Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Кудрявцев, О чисто логтерминальных раздутиях, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 6, 892–898

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm702>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 03:16:47

УДК 512

О ЧИСТО ЛОГТЕРМИНАЛЬНЫХ РАЗДУТИЯХ

С. А. Кудрявцев

Доказывается существование чисто логтерминального раздутия для логтерминальной особенности и критерий слабой исключительности особенности.

Библиография: 9 названий.

Введение. Основная цель этой заметки – доказать некоторые результаты работы [1] для не $\mathbb{Q}$ -факториального случая, а именно теорему о существовании чисто логтерминального раздутия (теорема 1.5) и критерий слабой исключительности особенности (теорема 2.1). Эти раздутия позволяют нам применить индуктивный метод Шокурова [2] для изучения особенностей или, более общо, для стягиваний алгебраических многообразий. Он позволяет свести вопросы о структуре, дополняемости и исключительности особенности к единственному исключительному дивизору раздутия. Для $\mathbb{Q}$ -факториальных особенностей чисто логтерминальное раздутие – это единственное раздутие, позволяющее в общем случае продолжить дополнение с исключительного дивизора на все многообразие (замечание 1.3), а для не $\mathbb{Q}$ -факториальных логтерминальных особенностей такие раздутия будут отличаться от чисто логтерминального раздутия на малое флоповое стягивание (следствие 1.13). При изучении произвольных $\mathbb{Q}$ -горнштейновых особенностей практически невозможно отделить класс $\mathbb{Q}$ -факториальных особенностей от остальных. Поэтому приходится пользоваться теоремами и конструкциями, которые верны в общем случае. Данная работа уточняет результаты статьи [1] о индуктивном методе изучения любых логканонических особенностей.

Автор очень признателен В. А. Исковских и Ю. Г. Прохорову за полезные обсуждения и постоянный интерес к работе.

1. Чисто логтерминальные раздутия и их свойства. В дальнейшем все многообразия являются алгебраическими и рассматриваются над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Полученные результаты также верны и в случае комплексных пространств. Основные определения, обозначения и понятия приведены в [1], [3], [4]. *Строго логканоническими особенностями* называются логканонические, но не логтерминальные особенности.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-01132, программы “Ведущие научные школы”, грант № 96-15-96146, фонда INTAS, гранты INTAS-OPEN № 93-2805 и № 97-2072.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть X – нормальное логканоническое алгебраическое многообразие, и пусть $f: Y \rightarrow X$ – некоторое его раздутие. Предположим, что исключительное множество f состоит только из одного неприводимого дивизора E ($\text{Exc}(f) = E$). Тогда $f: (Y, E) \rightarrow X$ называется *чисто логтерминальным раздутием*, если дивизор $K_Y + E$ чисто логтерминален и $-E$ f -обилен.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. В определении 1.1 неявно требуется, чтобы дивизор E был $\mathbb{Q}$ -Картье. Отсюда следует, что многообразие Y имеет $\mathbb{Q}$ -горенштейновы особенности.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. В обозначениях определения 1.1 имеем следующие свойства чисто логтерминальных раздутий.

1. Если многообразие X имеет логтерминальные особенности, то дивизор $-(K_Y + E)$ f -обилен. Действительно, это следует из численной эквивалентности $K_Y + E \equiv (a(E, 0) + 1)E$ над X .

2. Если многообразие X имеет строго логканонические особенности, то $a(E, 0) = -1$.

3 [1, п. 2.2]. Если многообразие X является $\mathbb{Q}$ -факториальным, то Y тоже $\mathbb{Q}$ -факториально и $\rho(Y/X) = 1$. Отсюда следует, что в определении 1.1 для $\mathbb{Q}$ -факториального случая, можно не требовать относительную обильность дивизора $-E$, так как она всегда имеет место. Напомним также, что каждая компонента исключительного множества любого бирационального стягивания в $\mathbb{Q}$ -факториальную точку имеет коразмерность 1.

4. По обращению присоединения дивизор $K_E + \text{Diff}_E(0)$ логтерминален по Кавамате. Любое его n -дополнение продолжается до n -дополнения $K_Y + E$, следовательно, K_X тоже n -дополняем [1, п. 2.8].

5 [1, п. 2.2]. Пусть $f_i: (Y_i, E_i) \rightarrow (X \ni P)$ – два чисто логтерминальных раздутия. Если E_1 и E_2 определяют одно и тоже дискретное нормирование поля функций $\mathcal{K}(X)$, то раздутия f_1 и f_2 изоморфны.

ПРОБЛЕМА 1.4. Описать класс слабых поверхностей лог-Дель Пеццо, $\mathbb{P}^1$ (и эллиптических) расслоений в общей точке, которые могут быть реализованы как исключительные дивизоры чисто логтерминальных раздутий терминальных, канонических, ε -логтерминальных, строго логканонических особенностей.

Существование чисто логтерминального раздутия для логтерминальной особенности следует из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1.5. Пусть X – многообразие с логтерминальными особенностями, и пусть $D \neq 0$ – граница на X такая, что пара (X, D) является логканоничной, но не чисто логтерминальной. Предположим, что верна лог-программа минимальных моделей. (При $\dim X \leq 3$ это так.) Тогда существует раздутие $f: Y \rightarrow X$ со следующими свойствами:

- 1) исключительное множество морфизма f состоит только из одного неприводимого дивизора E ($\text{Exc}(f) = E$);
- 2) дивизор $K_Y + E + D_Y = f^*(K_X + D)$ логканоничен;
- 3) дивизор $K_Y + E + (1 - \varepsilon)D_Y$ чисто логтерминален и антиобилен над X для любых $\varepsilon > 0$;
- 4) если многообразие X $\mathbb{Q}$ -факториально, то Y тоже $\mathbb{Q}$ -факториально и $\rho(Y/X) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для удобства читателей напомним доказательство этой теоремы для $\mathbb{Q}$ -факториальных особенностей [1, п. 2.9]. Пусть $g: \hat{Z} \rightarrow X$ – минимальное логтерминальное разрешение с приведенным исключительным дивизором $\hat{E} = \sum \hat{E}_i$ [3, п. 17.10], [5, п. 9.1]. По определению такого разрешения многообразие $\hat{Z}$ $\mathbb{Q}$ -факториально и дивизор $K_{\hat{Z}} + \hat{E} + D_{\hat{Z}} = g^*(K_X + D)$ является дивизорно логтерминальным. Так как X имеет логтерминальные особенности, то дивизор

$$K_{\hat{Z}} + \hat{E} = g^*K_X + \sum (a(E, 0) + 1)\hat{E}_i$$

не может быть g -численно эффективным по численным свойствам сдвигов [5, п. 1.1]. Применим $(K_{\hat{Z}} + \hat{E})$ -программу минимальных моделей. На последнем шаге имеем стягивание $g': \tilde{Z} \rightarrow X$ (см. диаграмму (1)). Дивизор $K_{\tilde{Z}} + \tilde{E} + D_{\tilde{Z}} = g'^*(K_X + D)$, где $\tilde{E}$ – неприводимый дивизор, логканоничен. Так как $K_{\tilde{Z}} + \tilde{E}$ чисто логтерминальный дивизор, то пара $(\tilde{Z}, \tilde{E} + (1 - \varepsilon)D_{\tilde{Z}})$ чисто логтерминальна для любых $\varepsilon > 0$.

Если многообразие X $\mathbb{Q}$ -факториально, то согласно замечанию 1.3 $\text{Exc}(g') = \tilde{E}$, $\rho(\tilde{Z}/X) = 1$ и $-\tilde{E}$ g' -обилен, поэтому g' – искомое раздутие:

$$\begin{array}{ccccccc} (\hat{Z}, \hat{E} = \sum \hat{E}_i) & \dashrightarrow & (\tilde{Z}, \tilde{E}) & \dashrightarrow^{\varphi} & (Y', E') & \xrightarrow{\psi} & (Y, E) \\ \downarrow g & & \downarrow g' & & \downarrow f' & & \downarrow f \\ X & = & X & = & X & = & X \end{array} \quad (1)$$

Предположим, что $\text{Exc}(g') = \tilde{E} \cup \Delta$, где $\Delta \neq \emptyset$ и $\text{codim}_{\tilde{Z}} \Delta \geq 2$. Из численной эквивалентности $K_{\tilde{Z}} + D_{\tilde{Z}} \equiv -\tilde{E}$ над X следует, что дивизор $K_{\tilde{Z}} + D_{\tilde{Z}}$ не может быть g' -численно эффективным и он неотрицателен на кривых, лежащих на $\tilde{E}$. Применим $(K_{\tilde{Z}} + D_{\tilde{Z}})$ -программу минимальных моделей. В итоге получим стягивание $f': Y' \rightarrow X$, у которого $\text{Exc}(f') = E'$, где E' – неприводимый дивизор. Заметим, что бирациональное отображение φ раскладывается в произведение лог-флипов. Дивизор $K_{Y'} + E' + (1 - \varepsilon)D_{Y'}$ чисто логтерминален для любых $\varepsilon > 0$. Если $-E'$ f' -обилен, то f' – искомое раздутие.

Пусть дивизор $-E'$ не f' -обилен. Так как $-E'$ f' -численно эффективен и

$$K_{Y'} + E' = f'^*K_X + (a(E, 0) + 1)E',$$

где $a(E, 0) + 1 > 0$, то $-(K_{Y'} + E')$ f' -численно эффективен. По теореме о свободе [6, п. 3.1.2] для логтерминального по Кавамате дивизора $K_{Y'} + (1 - \delta)E'$, где $0 < \delta \ll 1$, для больших n линейная система $| -n(K_{Y'} + E') |$ свободна над X . Она задает малый бирациональный морфизм $\psi: (Y', E') \rightarrow (Y, E)$. Пусть C – стягиваемая кривая. Так как $(K_{Y'} + E') \cdot C = 0$, то $E' \cdot C = 0$ и $K_{Y'} \cdot C = 0$. Итак, морфизм ψ стягивает в точности те кривые, которые пересекаются с дивизором E' по нулю. Полученное раздутие $f: (Y, E) \rightarrow X$, очевидно, является искомым.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Логканоническая особенность $(X \ni P)$ называется *слабо исключительной*, если для нее существует ровно одно чисто логтерминальное раздутие (с точностью до изоморфизма). Логканоническая пара (X, D) , где дивизор D – граница, называется *исключительной*, если существует не более одного исключительного дивизора E с дискрепантностью $a(E, D) = -1$. Логканоническая особенность $(X \ni P)$ называется *исключительной*, если все логканонические пары (X, D) являются исключительными.

Для следующего следствия из теоремы 1.5 также нужна лог-программа минимальных моделей.

СЛЕДСТВИЕ 1.7. Пусть $f: (Y, E) \rightarrow (X \ni P)$ – чисто логтерминальное раздутие логтерминальной особенности. Предположим, что $\dim f(E) \geq 1$; тогда существует другое чисто логтерминальное раздутие $(X \ni P)$, поэтому особенность не слабо исключительна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем два гиперплоских сечения H_1 и H_2 , проходящих через точку P и не содержащих $f(E)$. Пусть $c > 0$ – логканонический порог дивизора $H_1 + H_2$. Тогда дивизор $K_X + c(H_1 + H_2)$ не чисто логтерминален. Множество $f(E)$ отлично от $LCS(X, c(H_1 + H_2))$. Применяя теорему 1.5 к $(X, c(H_1 + H_2))$, получаем требуемое.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.8. Пусть $f: (Y, E) \rightarrow (X \ni P)$ – чисто логтерминальное раздутие строго логканонической особенности. Предположим, что $\dim f(E) \geq 1$. Тогда $(X \ni P)$ – не исключительная особенность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве следствия 1.7, существует дивизор D такой, что пара (X, D) логканонична, но не чисто логтерминальна и множество $f(E)$ отлично от минимального центра $LCS(X, D)$. Противоречие с определением исключительности.

Для доказательства необходимости в следующей теореме нужна лог-программа минимальных моделей.

ТЕОРЕМА 1.9. Пусть $(X \ni P)$ – строго логканоническая особенность. Тогда

- 1) если существует чисто логтерминальное раздутие, то оно единственно (с точностью до изоморфизма);
- 2) особенность является исключительной тогда и только тогда, когда существует чисто логтерминальное раздутие $f: (Y, E) \rightarrow (X \ni P)$ такое, что $f(E) = P$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение немедленно следует из свойств 2 и 5 из замечания 1.3. Докажем вторую часть теоремы.

Необходимость. Построение чисто логтерминального раздутия повторяет доказательство теоремы 1.5. Пусть $g': \tilde{Z} \rightarrow X$ – минимальное логтерминальное разрешение с приведенным исключительным дивизором $\tilde{E} = \sum \tilde{E}_i$. По определению такого разрешения многообразие $\tilde{Z}$ $\mathbb{Q}$ -факториально и дивизор $K_{\tilde{Z}} + \tilde{E} = g'^* K_X$ дивизориально логтерминален. Так как особенность исключительна, дивизор $\tilde{E}$ неприводим и поэтому $K_{\tilde{Z}} + \tilde{E}$ чисто логтерминален. Если $\text{Exc}(g') = \tilde{E} \cup \Delta$, где $\Delta \neq \emptyset$ и $\text{codim}_{\tilde{Z}} \Delta \geq 2$, то применим $K_{\tilde{Z}}$ -программу минимальных моделей. В итоге получим стягивание $f': Y' \rightarrow X$,

у которого $\text{Exc}(f') = E'$, где E' – неприводимый дивизор. Дивизор $K_{Y'} + E'$ останется чисто логтерминальным. Если $-E'$ f' -обилен, то f' – искомое раздутие. Пусть $-E'$ не f' -обилен. Так как $-E'$ f' -численно эффективен и $K_{Y'} \equiv -E'$ над X , то $K_{Y'}$ f' -численно эффективен. По теореме о свободе [6, п. 3.1.2] для больших n линейная система $|nK_{Y'}|$ свободна над X . Она задает малый бирациональный морфизм $h: (Y', E') \rightarrow (Y, E)$. Полученное раздутие $f: (Y, E) \rightarrow X$ является чисто логтерминальным, так как K_Y f -обилен. Из предложения 1.8 $f(E) = P$.

Достаточность. Заметим, что E – единственный исключительный дивизор с дискрепантностью $a(E, 0) = -1$. Пусть (X, D) – произвольная логканоническая пара, так как $f(E) = P$, то $D = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 1.10. *Для строго логканонической исключительной особенности минимальный индекс дополняемости совпадает с индексом горнштейновости особенности.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1.11. Для трехмерных логканонических особенностей минимальный индекс дополняемости ограничен [2, п. 7.1]. Гипотетически, он не более 66. Для трехмерных исключительных строго логканонических особенностей это доказано в работах [7] и [8]. Для неисключительных неизолированных особенностей индекс горнштейновости неограничен [8, п. 5.1].

СЛЕДСТВИЕ 1.12 [9, п. 2.4]. *Исключительная особенность является слабо исключительной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование чисто логтерминального раздутия следует из теорем 1.5 и 1.9, а по [9, п. 2.4] оно единственно.

Из доказательств теорем 1.5 и 1.9 имеем следующее

СЛЕДСТВИЕ 1.13. *Если в определении 1.1 не требовать относительную обильность дивизора $-E$, то такие раздутия могут отличаться от чисто логтерминального раздутия только на малое флоповое стягивание.*

2. Критерий слабой исключительности особенности. Для доказательства импликации (3) $\implies$ (1) в следующей теореме нужна лог-программа минимальных моделей.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть $(X \ni P)$ – логтерминальная особенность, и пусть $f: (Y, E) \rightarrow X$ – ее чисто логтерминальное раздутие. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- 1) особенность $(X \ni P)$ не слабо исключительная;
- 2) существует эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \geq \text{Diff}_E(0)$ такой, что $-(K_E + D)$ – обильный дивизор и пара (E, D) не логтерминальна по Кавамате;
- 3) существует эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \geq \text{Diff}_E(0)$ такой, что $-(K_E + D)$ – обильный дивизор и пара (E, D) не логканонична.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательства импликаций (1) $\implies$ (2) и (2) $\implies$ (3) см. в [1, п. 4.3]. Осталось доказать (3) $\implies$ (1). По следствию 1.7 можно считать, что $f(E) = P$.

Из доказательства [1, теорема 4.3] следует существование эффективного $\mathbb{Q}$ -Картье дивизора $B = \sum b_i B_i$ такого, что дивизор $K_Y + E + B$ логканоничен, но не чисто логтерминален и антибилен над X . Пусть H – очень обильный дивизор, содержащий минимальный центр $LCS(Y, E + B)$. Пусть $\varepsilon > 0$ – достаточно малое рациональное число такое, что дивизор $-(K_Y + E + B + \varepsilon H)$ f -обилен. Заменяя B на дивизор $c(B + \varepsilon H)$, можем добиться, что все $b_i < 1$ ($c < 1$, так как H содержит минимальный центр) и все другие условия сохраняются. Положим $L = f(B)$. Так как дивизор $-(K_Y + E + B)$ f -обилен и все $b_i < 1$, то логканонический порог c' пары (X, L) строго больше единицы. Если пара $(X, c'L)$ чисто логтерминальна, то добавим эффективный $\mathbb{Q}$ -Картье дивизор L' и будем считать, что пара $(X, c'L + L')$ логканонична, но не чисто логтерминальна. Применяя к ней теорему 1.5, получаем чисто логтерминальное раздутие $f': (Y', E') \rightarrow X$. Раздутия f и f' не изоморфны, так как дивизор $K_Y + E + c'L_Y + L'_Y$ не логканоничен ($c' > 1$).

ПРИМЕР 2.4 [1, п. 4.7], [4, п. 6.4]. Двухмерные слабо исключительные логтерминальные особенности – это в точности особенности типов $\mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8$. Среди них только особенности типа $\mathbb{D}_n$ не являются исключительными. Двухмерные слабо исключительные строго логканонические особенности (по теореме 1.9 они исключительны) – это в точности особенности следующих типов: простые эллиптические особенности, особенности типа $\tilde{\mathbb{D}}_4$ с графом минимального разрешения на рис. 1 и особенности типов $\tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8$ с графом минимального разрешения на рис. 2, где $(n_1, n_2, n_3) = (3, 3, 3), (2, 4, 4)$ или $(2, 3, 6)$ соответственно.

Рис. 1

Рис. 2

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Трехмерная терминальная особенность не слабо исключительна [1, п. 4.8].

ПРИМЕР 2.2. При $n \geq 3$ рассмотрим n -мерную каноническую гиперповерхностную особенность

$$(x_1^n + \dots + x_n^n + x_{n+1}^{n+1} = 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0).$$

Взвешенное раздутие $\mathbb{C}^{n+1}$ с весами $(n+1, \dots, n+1, n)$ индуцирует чисто логтерминальное раздутие нашей особенности. Полученное многообразие лог-Фано $(E, \text{Diff}_E(0))$ – это

$$\left(x_1^n + \dots + x_n^n + x_{n+1} \subset \mathbb{P}(1, \dots, 1, n), \frac{n}{n+1} \{x_{n+1} = 0\} \right) = \left(\mathbb{P}^{n-1}, \frac{n}{n+1} Q_n \right),$$

где Q_n – гладкая гиперповерхность в $\mathbb{P}^{n-1}$ степени n . По теореме 2.1 особенность слабо исключительна. Дивизор $\{x_{n+1} = 0\}$ дает не чисто логтерминальное 1-дополнение. Поэтому особенность не исключительна.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Prokhorov Yu. G. Blow-ups of canonical singularities // Algebra / ed. Yu. Bahturin. Proc. Internat. Conf. on the Occasion of the 90th Birthday of A. G. Kurosh (Moscow, Russia, May 25–30, 1998). Berlin: Walter de Gruyter, 2000. P. 301–317.
- [2] Shokurov V. V. Complements on surfaces // E-print [math.AG/9711024](#), 1997.
- [3] Kollar J. et al. Flips and Abundance for Algebraic Threefolds. Astérisque. V. 211. Paris, 1992.
- [4] Prokhorov Yu. G. Lectures on complements on log surfaces // E-print [math.AG/9912111](#), 1999.
- [5] Шокуров В. В. Трехмерные логперестройки // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 1. С. 105–203.
- [6] Kawamata Y., Matsuda K., Matsuki K. Introduction to the minimal model program // Adv. Stud. in Pure Math. 1987. V. 10. P. 283–360.
- [7] Ishii S. The quotient of log-canonical singularities by finite groups // Preprint, 1999.
- [8] Fujino O. The indices of log canonical singularities // E-print [math.AG/9909035](#), 1999.
- [9] Prokhorov Yu. G., Ishii S. Hypersurface exceptional singularities // E-print [math.AG/9910123](#), 1999.

Математический институт им. В. А. Стеклова
E-mail: koudr@mi.ras.ru

Поступило
10.10.2000