6 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Приравнивая затем коэффициенты при одинаковых степенях $\sqrt{\mu}$ и z , для определения функций $v_{1j}, v_{2j}, j = 1, \dots, 5$, получим рекуррентную последовательность краевых задач, из условий разрешимости которых находим элементы матриц $\Lambda_j, j = 1, 2, 3$.

Действуя указанным выше способом, для $h_{1j}, h_{2j}, j = 1, 2$, получим краевые задачи ($L_0 = \delta D d^2/dy^2 + A_0$):

$$\begin{aligned}L_0 h_{11} + (B_1(y, \gamma) - \gamma D)a \cos y &= 0, & \frac{dh_{11}}{dy} \Big|_{y=0} &= \frac{dh_{11}}{dy} \Big|_{y=\pi} = 0; \\ L_0 h_{21} + (B_1(y, \gamma) - \gamma D)a \sin y &= 0, & h_{21}|_{y=0} &= h_{21}|_{y=\pi} = 0; \\ L_0 h_{12} - 2\delta D a \sin y &= 0, & h_{12}|_{y=0} &= h_{12}|_{y=\pi} = 0; \\ L_0 h_{22} - 2\delta D a \cos y &= 0, & \frac{dh_{22}}{dy} \Big|_{y=0} &= \frac{dh_{22}}{dy} \Big|_{y=\pi} = 0,\end{aligned}$$

разрешимые по той же причине, что и задача (18). Учитывая здесь явный вид матрицы $B_1(y, \gamma)$ (см. (27)), находим (векторы a, a_1 те же, что и в (20)):

$$\begin{aligned}h_{11} &= a_1 \left(\gamma - \frac{9}{8} \eta_0^2 \right) \cos y + \frac{3\eta_0^2}{64\delta} a \cos 3y, & h_{12} &= 2\delta a_1 \sin y, \\ h_{21} &= a_1 \left(\gamma - \frac{3}{8} \eta_0^2 \right) \sin y + \frac{3\eta_0^2}{64\delta} a \sin 3y, & h_{22} &= 2\delta a_1 \cos y.\end{aligned} \tag{35}$$

Приравнивая в (34) коэффициенты при $\mu, \sqrt{\mu}z, z^2$ для $h_{1j}, h_{2j}, j = 3, 4, 5$, приходим к шести краевым задачам, из которых выпишем для примера только две ($' = d/dy$):

$$\begin{aligned}L_0 h_{13} + \gamma D h'_{11} + A_1 a \cos y + B_1(y, \gamma) h_{11} + B_2(y, \gamma, 0) a \cos y &= \lambda_1 a \cos y, \\ h'_{13}|_{y=0} &= h'_{13}|_{y=\pi} = 0; \\ L_0 h_{23} + \gamma D h''_{21} + A_1 a \sin y + B_1(y, \gamma) h_{21} + B_2(y, \gamma, 0) a \sin y &= \lambda_2 a \sin y, \\ h_{23}|_{y=0} &= h_{23}|_{y=\pi} = 0.\end{aligned}$$

Подставляя во все шесть краевых задач известные функции (35) и учитывая (27), из условий разрешимости этих задач определяем

$$\lambda_1 = -4(\gamma + 1), \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 4\delta, \quad \lambda_4 = \frac{4\delta}{3}(2\gamma + 5), \quad \lambda_5 = \lambda_6 = -4\delta^2. \quad (36)$$

Полученной информации о матрице $\Lambda(\mu, z)$ достаточно для исследования знаков ее определителя и следа при всех $\mu, |z| \ll 1$. Действительно, функции $\text{tr } \Lambda(\mu, z)$ и $\det \Lambda(\mu, z)$ четные по z и $\det \Lambda(\mu, 0) \equiv 0$, так как, во-первых, задача (31), (30) не изменяется при заменах $z \rightarrow -z$, $h_2 \rightarrow -h_2$, а, во-вторых, при $z = 0$ она имеет нулевое собственное значение с собственной функцией

$$\text{colon} \left(0, \frac{\partial w_0}{\partial y}(y, \gamma, \mu) \right), \quad (37)$$

где w_0 — функция, фигурирующая в (14). Отсюда и из (36) заключаем, что

$$\text{tr } \Lambda = -4(\gamma + 1)\mu - 8\delta^2 z^2 + O(\mu^{3/2} + \sqrt{\mu} z^2 + z^4), \quad (38)$$

$$\det \Lambda = 16\delta^2 z^2 \left[\frac{1}{3}(\gamma - 2)\mu + \delta^2 z^2 + O(\mu^{3/2} + \sqrt{\mu} z^2 + z^4) \right]. \quad (39)$$

Из (38) вытекает отрицательность $\text{tr } \Lambda$ при любом фиксированном $\gamma > -1$ и при всех достаточно малых $\mu > 0$, $|z|$. Далее, если для отрезка (12) потребовать выполнение условия

$$[\gamma_1, \gamma_2] \subset (2, \infty), \quad (40)$$

то, как следует из (39), при всех $0 < \mu \ll 1$, $0 < |z| \ll 1$ будет выполняться и неравенство $\det \Lambda > 0$.

Проделанный анализ показывает, что критические собственные числа задачи (26) являются собственными значениями матриц

$$\Lambda_k = \Lambda \left(\mu, \frac{k}{n} \right), \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm k_0, \quad (41)$$

где k_0 — целая часть $n z_0$, а $z_0 > 0$ фиксировано и достаточно мало. Заметим, что при условии (40) все они являются гурвицевыми. Исключение составляет только матрица (41) с номером $k = 0$, одно собственное значение которой отрицательно, а другое равно нулю. Однако при переходе от (31), (30) к (26) нулевое собственное число пропадает, ибо в силу (29), (37) ему отвечает нулевая собственная функция.

Суммируя изложенное, приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 2. *При условии (40) все состояния равновесия (14), (15) краевой задачи (6), доставляемые леммой 1 и принципом подобия, экспоненциально устойчивы.*

Из приведенного выше обоснования леммы 2 следует, что ее утверждение сохраняется и в случае, когда β является независимым от μ малым параметром. Заметим, далее, что для любого фиксированного отрезка вида (40) количество n_* номеров n , удовлетворяющих неравенствам (15), при $\beta \rightarrow 0$ равномерно по μ имеет порядок β^{-1} . Таким образом, при $\beta \rightarrow 0$ и при фиксированных прочих параметрах количество устойчивых состояний равновесия задачи (6) неограниченно растет. Добавим еще, что поскольку

$n_* \sim (\gamma_2 - \gamma_1)/(2\sqrt{\delta}\beta)$ при $\mu \rightarrow 0$, то неограниченного увеличения числа устойчивых состояний равновесия (14) можно добиться и другим способом, а именно, за счет увеличения длины отрезка (40) и надлежащего уменьшения μ (при фиксированном β). Теорема 2 доказана.

В заключение отметим, что изучение явления буферности в гиперболических уравнениях берет начало с заметки [13], в которой исследовалось нелинейное телеграфное уравнение с малой диффузией. В дальнейшем это явление удалось обнаружить у широкого класса уравнений волнового типа как в сингулярно возмущенной постановке, так и в гладком случае (см. монографию [14], где соответствующие результаты изложены в суммированном виде).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
- [2] Митропольский Ю. А., Мосеев Б. И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. Киев: Вища школа, 1976.
- [3] Колесов А. Ю., Колесов Ю. С. Принцип сведения Боголюбова–Митропольского в задаче о параметрическом возбуждении автоволн // Докл. АН СССР. 1989. Т. 307. № 4. С. 837–840.
- [4] Колесов Ю. С. Нелинейный параметрический резонанс в сингулярно возмущенном телеграфном уравнении // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 10. С. 1828–1829.
- [5] Колесов А. Ю. Параметрические колебания решений телеграфного уравнения с умеренно малой диффузией // Сиб. матем. ж. 1992. Т. 33. № 6. С. 79–86.
- [6] Колесов Ю. С. Асимптотика и устойчивость нелинейных параметрических колебаний сингулярно возмущенного телеграфного уравнения // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 10. С. 57–72.
- [7] Колесов Ю. С. Параметрические колебания сингулярно возмущенного телеграфного уравнения с маятниковой нелинейностью // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 3. С. 69–82.
- [8] Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Явление параметрической буферности в системах параболических и гиперболических уравнений с малой диффузией // Укр. матем. ж. 1998. Т. 50. № 1. С. 22–35.
- [9] Колесов А. Ю., Розов Н. Х. О существовании асимптотически большого числа устойчивых диссипативных структур в параболических системах с малой диффузией // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1997. Т. 20. С. 3–26.
- [10] Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973.
- [11] Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973.
- [12] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
- [13] Колесов А. Ю., Колесов Ю. С. Бифуркация автоколебаний сингулярно возмущенного волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1990. Т. 315. № 2. С. 281–283.
- [14] Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений // Тр. МИАН. 1998. Т. 222.

(А. Ю. Колесов) Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
(Н. Х. Розов) Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
31.01.2000