Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Крутицкий, Смешанная задача для уравнения Лапласа во внешней области с произвольным разбиением границы, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 6, 876–891

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm701>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 18:34:19

УДК 517.9

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА ВО ВНЕШНЕЙ ОБЛАСТИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ РАЗБИЕНИЕМ ГРАНИЦЫ

П. А. Крутицкий

В работе предложен метод решения смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа в связной внешней области с произвольным разбиением границы. Все простые замкнутые кривые, составляющие границу, разбиты на три совокупности. На элементах первой из них задано условие Дирихле, на элементах второй – третье краевое условие, а третья, в свою очередь, разбита на две совокупности простых разомкнутых дуг, на элементах одной из которых задано условие Дирихле, а на элементах другой – третье краевое условие. Задача сведена к однозначно разрешимому уравнению Фредгольма второго рода в банаховом пространстве. Третья краевая задача и смешанная задача Дирихле–Неймана – это частные случаи рассмотренной задачи.

Библиография: 22 названия.

1. Введение. В настоящей работе продолжают исследования, начатые в [1]–[3] и посвященные изучению смешанных краевых задач на плоскости. Рассматривается смешанная краевая задача для уравнения Лапласа во внешней многосвязной области. Все простые замкнутые кривые, составляющие границу, разбиты на три совокупности. На элементах первой из них задано условие Дирихле, на элементах второй – третье краевое условие, а третья, в свою очередь, разбита на две совокупности простых разомкнутых дуг, на элементах одной из которых задано условие Дирихле, а на элементах другой – третье краевое условие. Задача сведена к однозначно разрешимому интегральному уравнению Фредгольма второго рода в банаховом пространстве. Полученное интегральное уравнение может быть решено приближенно численными методами, развитыми в [4], [5]. Третья краевая задача и смешанная задача Дирихле–Неймана – частные случаи рассмотренной задачи.

Смешанная задача Дирихле–Неймана с произвольным разбиением границы для уравнения Лапласа исследовалась в [6], [7] с использованием теории аналитических функций. Однако в [6], [7] не предлагается метод сведения указанной задачи к однозначно разрешимым интегральным уравнениям. Действительно, в [6] доказана формальная теорема существования с использованием комплексной функции Грина многосвязной области, практическое построение которой представляет собой отдельную трудоемкую задачу. Интегральные уравнения, полученные в [7], не являются однозначно разрешимыми. Метод анализа смешанной задачи, предложенный в настоящей работе, основан

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-01063.

на теории интегральных операторов, развитой для решения двумерных краевых задач в областях, ограниченных замкнутыми и разомкнутыми кривыми [8]–[12]. Оказывается, что эти интегральные операторы можно эффективно применять в смешанных задачах с произвольным разбиением границы.

2. Постановка задачи и теорема единственности. На плоскости $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ рассмотрим внешнюю связную область $\mathcal{D}$ с границей $\partial\mathcal{D}$, состоящей из конечного числа простых замкнутых кривых класса $C^{2,\lambda}$, $\lambda \in (0, 1]$, не имеющих общих точек. Предположим, что замкнутые кривые, составляющие $\partial\mathcal{D}$, разбиты на три множества Γ , γ^1 и γ^2 так, что $\Gamma \cup \gamma^1 \cup \gamma^2 = \partial\mathcal{D}$. При этом множество γ^1 состоит из N_2 замкнутых кривых $\gamma_1^1, \dots, \gamma_{N_2}^1$. Далее, пусть каждая из замкнутых кривых, составляющих Γ , поделена на четное число (≥ 2) простых разомкнутых дуг. Предположим, что все разомкнутые дуги поделены на два множества Γ^1 и Γ^2 таким образом, что каждая дуга из Γ^1 имеет общие концы только с дугами из Γ^2 и

$$\Gamma^1 \cup \Gamma^2 = \Gamma, \quad \Gamma^k = \bigcup_{n=1}^{N_1} \Gamma_n^k, \quad k = 1, 2.$$

Через Γ_n^k обозначена разомкнутая дуга из множества Γ^k . Множества Γ^1 и Γ^2 имеют одинаковое число N_1 разомкнутых дуг.

Пусть каждая замкнутая кривая, составляющая $\partial\mathcal{D}$, параметризована и в качестве параметра выступает длина дуги s , отсчитываемая от некоторой фиксированной точки так, что область $\mathcal{D}$ остается справа при возрастании параметра s . На кривых, составляющих Γ , в качестве такой точки возьмем конец какой-либо разомкнутой дуги. При этом каждой замкнутой кривой из $\partial\mathcal{D}$ отвечает отрезок на оси Os . Предположим, что отрезки оси Os , отвечающие разным замкнутым кривым, не имеют общих точек, в том числе и концов. В частности, для разомкнутых дуг Γ^1 положим

$$\Gamma_n^1 = \{x: x = x(s) = (x_1(s), x_2(s)), \quad s \in [a_n^1, b_n^1]\}, \quad n = 1, \dots, N_1.$$

Для совокупностей отрезков оси Os , отвечающих Γ^1 , Γ^2 , Γ , γ^1 , γ^2 , сохраним эти обозначения, т.е. Γ^1 , Γ^2 , Γ , γ^1 , γ^2 соответственно.

Пусть γ^k – совокупность отрезков оси Os , отвечающих одноименной совокупности простых замкнутых кривых, где $k = 1$ либо $k = 2$. Будем говорить, что функция $\mathcal{F}(s)$ параметра s принадлежит классу $C^0(\gamma^k)$ (или $C^{0,\lambda}(\gamma^k)$), если она непрерывна (или гёльдерова с показателем λ) на любом из отрезков γ^k и на концах каждого такого отрезка ее значения совпадают, т.е. при полном обходе соответствующей замкнутой кривой функция $\mathcal{F}(s)$ возвращается к своему первоначальному значению. Аналогично, $\mathcal{F}(s) \in C^{1,\lambda}(\gamma^k)$, если $\mathcal{F}(s) \in C^0(\gamma^k)$ и на γ^k существует производная $\mathcal{F}'(s) \in C^{0,\lambda}(\gamma^k)$.

Вектор касательной к $\partial\mathcal{D}$ в точке $x(s)$, указывающий направление возрастания параметра s , обозначим $\tau_x = (\cos \alpha(s), \sin \alpha(s))$, где $\cos \alpha(s) = x_1'(s)$ и $\sin \alpha(s) = x_2'(s)$. Через $\mathbf{n}_x = (\sin \alpha(s), -\cos \alpha(s))$ обозначим нормаль к $\partial\mathcal{D}$ в точке $x(s)$. Вектор $\mathbf{n}_x$ совпадает с τ_x , если $\mathbf{n}_x$ повернуть на угол $\pi/2$ против часовой стрелки. Следовательно, $\mathbf{n}_x$ – внутренняя нормаль по отношению к области $\mathcal{D}$.

Будем говорить, что функция $u(x)$ принадлежит классу гладкости $\mathbf{K}$, если выполнены следующие условия:

$$1) \quad u(x) \in C^0(\overline{\mathcal{D}}) \cap C^2(\mathcal{D});$$

- 2) $\nabla u(x) \in C^0(\overline{\mathcal{D}} \setminus X)$, где X – множество концов разомкнутых дуг, составляющих Γ^1 и Γ^2 , т.е.

$$X = \bigcup_{n=1}^{N_1} (x(a_n^1) \cup x(b_n^1));$$

- 3) в окрестности каждой точки $x(d) \in X$ для некоторых констант $c > 0, \varepsilon > -1$ справедливо неравенство

$$|\nabla u| \leq c|x - x(d)|^\varepsilon, \quad (1)$$

где $x \rightarrow x(d), x \in \mathcal{D}$ и $d = a_n^1$ либо $d = b_n^1$ ($n = 1, \dots, N_1$).

Сформулируем смешанную задачу **U** для уравнения Лапласа.

Задача **U**. Найти функцию $u(x)$ из класса **K**, удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \mathcal{D}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad (2)$$

граничным условиям

$$u(x)|_{x(s) \in \gamma^1} = f_1(s), \quad \left. \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_x} + \beta(s)u(x) \right|_{x(s) \in \gamma^2} = f_2(s), \quad (3)$$

$$u(x)|_{x(s) \in \Gamma^1} = f_1(s), \quad \left. \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_x} + \beta(s)u(x) \right|_{x(s) \in \Gamma^2} = f_2(s), \quad (4)$$

и условиям на бесконечности

$$|u(x)| \leq \text{const}, \quad |\nabla u(x)| = o(|x|^{-1}), \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Функции $\beta(s), f_1(s), f_2(s)$ считаются заданными. При этом $\beta(s) \in C^0(\Gamma^2 \cup \gamma^2)$ и $\beta(s) \leq 0$ для всех $s \in \Gamma^2 \cup \gamma^2$. Кроме того, дополнительно потребуем выполнения следующих условий

$$\text{mes}(\Gamma^1 \cup \gamma^1) + \|\beta(s)\|_{C^0(\Gamma^2 \cup \gamma^2)} > 0, \quad \text{mes}(\partial \mathcal{D} \setminus \gamma^1) > 0. \quad (6)$$

Если $\mathcal{L}$ – совокупность кривых, то через $\text{mes}(\mathcal{L})$ обозначается их суммарная длина.

Условия (6) исключают из рассмотрения задачи Неймана и Дирихле, которые изучены, например, в [6], [13]–[16].

Все условия задачи **U** понимаются в классическом смысле. Смешанная задача Дирихле–Неймана с произвольным разбиением границы есть частный случай задачи **U** при $\beta(s) \equiv 0$. Третья краевая задача также частный случай задачи **U**.

Справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Задача U имеет не более одного решения.*

Покажем, что однородная задача имеет только тривиальное решение. Пусть $u_0(x)$ – решение однородной задачи U. Пользуясь свойствами гладкости функции $u_0(x)$, однородными граничными условиями (3), (4) и условиями на бесконечности, запишем энергетическое тождество для $u_0(x)$:

$$\|\nabla u_0\|_{L_2(\mathcal{D})}^2 = - \int_{\partial\mathcal{D}} u_0(x(s)) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} u_0(x(s)) ds = - \int_{\Gamma^2 \cup \gamma^2} |\beta(s)| |u_0(x(s))|^2 ds \leq 0,$$

где учтено, что $\beta(s) \leq 0$ при $s \in \Gamma^2 \cup \gamma^2$. Отсюда $\|\nabla u_0\|_{L_2(\mathcal{D})}^2 = 0$, а значит, $u_0(x) \equiv \text{const}$ в $\overline{\mathcal{D}}$. Если $\|\beta(s)\|_{C^0(\Gamma^2 \cup \gamma^2)} \neq 0$, т.е. существует точка s_0 такая, что $\beta(s) \neq 0$, то, как следует из энергетического тождества, $u_0(x(s_0)) = 0$. В этом случае $\text{const} = 0$ и $u_0(x) \equiv 0$ в $\overline{\mathcal{D}}$. Если же $\beta(s) \equiv 0$, то согласно первому условию из (6) $\Gamma^1 \cup \gamma^1 \neq \emptyset$. В этом случае, пользуясь однородным условием Дирихле из (3), (4), получим $\text{const} = 0$ и $u_0(x) \equiv 0$ в $\overline{\mathcal{D}}$.

Таким образом, однородная задача имеет только тривиальное решение. Из линейности задачи U вытекает, что неоднородная задача имеет не более одного решения. Тем самым, теорема доказана.

3. Сведение задачи к интегральным уравнениям. Пусть $\mathcal{L}_m \subset \partial\mathcal{D}$ и $\mathcal{B}_m(\mathcal{L}_m)$ – банахово пространство функций, определенных на множестве $\mathcal{L}_m$, где $m = 1, \dots, M$. Тогда для функций, определенных на $\bigcup_{m=1}^M \mathcal{L}_m$, рассмотрим банахово пространство $\bigcap_{m=1}^M \mathcal{B}_m(\mathcal{L}_m)$ с нормой

$$\|\cdot\|_{\bigcap_{m=1}^M \mathcal{B}_m(\mathcal{L}_m)} = \sum_{m=1}^M \|\cdot\|_{\mathcal{B}_m(\mathcal{L}_m)}.$$

При этом функции из $\bigcap_{m=1}^M \mathcal{B}_m(\mathcal{L}_m)$ принадлежат каждому из пространств $\mathcal{B}_1(\mathcal{L}_1)$, $\dots$, $\mathcal{B}_M(\mathcal{L}_M)$.

Пусть в граничных условиях (3), (4) выполнены свойства

$$f_1(s) \in C^{1,\lambda}(\Gamma^1) \cap C^{1,\lambda}(\gamma^1), \quad (7a)$$

$$\beta(s), f_2(s) \in C^{0,\lambda}(\Gamma^2) \cap C^{0,\lambda}(\gamma^2), \quad \lambda \in (0, 1]. \quad (7b)$$

Здесь показатель Гёльдера λ тот же, что и в определении гладкости границы $\partial\mathcal{D}$. Если на практике эти показатели различны, то в качестве λ всегда можно взять наименьший.

Будем говорить, что $\mu(s) \in C_q^\omega(\Gamma^1)$ с $\omega \in (0, 1]$, $q \in [0, 1]$, если

$$\mu(s) \prod_{n=1}^{N_1} |s - a_n^1|^q |s - b_n^1|^q \in C^{0,\omega}(\Gamma^1),$$

где $C^{0,\omega}(\Gamma^1)$ – пространство Гёльдера с показателем ω и

$$\|\mu(s)\|_{C_q^\omega(\Gamma^1)} = \left\| \mu(s) \prod_{n=1}^{N_1} |s - a_n^1|^q |s - b_n^1|^q \right\|_{C^{0,\omega}(\Gamma^1)}.$$

Положим

$$\Phi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln |x - y|, \quad |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Ищем решение задачи **U** в следующем виде

$$u[\mu](x) = w_1[\mu](x) + w_2[\mu](x) + v[\mu](x) + c[\mu] + h[\mu](x), \quad (8)$$

где

$$w_1[\mu](x) = \int_{\Gamma^1} \mu(\sigma) \Phi(x, y(\sigma)) d\sigma, \quad w_2[\mu](x) = \int_{\Gamma^2 \cup \gamma^2} \mu(\sigma) \Phi(x, y(\sigma)) d\sigma$$

– потенциалы простого слоя на Γ^1 и $\Gamma^2 \cup \gamma^2$,

$$v[\mu](x) = \int_{\gamma^1} \mu(\sigma) \frac{\partial \Phi(x, y(\sigma))}{\partial \mathbf{n}_y} d\sigma,$$

– потенциал двойного слоя на γ^1 ,

$$c[\mu] = \int_{\partial \mathcal{D}} \mu(s) ds$$

– константа. Функцию $h[\mu](x)$ определим, основываясь на условиях (6). Второе из условий (6) говорит о том, что множество $\Gamma \cup \gamma^2$ не пусто и содержит по крайней мере одну замкнутую кривую. Внутри этой кривой выберем произвольную фиксированную точку Y_0 . Пусть $Y_1, \dots, Y_{N_2}$ – произвольные фиксированные точки, лежащие внутри кривых $\gamma_1^1, \dots, \gamma_{N_2}^1$. Через $h[\mu](x)$ обозначим следующую сумму точечных источников, помещенных в точки $Y_0, Y_1, \dots, Y_{N_2}$:

$$h[\mu](x) = - \int_{\partial \mathcal{D}} \mu(s) ds \Phi(x, Y_0) + \sum_{n=1}^{N_2} \int_{\gamma_n^1} \mu(s) ds \Phi(x, Y_n).$$

Плотность $\mu(s)$ будем искать в следующем банаховом пространстве:

$$\mu(s) \in C_q^\omega(\Gamma^1) \cap C^{0, \omega_2}(\Gamma^2 \cup \gamma^2) \cap C^{1, \omega_1}(\gamma^1), \quad q \in [0, 1), \quad \omega, \omega_1, \omega_2 \in (0, 1].$$

Как следует из свойств потенциала простого слоя [17], [18, § 2.5, 3.10], при такой плотности $\mu(s)$ потенциалы $w_1[\mu](x)$, $w_2[\mu](x)$ принадлежат классу **K**. При этом если $q \in (0, 1)$, то условия (1) выполнены с показателем $\varepsilon = -q$. Кроме того, $v[\mu](x)$ принадлежит $C^1(\mathcal{D}) \cap C^2(\mathcal{D}) \subset \mathbf{K}$ как потенциал двойного слоя с плотностью, имеющей гёльдерову производную [18, § 2.5, 3.10]. Этот результат можно получить иначе, а именно, представляя потенциал двойного слоя через угловой потенциал с помощью интегрирования по частям и затем пользуясь свойствами углового потенциала [17], [19]. Поскольку

$$h[\mu](x) \in C^\infty \left(R^2 \setminus \left(\bigcup_{n=0}^{N_2} Y_n \right) \right) \subset \mathbf{K},$$

то $u[\mu](x) \in \mathbf{K}$.

Очевидно, что $u[\mu](x)$ удовлетворяет уравнению (2) в $\mathcal{D}$. Функция $h[\mu](x)$ построена таким образом, что $u[\mu](x)$ удовлетворяет условию на бесконечности (5). Тем самым, функция $u[\mu](x)$ удовлетворяет всем условиям задачи **U**, за исключением граничных условий.

Подставим потенциал $u[\mu](x)$ в граничные условия (3), (4) задачи **U** и получим граничные интегральные уравнения относительно плотности $\mu(s)$ на $\partial\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma \cup \gamma^2} \mu(\sigma) \Phi(x(s), y(\sigma)) d\sigma + \frac{1}{2} \mu(s) \delta(s, \gamma^1) \\ & + \int_{\gamma^1} \mu(\sigma) \frac{\partial \Phi(x(s), y(\sigma))}{\partial \mathbf{n}_y} d\sigma + c[\mu] + h[\mu](x(s)) = f_1(s), \quad s \in \Gamma^1 \cup \gamma^1, \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} \mu(s) + \int_{\Gamma^2 \cup \gamma^2} \mu(\sigma) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} + \beta(s) \right) \Phi(x(s), y(\sigma)) d\sigma \\ & + \int_{\Gamma^1} \mu(\sigma) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} + \beta(s) \right) \Phi(x(s), y(\sigma)) d\sigma \\ & + \int_{\gamma^1} \mu(\sigma) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} + \beta(s) \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \Phi(x(s), y(\sigma)) d\sigma \\ & + \beta(s) c[\mu] + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} + \beta(s) \right) h[\mu](x(s)) = f_2(s), \quad s \in \Gamma^2 \cup \gamma^2. \end{aligned} \quad (9b)$$

Здесь и далее под $\delta(s, \mathcal{L})$, где $\mathcal{L} \subset \partial\mathcal{D}$, понимается характеристическая функция множества $\mathcal{L}$, т.е.

$$\delta(s, \mathcal{L}) = \begin{cases} 0, & \text{если } s \notin \mathcal{L}; \\ 1, & \text{если } s \in \mathcal{L}. \end{cases}$$

Пусть $\mu(s)$ – произвольное решение интегральных уравнений (9) из

$$C_q^\omega(\Gamma^1) \cap C^0(\partial\mathcal{D} \setminus \Gamma^1), \quad q \in [0, 1), \quad \omega \in (0, 1].$$

Покажем, что оно принадлежит

$$C_q^\omega(\Gamma^1) \cap C^{0, \omega_2}(\Gamma^2 \cup \gamma^2) \cap C^{1, \omega_1}(\gamma^1), \quad q \in [0, 1), \quad \omega, \omega_1, \omega_2 \in (0, 1].$$

Рассмотрим уравнение (9b). Второй и третий интегралы в (9b) принадлежат $C^{0, \lambda_0}(\Gamma^2 \cup \gamma^2)$ по s , где $\lambda_0 \in (0, \min\{\lambda, 1 - q\})$. Рассмотрим первый интегральный член в (9b). Если $s \in \Gamma^2 \cup \gamma^2$, то, как показано в [17], [20],

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \Phi(x(s), y(\sigma)) \in C^{0, \lambda}((\Gamma^2 \cup \gamma^2) \times (\Gamma^2 \cup \gamma^2)),$$

потому что $\partial\mathcal{D} \in C^{2, \lambda}$. Кроме того,

$$\int_{\Gamma^2 \cup \gamma^2} \mu(\sigma) \Phi(x(s), y(\sigma)) d\sigma \in C^{0, 1/2 - \varepsilon_0}(\Gamma^2 \cup \gamma^2) \quad (10)$$

при любом $\varepsilon_0 \in (0, 1/2)$. Действительно,

$$\int_{\Gamma^2 \cup \gamma^2} \mu(\sigma) \Phi(x(s), y(\sigma)) d\sigma = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^2 \cup \gamma^2} \mu(\sigma) \frac{\mathcal{I}_1(x(s), y(\sigma))}{|x(s) - y(\sigma)|^{1/2 + \varepsilon_0}} d\sigma, \quad (11)$$

где ε_0 – произвольное число из интервала $(0, 1/2)$, и с учетом [13, § 6.2]

$$\mathcal{J}_1(x(s), y(\sigma)) = |x(s) - y(\sigma)|^{1/2+\varepsilon_0} \ln |x(s) - y(\sigma)| \in C^{0,1/2}((\Gamma^2 \cup \gamma^2) \times (\Gamma^2 \cup \gamma^2)).$$

В силу [13, § 51] функция в правой части (11) принадлежит $C^{0,1/2-\varepsilon_0}(\Gamma^2 \cup \gamma^2)$ по s , если $\mu(s) \in C^0(\gamma^2 \cup \Gamma^2)$. Следовательно, утверждение, содержащееся в (10), доказано. Поскольку ε_0 можно взять сколь угодно малым, то первый интегральный член в (9b) принадлежит $C^{0,\omega_2}(\Gamma^2 \cup \gamma^2)$ при любом ω_2 из интервала

$$(0, \min\{\lambda, 1/2, 1 - q\}), \quad (12)$$

если плотность $\mu(s) \in C^0(\Gamma^2 \cup \gamma^2)$.

Тем самым, если $\mu(s) \in C_q^\omega(\Gamma^1) \cap C^0(\partial\mathcal{D} \setminus \Gamma^1)$, то суммарный интегральный член в (9b) принадлежит $C^{0,\omega_2}(\Gamma^2 \cup \gamma^2)$ с ω_2 из интервала (12). Если, кроме того, $\mu(s)$ – решение уравнения (9b), обращающее его в тождество, то из этого тождества с учетом условий (7) вытекает, что $\mu(s) \in C_q^\omega(\Gamma^1) \cap C^{0,\omega_2}(\Gamma^2 \cup \gamma^2) \cap C^0(\gamma^1)$.

Покажем, что всякое интегрируемое на $\partial\mathcal{D} \setminus \gamma^1$ и непрерывное на γ^1 решение $\mu(s)$ интегрального уравнения (9a) принадлежит $C^{1,\lambda/2}(\gamma^1)$. Действительно, если $s \in \gamma^1$, то суммарный интегральный член в уравнении (9a) имеет производную, так как $\gamma^1 \in C^{2,\lambda}$. Эта производная представляется в виде несобственного интеграла с ядром вида

$$\frac{\mathcal{J}_2(s, \sigma)}{|s - \sigma|^{1-\lambda/2}} + \mathcal{J}_3(s, \sigma), \quad \mathcal{J}_3(s, \sigma), \mathcal{J}_2(s, \sigma) \in C^{0,\lambda/2}(\gamma^1 \times \partial\mathcal{D}).$$

В силу [13, § 51] указанная производная принадлежит $C^{0,\lambda/2}(\gamma^1)$ по s . Поскольку $f_1(s) \in C^{1,\lambda}(\gamma^1)$ в соответствии с (7), то решение $\mu(s)$ уравнения (9a) принадлежит $C^{1,\lambda/2}(\gamma^1)$.

Таким образом, всякое решение $\mu(s)$ интегральных уравнений (9) в классе

$$C_q^\omega(\Gamma^1) \cap C^0(\partial\mathcal{D} \setminus \Gamma^1)$$

автоматически принадлежит $C_q^\omega(\Gamma^1) \cap C^{0,\omega_2}(\Gamma^2 \cup \gamma^2) \cap C^{1,\lambda/2}(\gamma^1)$ с ω_2 из интервала (12). При этом, как следует из приведенных рассуждений, $u[\mu](x)$ удовлетворяет всем условиям задачи **U**. Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия (7). Если интегральные уравнения (9) имеют решение $\mu(s)$ в $C_q^\omega(\Gamma^1) \cap C^0(\partial\mathcal{D} \setminus \Gamma^1)$ с $\omega \in (0, 1]$, $q \in [0, 1)$, то

- 1) $\mu(s) \in C_q^\omega(\Gamma^1) \cap C^{0,\omega_2}(\Gamma^2 \cup \gamma^2) \cap C^{1,\lambda/2}(\gamma^1)$ при любом ω_2 из интервала (12),
- 2) решение задачи **U** существует и дается формулой (8).

Задача **U** сведена к интегральным уравнениям (9). На Γ^1 это уравнение первого рода с логарифмическим ядром, а на Γ^2 это уравнение второго рода. Ниже исследуем разрешимость интегральных уравнений (9) в классе $C_q^\omega(\Gamma^1) \cap C^0(\partial\mathcal{D} \setminus \Gamma^1)$, для чего сведем их к уравнению Фредгольма второго рода.

Дифференцируем интегральное уравнение (9a) по s на Γ^1 , тогда на Γ^1 получим сингулярное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} u[\mu](x(s)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^1} \mu(\sigma) \frac{\sin \varphi_0(x(s), y(\sigma))}{|x(s) - y(\sigma)|} d\sigma + \int_{\Gamma^2 \cup \gamma^2} \mu(\sigma) \frac{\partial}{\partial s} \Phi(x(s), y(\sigma)) d\sigma \\ &+ \int_{\gamma^1} \mu(\sigma) \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial n_y} \Phi(x(s), y(\sigma)) d\sigma + \frac{\partial}{\partial s} h[\mu](x(s)) = f'_1(s), \quad s \in \Gamma^1, \end{aligned} \quad (13a)$$

где $\varphi_0(x, y)$ – угол между векторами $\vec{x}y$ и $\mathbf{n}_x$. Угол $\varphi_0(x, y)$ считается положительным, если он отсчитывается от $\mathbf{n}_x$ против часовой стрелки, и отрицательным, если он отсчитывается от $\mathbf{n}_x$ по часовой стрелке. Первый интеграл в (13а) понимается в смысле главного значения по Коши.

Уравнения (9) на $\Gamma^2 \cup \gamma^1 \cup \gamma^2$ запишем в виде

$$\mu(s) + \int_{\partial\mathcal{D}} \mu(\sigma) A_2(s, \sigma) d\sigma = 2\delta(s, \gamma^1) f_1(s) - 2\delta(s, \Gamma^2 \cup \gamma^2) f_2(s), \quad s \in \partial\mathcal{D} \setminus \Gamma^1, \quad (13b)$$

где

$$\begin{aligned} A_2(s, \sigma) = & 2\delta(s, \gamma^1) \left[\delta(\sigma, \gamma^1) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \Phi(x(s), y(\sigma)) + \delta(\sigma, \Gamma \cup \gamma^2) \Phi(x(s), y(\sigma)) \right. \\ & \left. + 1 - \Phi(x(s), Y_0) + \sum_{n=1}^{N_2} \delta(\sigma, \gamma_n^1) \Phi(x(s), Y_n) \right] \\ & - 2\delta(s, \Gamma^2 \cup \gamma^2) \left[\delta(\sigma, \Gamma \cup \gamma^2) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} + \beta(s) \right) \Phi(x(s), y(\sigma)) \right. \\ & + \delta(\sigma, \gamma^1) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} + \beta(s) \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \Phi(x(s), y(\sigma)) \\ & + \beta(s) - \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} + \beta(s) \right) \Phi(x(s), Y_0) \\ & \left. + \sum_{n=1}^{N_2} \delta(\sigma, \gamma_n^1) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} + \beta(s) \right) \Phi(x(s), Y_n) \right]. \end{aligned}$$

Функция $A_2(s, \sigma)$ непрерывна, если $s \in \gamma^1$, $\sigma \in \partial\mathcal{D}$, а при $s \in \Gamma^2 \cup \gamma^2$, $\sigma \in \partial\mathcal{D}$ представляема в виде

$$A_2(s, \sigma) = \frac{1}{\pi} \beta(s) \delta(\sigma, \Gamma \cup \gamma^2) \ln |(x(s) - y(\sigma))| + \mathcal{J}_0(s, \sigma), \quad \mathcal{J}_0(s, \sigma) \in C^0((\Gamma^2 \cup \gamma^2) \times \partial\mathcal{D}),$$

т.е. ядро $A_2(s, \sigma)$ может иметь логарифмическую особенность, если $s = \sigma \in \Gamma^2 \cup \gamma^2$. Тем самым, интегральный оператор в (13b) с ядром $A_2(s, \sigma)$ действует из $C_q^\omega(\Gamma^1) \cap C^0(\partial\mathcal{D} \setminus \Gamma^1)$ в $C^0(\partial\mathcal{D} \setminus \Gamma^1)$. Очевидно, $A_2(s, \sigma) \in C^0((\partial\mathcal{D} \setminus \Gamma^1) \times \gamma^1)$, а при $\sigma \in \Gamma \cup \gamma^2$, $s \in \partial\mathcal{D} \setminus \Gamma^1$ ядро $A_2(s, \sigma)$ можно записать в виде

$$A_2(s, \sigma) = \mathcal{J}_4(s, \sigma) |x(s) - y(\sigma)|^{-\varepsilon_1},$$

где $\mathcal{J}_4(s, \sigma)$ принадлежит $C^0((\partial\mathcal{D} \setminus \Gamma^1) \times (\Gamma \cup \gamma^2))$ при любом $\varepsilon_1 \in (0, 1)$.

Уравнение (13а) эквивалентно исходному интегральному уравнению (9а) на Γ^1 тогда и только тогда, когда (13а) дополнено следующими условиями

$$u[\mu](x(a_n^1)) = f_1(a_n^1), \quad n = 1, \dots, N_1. \quad (13c)$$

Система (13) эквивалентна исходным интегральным уравнениям (9).

Легко показать [17], что

$$\frac{\sin \varphi_0(x(s), y(\sigma))}{|x(s) - y(\sigma)|} - \frac{1}{\sigma - s} \in C^{0, \lambda}(\Gamma^1 \times \Gamma^1).$$

Следовательно, перепишем (13а) в виде

$$2 \frac{\partial}{\partial s} u[\mu](x(s)) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma^1} \frac{\mu(\sigma)}{\sigma - s} d\sigma + \int_{\partial \mathcal{D}} \mu(\sigma) M(s, \sigma) d\sigma = 2f_1'(s), \quad s \in \Gamma^1, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} M(s, \sigma) = & \delta(\sigma, \Gamma^1) \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin \varphi_0(x(s), y(\sigma))}{|x(s) - y(\sigma)|} - \frac{1}{\sigma - s} \right) + 2\delta(\sigma, \Gamma^2 \cup \gamma^2) \frac{\partial}{\partial s} \Phi(x(s), y(\sigma)) \\ & + 2\delta(\sigma, \gamma^1) \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \Phi(x(s), y(\sigma)) - 2 \frac{\partial}{\partial s} \Phi(x(s), Y_0) + 2 \sum_{n=1}^{N_2} \delta(\sigma, \gamma_n^1) \frac{\partial}{\partial s} \Phi(x(s), Y_n). \end{aligned}$$

Таким образом, система уравнений (9) сведена к эквивалентной системе (13), разрешимость которой будет доказана в следующем пункте.

4. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода и теорема существования. Обращая сингулярный интегральный оператор в (14), получим следующее интегральное уравнение второго рода [13]:

$$\mu(s) + \frac{1}{Q_1(s)} \int_{\partial \mathcal{D}} \mu(\sigma) A_1(s, \sigma) d\sigma + \frac{1}{Q_1(s)} \sum_{n=0}^{N_1-1} G_n s^n = \frac{1}{Q_1(s)} F_1(s), \quad s \in \Gamma^1, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} A_1(s, \sigma) = & -\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma^1} \frac{M(\xi, \sigma)}{\xi - s} Q_1(\xi) d\xi, \quad Q_1(s) = \prod_{n=1}^{N_1} \left| \sqrt{s - a_n^1} \sqrt{b_n^1 - s} \right| \operatorname{sign}(s - a_n^1), \\ F_1(s) = & -\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma^1} \frac{2Q_1(\sigma) f_1'(\sigma)}{\sigma - s} d\sigma \end{aligned}$$

и $G_0, \dots, G_{N_1-1}$ — произвольные постоянные.

Используя свойства сингулярных интегралов [17], [13], можно показать, что всякое решение уравнения (15) принадлежит $C_{1/2}^\omega(\Gamma^1)$, поэтому ниже мы ищем $\mu(s)$ на Γ^1 в этом пространстве.

Положим

$$Q(s) = \delta(s, \Gamma^1) Q_1(s) + \delta(s, \partial \mathcal{D} \setminus \Gamma^1), \quad s \in \partial \mathcal{D}.$$

Вместо $\mu(s) \in C_{1/2}^\omega(\Gamma^1) \cap C^0(\partial \mathcal{D} \setminus \Gamma^1)$ введем новую неизвестную функцию

$$\mu_*(s) = \mu(s) Q(s) \in C^{0,\omega}(\Gamma^1) \cap C^0(\partial \mathcal{D} \setminus \Gamma^1)$$

и запишем (15), (13b) в форме одного уравнения второго рода на всей границе $\partial \mathcal{D}$:

$$\mu_*(s) + \int_{\partial \mathcal{D}} \mu_*(\sigma) Q^{-1}(\sigma) A(s, \sigma) d\sigma + \delta(s, \Gamma^1) \sum_{n=0}^{N_1-1} G_n s^n = F(s), \quad s \in \partial \mathcal{D}, \quad (16a)$$

где

$$\begin{aligned} A(s, \sigma) = & \delta(s, \Gamma^1) A_1(s, \sigma) + \delta(s, \partial \mathcal{D} \setminus \Gamma^1) A_2(s, \sigma), \\ F(s) = & \delta(s, \Gamma^1) F_1(s) + 2\delta(s, \gamma^1) f_1(s) - 2\delta(s, \Gamma^2 \cup \gamma^2) f_2(s). \end{aligned}$$

Выберем константы $G_0, \dots, G_{N_1-1}$ так, чтобы удовлетворить условиям (13с). Для этого подставим $\mu(s)$ из (13b), (15) в (13с), тогда в терминах $\mu_*(s)$ получим

$$\int_{\partial\mathcal{D}} Q^{-1}(\xi)\mu_*(\xi)l_n(\xi)d\xi + \sum_{m=0}^{N_1-1} B_{nm}G_m = H_n, \quad n = 1, \dots, N_1, \quad (16b)$$

где

$$\begin{aligned} l_n(\xi) &= -u[Q^{-1}(\cdot)A(\cdot, \xi)](a_n^1), \\ B_{nm} &= -u[Q^{-1}(\cdot)\delta(\cdot, \Gamma^1)(\cdot)^m](a_n^1), \\ H_n &= -u[Q^{-1}(\cdot)F(\cdot)](a_n^1) + f_1(a_n^1). \end{aligned} \quad (17)$$

Точкой $\cdot$ обозначается переменная интегрирования в потенциале (8).

Таким образом, система уравнений (13) для $\mu(s)$ сведена к системе (16) относительно функции $\mu_*(s)$ и констант $G_0, \dots, G_{N_1-1}$. Очевидно, всякое решение системы (16) дает решение системы (13).

Пользуясь схемой рассуждений, приведенной в [17], можно показать, что $F_1(s) \in C^{0,p}(\Gamma^1)$, $p = \min\{1/2, \lambda\}$ и интегральный оператор в (16а) действует из $C^0(\partial\mathcal{D})$ в $C^{0,p}(\Gamma^1) \cap C^0(\partial\mathcal{D} \setminus \Gamma^1)$. Тем самым, доказана

ЛЕММА 1. Пусть $F(s) \in C^{0,p}(\Gamma^1) \cap C^0(\partial\mathcal{D} \setminus \Gamma^1)$, $p = \min\{\lambda, 1/2\}$. Если $\mu_*(s) \in C^0(\partial\mathcal{D})$ удовлетворяет уравнению (16а), то функция $\mu_*(s)$ принадлежит классу $C^{0,p}(\Gamma^1) \cap C^0(\partial\mathcal{D} \setminus \Gamma^1)$.

Условие $F(s) \in C^{0,p}(\Gamma^1) \cap C^0(\partial\mathcal{D} \setminus \Gamma^1)$ выполнено, если выполнены условия (7). Следовательно, ниже будем искать $\mu_*(s)$ в $C^0(\partial\mathcal{D})$.

В силу специального представления для функции $A_2(s, \sigma)$, приведенного после (13b), интегральный оператор с ядром $A_2(s, \sigma)Q^{-1}(\sigma)$ компактен как оператор, действующий из $C^0(\partial\mathcal{D})$ в $C^0(\partial\mathcal{D} \setminus \Gamma^1)$. Действительно, компактность из $C^0(\gamma^1 \cup \Gamma)$ в $C^0(\partial\mathcal{D} \setminus \Gamma^1)$ следует из теоремы Арцела, а компактность из $C^0(\gamma^2)$ в $C^0(\partial\mathcal{D} \setminus \Gamma^1)$ вытекает из компактности операторов с полярным ядром [21, с. 170, теорема 7.4.1].

Так же как и в [17], можно показать, что интегральный оператор в (16а)

$$A\mu_* = \int_{\partial\mathcal{D}} \mu_*(\sigma)Q^{-1}(\sigma)A(s, \sigma)d\sigma$$

компактно отображает $C^0(\partial\mathcal{D})$ в себя.

Перепишем (16а) в операторной форме

$$(I + A)\mu_* + PG = F, \quad (18a)$$

где P – оператор умножения строки $P = \delta(s, \Gamma^1)(s^0, \dots, s^{N_1-1})$ на столбец $G = (G_0, \dots, G_{N_1-1})^T$. Оператор P конечномерный из E_{N_1} в $C^0(\partial\mathcal{D})$ и потому компактный [22].

Теперь запишем уравнения (16b) в форме

$$I_{N_1}G + L\mu_* + (B - I_{N_1})G = H, \quad (18b)$$

где $H = (H_1, \dots, H_{N_1})^T$ – столбец из N_1 элементов, I_{N_1} – тождественный оператор в E_{N_1} , B – матрица размерности $(N_1 \times N_1)$, состоящая из элементов B_{nm} из (17). Оператор L действует из $C^0(\partial\mathcal{D})$ в E_{N_1} , так что $L\mu_* = (L_1\mu_*, \dots, L_{N_1}\mu_*)^T$, где

$$L_n\mu_* = \int_{\partial\mathcal{D}} Q^{-1}(\xi)\mu_*(\xi)l_n(\xi) d\xi, \quad n = 1, \dots, N_1.$$

Операторы $(B - I_{N_1})$, L – конечномерные, а потому компактные [22].

Рассмотрим столбцы

$$\tilde{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_* \\ G \end{pmatrix}, \quad \tilde{F} = \begin{pmatrix} F \\ H \end{pmatrix}$$

в банаховом пространстве $C^0(\partial\mathcal{D}) \times E_{N_1}$ с нормой

$$\|\tilde{\mu}\|_{C^0(\partial\mathcal{D}) \times E_{N_1}} = \|\mu_*\|_{C^0(\partial\mathcal{D})} + \|G\|_{E_{N_1}}.$$

Запишем систему (18) в форме одного уравнения

$$(\mathbf{I} + \mathbf{R})\tilde{\mu} = \tilde{F}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{P} \\ \mathbf{L} & \mathbf{B} - \mathbf{I}_{N_1} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где $\mathbf{I}$ – тождественный оператор в пространстве $C^0(\partial\mathcal{D}) \times E_{N_1}$. Очевидно, $\mathbf{R}$ – компактный оператор, отображающий $C^0(\partial\mathcal{D}) \times E_{N_1}$ в себя. Следовательно, (19) – уравнение Фредгольма в этом пространстве.

Покажем, что однородное уравнение (19) имеет только тривиальное решение. Тогда в силу альтернативы Фредгольма неоднородное уравнение (19) имеет единственное решение при любой правой части. Доказательство проведем методом от противного. Пусть

$$\tilde{\mu}^0 = \begin{pmatrix} \mu_*^0 \\ G^0 \end{pmatrix} \in C^0(\partial\mathcal{D}) \times E_{N_1}$$

– нетривиальное решение однородного уравнения (19). По лемме 1

$$\tilde{\mu}^0 = \begin{pmatrix} \mu_*^0 \\ G^0 \end{pmatrix} \in C^{0,p}(\Gamma^1) \cap C^0(\partial\mathcal{D} \setminus \Gamma^1) \times E_{N_1}, \quad p = \min\{\lambda, 1/2\}.$$

Следовательно, функция $\mu^0(s) = \mu_*^0(s)Q^{-1}(s) \in C_{1/2}^p(\Gamma^1) \cap C^0(\partial\mathcal{D} \setminus \Gamma^1)$ и столбец G^0 превращают однородные уравнения (13b), (15), (16b) в тождества. Например, (13b) принимает вид

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x(s) \in \gamma^1 \\ x \in \mathcal{D}}} u[\mu^0](x) = 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x(s) \in \Gamma^2 \cup \gamma^2 \\ x \in \mathcal{D}}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} + \beta(s) \right) u[\mu^0](x) = 0, \quad (20a)$$

где потенциал $u[\mu^0](x)$ определяется формулой (8). Используя однородные тождества (13b), (15), проверим, что однородные тождества (16b) эквивалентны следующим

$$u[\mu^0](a_n^1) = 0, \quad n = 1, \dots, N_1. \quad (20b)$$

Кроме того, действуя на однородное тождество (15) сингулярным интегральным оператором с ядром $(s-t)^{-1}$, найдем, что $\mu^0(s)$ удовлетворяет однородному уравнению (13а), т.е.

$$\left. \frac{\partial}{\partial s} u[\mu^0](x(s)) \right|_{\Gamma^1} = 0. \quad (20c)$$

Из (20) вытекает, что $\mu^0(s)$ удовлетворяет однородным уравнениям (9). По теореме 2 $u[\mu^0](x)$ – решение однородной задачи $\mathbf{U}$ и $\mu^0(s) \in C_{1/2}^p(\Gamma^1) \cap C^{0,\omega_2}(\Gamma^2 \cup \gamma^2) \cap C^{1,\lambda/2}(\gamma^1)$ при любом ω_2 из интервала (12). По теореме 1

$$u[\mu^0](x) \equiv 0, \quad x \in \overline{\mathcal{D}}. \quad (21)$$

Заметим, что $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u[\mu^0](x) = c[\mu^0] = 0$, т.е.

$$\int_{\partial \mathcal{D}} \mu^0(s) ds = 0. \quad (22)$$

Следовательно, точечный источник в точке Y_0 отсутствует и

$$h[\mu^0](x) = \sum_{n=1}^{N_2} \int_{\gamma_n^1} \mu^0(s) ds \Phi(x, Y_n), \quad (23)$$

так что внутри замкнутых кривых, составляющих $\Gamma \cup \gamma^2$, точечных источников нет.

Пусть $\mathcal{L}$ – произвольная замкнутая кривая, принадлежащая $\Gamma \cup \gamma^2$ и ограничивающая внутреннюю односвязную область Ω . Функция $u[\mu^0](x)$ в окрестности $\mathcal{L}$ представляется потенциалом простого слоя с гладкими добавками и поэтому непрерывна (не имеет скачка) при переходе через $\mathcal{L}$. Очевидно, что в $\overline{\Omega}$ функция $u[\mu^0](x)$ удовлетворяет однородной задаче Дирихле:

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad u(x(s))|_{\mathcal{L}} = 0. \quad (24)$$

Принимая во внимание гладкость функции $\mu^0(s)$ и свойства потенциала простого слоя [17, теорема 4], убеждаемся в том, что $u[\mu^0](x) \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Согласно принципу максимума для гармонических функций [15] однородная задача Дирихле (24) имеет только тривиальное решение: $u[\mu^0](x) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. Пользуясь (21) и теоремой о скачке для нормальной производной потенциала простого слоя на $\mathcal{L}$, получим

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x(s) \in \mathcal{L} \\ x \in \mathcal{D}}} \frac{\partial u[\mu^0](x)}{\partial \mathbf{n}_x} - \lim_{\substack{x \rightarrow x(s) \in \mathcal{L} \\ x \in \Omega}} \frac{\partial u[\mu^0](x)}{\partial \mathbf{n}_x} = -\mu^0(s) \equiv 0,$$

т.е. $\mu^0(s) \equiv 0$ на $\mathcal{L}$. Так как $\mathcal{L}$ – произвольная замкнутая кривая, составляющая $\Gamma \cup \gamma^2$, то $\mu^0(s) \equiv 0$ на $\Gamma \cup \gamma^2$. Тем самым, $u[\mu^0](x)$ принимает вид

$$u[\mu^0](x) = \int_{\gamma^1} \mu^0(\sigma) \frac{\partial \Phi(x, y(\sigma))}{\partial \mathbf{n}_y} d\sigma + \sum_{n=1}^{N_2} \int_{\gamma_n^1} \mu^0(\sigma) d\sigma \Phi(x, Y_n)$$

и в соответствии с (22)

$$\int_{\gamma^1} \mu^0(s) ds = 0.$$

Пусть $\mathcal{D}_n$ – внутренняя односвязная область, ограниченная кривой γ_n^1 , и $\mathcal{D}_0 = \bigcup_{n=1}^{N_2} \mathcal{D}_n$. Из приведенных рассуждений вытекает, что

$$u[\mu^0](x) \equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\mathcal{D}_0 \cup \gamma^1). \quad (25)$$

Рассмотрим произвольную простую гладкую замкнутую кривую $\mathcal{J}$, лежащую в области $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathcal{D}_0 \cup \gamma^1)$ и охватывающую из всех кривых, составляющих γ^1 , только кривую γ_n^1 ($n = 1, \dots, N_2$). Полагая, что $\mathbf{n}_x$ – непрерывное поле нормалей на кривой $\mathcal{J}$, вычислим

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{J}} \frac{\partial u[\mu^0](x)}{\partial \mathbf{n}_x} dl_x &= 0 = \int_{\gamma_n^1} \mu^0(\sigma) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \left(\int_{\mathcal{J}} \frac{\partial \Phi(x, y(\sigma))}{\partial \mathbf{n}_x} dl_x \right) d\sigma \\ &\quad + \int_{\gamma_n^1} \mu^0(\sigma) d\sigma \int_{\mathcal{J}} \frac{\partial \Phi(x, Y_n)}{\partial \mathbf{n}_x} dl_x. \end{aligned}$$

Здесь учтено следующее свойство гармонических функций: если функция $\mathcal{U}(x)$ гармоническая внутри контура $\mathcal{J}$ и $\nabla \mathcal{U}(x)$ непрерывно продолжается на $\mathcal{J}$ изнутри, то

$$\int_{\mathcal{J}} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{n}_x} dl_x = 0.$$

Примем во внимание, что

$$\int_{\mathcal{J}} \frac{\partial \Phi(x, y(\sigma))}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{y(\sigma) \in \gamma_n^1} dl_x = \int_{\mathcal{J}} \frac{\partial \Phi(x, Y_n)}{\partial \mathbf{n}_x} dl_x = \pm 1,$$

где знак зависит от выбора направления поля нормалей $\mathbf{n}_x$ на кривой $\mathcal{J}$. Отсюда вытекает равенство

$$\int_{\mathcal{J}} \frac{\partial u[\mu^0](x)}{\partial \mathbf{n}_x} dl_x = \pm \int_{\gamma_n^1} \mu^0(\sigma) d\sigma = 0.$$

Поскольку наши рассуждения справедливы для любого $n = 1, \dots, N_2$, то убеждаемся в справедливости следующих тождеств:

$$\int_{\gamma_n^1} \mu^0(\sigma) d\sigma = 0, \quad n = 1, \dots, N_2. \quad (26)$$

Функция $u[\mu^0](x)$ принимает вид потенциала двойного слоя:

$$u[\mu^0](x) = \int_{\gamma^1} \mu^0(\sigma) \frac{\partial \Phi(x, y(\sigma))}{\partial \mathbf{n}_y} d\sigma.$$

По теореме 2 функция $\mu^0(\sigma) \in C^{1, \lambda/2}(\gamma^1)$. Как показано в [18], при такой плотности $\mu^0(\sigma)$ первые производные потенциала двойного слоя $u[\mu^0](x)$ непрерывно продолжимы на γ_n^1 ($n = 1, \dots, N_2$) извне и изнутри. Более того,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x(s) \in \gamma_n^1 \\ x \in \mathcal{D}}} \frac{\partial u[\mu^0](x)}{\partial \mathbf{n}_x} = \lim_{\substack{x \rightarrow x(s) \in \gamma_n^1 \\ x \in \mathcal{D}_n}} \frac{\partial u[\mu^0](x)}{\partial \mathbf{n}_x} = 0, \quad n = 1, \dots, N_2,$$

где учтено (25). Очевидно, функция $u[\mu^0](x)$ удовлетворяет следующей задаче Неймана в $\mathcal{D}_n$:

$$\Delta u = 0, \quad x \in \mathcal{D}_n, \quad \frac{\partial u}{\partial n_x} \Big|_{\gamma_n^1} = 0, \quad n = 1, \dots, N_2.$$

Известно [15], что решением такой задачи является константа, т.е.

$$u[\mu^0](x) \equiv c_n, \quad x \in \mathcal{D}_n, \quad n = 1, \dots, N_2,$$

где $c_1, \dots, c_{N_2}$ – некоторые константы. Пользуясь теоремой о скачке потенциала двойного слоя [15] и пользуясь (25), получим

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x(s) \in \gamma_n^1 \\ x \in \mathcal{D}}} u[\mu^0](x) - \lim_{\substack{x \rightarrow x(s) \in \gamma_n^1 \\ x \in \mathcal{D}_n}} u[\mu^0](x) = \mu^0(s) = -c_n, \quad n = 1, \dots, N_2,$$

так что $\mu^0(s) \equiv -c_n$ на γ_n^1 ($n = 1, \dots, N_2$). Из (26) вытекает, что $c_n = 0$ при любом $n = 1, \dots, N_2$. Следовательно, $\mu^0(s) \equiv 0$ на γ^1 .

Таким образом, $\mu^0(s) \equiv 0$ на $\partial\mathcal{D}$ и $\mu_*^0(s) = Q(s)\mu^0(s) \equiv 0$ на $\partial\mathcal{D}$. Из однородного тождества (16а) для функции $\mu_*^0(s)$ и констант $G_0^0, \dots, G_{N_1-1}^0$ получим

$$G^0 = (G_0^0, \dots, G_{N_1-1}^0)^T \equiv 0.$$

Тем самым,

$$\tilde{\mu}^0 = \begin{pmatrix} \mu_*^0 \\ G^0 \end{pmatrix} \equiv 0$$

и мы приходим к противоречию с предположением о том, что $\tilde{\mu}^0$ – нетривиальное решение однородного уравнения (19). В результате однородное уравнение (19) имеет только тривиальное решение. По теоремам Фредгольма неоднородное уравнение (19) однозначно разрешимо в $C^0(\partial\mathcal{D}) \times E_{N_1}$. Итак, нами доказана

ТЕОРЕМА 3. Уравнение (19) (или система (16)) в пространстве $C^0(\partial\mathcal{D}) \times E_{N_1}$ есть уравнение Фредгольма второго рода, которое при любой правой части

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} F \\ H \end{pmatrix} \in C^0(\partial\mathcal{D}) \times E_{N_1}$$

имеет единственное решение

$$\tilde{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_* \\ G \end{pmatrix} \in C^0(\partial\mathcal{D}) \times E_{N_1}.$$

Напомним, что если выполнены условия (7), то $F(s) \in C^{0,p}(\Gamma^1) \cap C^0(\partial\mathcal{D} \setminus \Gamma^1)$, $p = \min\{\lambda, 1/2\}$, и по лемме 1 решение $\tilde{\mu}$ уравнения (21), гарантированное теоремой 3, принадлежит $C^{0,p}(\Gamma^1) \cap C^0(\partial\mathcal{D} \setminus \Gamma^1) \times E_{N_1}$.

Как отмечено выше, если функция $\mu_*(s) \in C^{0,p}(\Gamma^1) \cap C^0(\partial\mathcal{D} \setminus \Gamma^1)$ и константы $G_0, \dots, G_{N_1-1}$ удовлетворяют системе (16), то функция $\mu(s) = Q^{-1}(s)\mu_*(s) \in C_{1/2}^p(\Gamma^1) \cap C^0(\partial\mathcal{D} \setminus \Gamma^1)$ – решение системы (13) и, следовательно, $\mu(s)$ удовлетворяет уравнению (9). Из приведенных рассуждений вытекает

ТЕОРЕМА 4. Если выполнены условия (7), то уравнения (9) имеют решение $\mu(s)$ в $C_{1/2}^p(\Gamma^1) \cap C^0(\partial\mathcal{D} \setminus \Gamma^1)$ с $p = \min\{\lambda, 1/2\}$. При этом справедливо представление $\mu(s) = \mu_*(s)Q^{-1}(s)$, где $\mu_*(s) \in C^{0,p}(\Gamma^1) \cap C^0(\partial\mathcal{D} \setminus \Gamma^1)$; оно находится в результате решения уравнения Фредгольма второго рода (19) (или системы (16)), которое однозначно разрешимо.

Напомним, что функция $Q(s)$ введена в уравнении (16а).

ЗАМЕЧАНИЕ. Так же, как и при доказательстве теоремы 3, можно показать, что решение интегральных уравнений (9) (или эквивалентной системы (13)), гарантированное теоремой 4, единственно в $C_{1/2}^{p_1}(\Gamma^1) \cap C^0(\partial\mathcal{D} \setminus \Gamma^1)$ при любом $p_1 \in (0, p]$. Это замечание может быть полезно при проведении численных расчетов, так как решение интегральных уравнений может быть получено дискретизацией и прямым численным обращением матрицы [4], [5].

На основе теорем 2, 4 приходим к окончательному результату.

ТЕОРЕМА 5. Если выполнены условия (7), то решение задачи **У** существует и дается формулой (8), где $\mu(s)$ – решение уравнений (9) в $C_{1/2}^p(\Gamma^1) \cap C^0(\partial\mathcal{D} \setminus \Gamma^1)$, $p = \min\{\lambda, 1/2\}$, гарантированное теоремой 4. Более точно, $\mu(s) \in C_{1/2}^p(\Gamma^1) \cap C^{0,\omega_2}(\Gamma^2 \cup \gamma^2) \cap C^{1,\lambda/2}(\gamma^1)$ при любом ω_2 из интервала (12).

Отметим, что согласно свойствам потенциалов из [17] решение задачи **У** удовлетворяет оценке (1) с $\varepsilon = -q = -1/2$. Явные формулы, описывающие поведение градиента решения в окрестности концов разомкнутых дуг, составляющих Γ , несложно получить, воспользовавшись результатами работ [17], [20].

Теорема 5 гарантирует существование классического решения задачи **У**, когда $\partial\mathcal{D} \in C^{2,\lambda}$ и функции $\beta(s)$, $f_1(s)$, $f_2(s)$ из граничных условий (3), (4) удовлетворяют условиям (7). Единственность классического решения вытекает из теоремы 1. На основании полученных результатов можно предложить следующую схему решения задачи **У**. Сначала находим единственное решение уравнения Фредгольма (19) (или системы (16)) в $C^0(\partial\mathcal{D}) \times E_{N_1}$. Это решение автоматически принадлежит

$$C^{0,p}(\Gamma^1) \cap C^0(\partial\mathcal{D} \setminus \Gamma^1) \times E_{N_1}, \quad p = \min\left\{\lambda, \frac{1}{2}\right\}.$$

Далее, строим решение уравнений (9) в $C_{1/2}^p(\Gamma^1) \cap C^0(\partial\mathcal{D} \setminus \Gamma^1)$ с помощью соотношения $\mu(s) = \mu_*(s)Q^{-1}(s)$. Это решение автоматически принадлежит

$$C_{1/2}^p(\Gamma^1) \cap C^{0,\omega_2}(\Gamma^2 \cup \gamma^2) \cap C^{1,\lambda/2}(\gamma^1)$$

при любом ω_2 из интервала (12). Окончательно, подставляя $\mu(s)$ в (8), получаем решение задачи **У**.

В соответствии с замечанием к теореме 4 единственное решение уравнений (9) (или эквивалентной системы (13)) в $C_{1/2}^{p_1}(\Gamma^1) \cap C^0(\partial\mathcal{D} \setminus \Gamma^1)$ с $p_1 \in (0, p]$ может быть найдено напрямую, непосредственным решением указанных уравнений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Крутицкий П. А. О смешанной задаче для уравнения Гельмгольца в многосвязной области // ЖВМиМФ. 1996. Т. 36. № 8. С. 127–137.
- [2] Крутицкий П. А. Смешанная задача для уравнения Гельмгольца вне разрезов на плоскости // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 9. С. 1153–1162.
- [3] Крутицкий П. А. Смешанная задача для уравнения Лапласа вне разрезов на плоскости // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 9. С. 1181–1190.
- [4] Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985.
- [5] Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: Янус, 1995.
- [6] Гринберг В. М., Плаф Л. Я. (ред.) Интегральные уравнения. М., 1968.
- [7] Homentcovschi D. On the Dirichlet–Neumann mixed boundary value problem for harmonic functions in plane multiply connected domains // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 1987. V. 32. № 9. P. 801–810.
- [8] Krutitskii P. A. Fast stratified flow over several obstacles, including wings // IMA J. Appl. Math. 1996. V. 57. № 3. P. 243–256.
- [9] Krutitskii P. A. The 2-D Neumann problem in an exterior domain bounded by closed and open curves // Math. Methods Appl. Sci. 1997. V. 20. № 18. P. 1551–1562.
- [10] Krutitskii P. A. Wave propagation in a 2-D external domain bounded by closed and open curves // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. 1998. V. 32. № 1. P. 135–144.
- [11] Krutitskii P. A. The Neumann problem for the 2-D Helmholtz equation in a domain, bounded by closed and open curves // Internat. J. Math. Math. Sci. 1998. V. 21. № 2. P. 209–216.
- [12] Krutitskii P. A. The Dirichlet problem for the dissipative Helmholtz equation in a plane domain bounded by closed and open curves // Hiroshima Math. J. 1998. V. 28. № 1. P. 149–168.
- [13] Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
- [14] Jacob C. Introduction mathématique à la mécanique des fluides. Bucarest–Paris, 1959.
- [15] Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
- [16] Крутицкий П. А. Вторая начально-краевая задача для уравнения гравитационно-гироскопических волн во внешней области // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 1. С. 40–57.
- [17] Крутицкий П. А. Задача Дирихле для уравнения Гельмгольца вне разрезов на плоскости // ЖВМиМФ. 1994. Т. 34. № 8–9. С. 1237–1258.
- [18] Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987.
- [19] Габоу С. А. Угловой потенциал и его некоторые приложения // Матем. сб. 1977. Т. 103(145). № 4. С. 490–504.
- [20] Крутицкий П. А. Задача Неймана для уравнения Гельмгольца вне разрезов на плоскости // ЖВМиМФ. 1994. Т. 34. № 11. С. 1652–1665.
- [21] Михлин С. Г. Курс математической физики. М.: Наука, 1968.
- [22] Крейн С. Г. (ред.) Функциональный анализ. М.: Наука, 1964.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
ИПМ им. Келдыша РАН

Поступило
30.08.1998
Исправленный вариант
23.08.1999