Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Салий, Квазибулевы степени элементарных 2-групп,
Матем. заметки, 2001, том 69, выпуск 6, 899–905

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm703>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 04:15:40

УДК 512.532

КВАЗИБУЛЕВЫ СТЕПЕНИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ 2-ГРУПП

В. Н. Салий

Охарактеризованы группоиды с единицей, допускающие вложение в квазибулевы степени элементарных 2-групп.

Библиография: 5 названий.

В [1] были описаны группоиды с единицей, вложимые в квазибулевы степени элементарных абелевых p -групп при $p > 2$. Случай $p = 2$ выпадает из общей схемы и оставался не рассмотренным. В настоящей заметке этот пробел заполняется: получена характеристика группоидов с единицей, допускающих вложение в квазибулевы степени элементарных 2-групп. Тем самым, полностью завершено исследование минимальных многообразий полугрупп в обсуждаемом аспекте (подробности см. в [1]).

Напомним основные понятия.

Ортогональной системой в полной решетке L называется подмножество $\{l_i \mid i \in I\}$ такое, что $l_i \wedge l_j = 0$ для $i \neq j$ и $\bigvee_{i \in I} l_i = 1$ (здесь 0 и 1 – наименьший и наибольший элементы в L соответственно). Ортогональная система $\{l_i \mid i \in I\}$ по определению *независима*, если $\bigvee_{j \in J} l_j \wedge \bigvee_{k \in K} l_k = 0$ для любого разбиения $I = J \cup K$, $J \cap K = \emptyset$. Полная решетка с дополнениями называется *квазибулевой*, если в ней все ортогональные системы независимы. Класс квазибулевых решеток содержит, в частности, все полные булевы решетки. Полная решетка с дополнениями тогда и только тогда будет квазибулевой, когда она допускает $\wedge$ -гомоморфизм на полную булеву решетку, который сохраняет точные верхние грани ортогональных систем и, кроме того, взаимно однозначен в 0 и 1 (см. [2] и [3, с. 271]). Такой $\wedge$ -гомоморфизм называется *каноническим*.

Пусть $(G, \cdot)$ – группа, т.е. полугруппа с единицей, где каждый элемент имеет обратный, и L – квазибулева решетка. Под L -*степенью* группы G понимается совокупность $G[L]$ всех отображений $\nu: G \rightarrow L$ таких, что $\{\nu(g) \mid g \in G\}$ является ортогональной системой в L , снабженной умножением

$$(\mu\nu)(f) = \bigvee_{f=gh} (\mu(g) \wedge \nu(h)) \quad (1)$$

(для любых $\mu, \nu \in G[L]$, $f \in G$). Когда L пробегает класс всех квазибулевых решеток, получаем квазибулевы степени группы G , среди которых находятся и все ее булевы степени.

Булева степень любой группы является группой. Как показано в [1], все квазибулевы степени группы оказываются ассоциациями. *Ассоциация* – это группоид с единицей, в котором каждый элемент имеет обратный и умножение ассоциативно в единице. Группоид A с единицей e тогда и только тогда будет ассоциацией, когда он допускает взаимно

однозначный в единице гомоморфизм на группу. Ядром такого гомоморфизма является конгруэнция θ , состоящая из пар совместно обратимых элементов, т.е. элементов, имеющих одни и те же обратные [2].

Группа G называется *элементарной 2-группой*, если порядок любого ее неединичного элемента равен 2. Элементарная 2-группа коммутативна.

Следующая теорема описывает группоиды с единицей, вложимые в квазибулевы степени элементарных 2-групп.

ТЕОРЕМА. *Группоид A с единицей e тогда и только тогда вкладывается в подтождящую квазибулеву степень некоторой элементарной 2-группы, когда*

- I) *группоид A является коммутативной ассоциацией, в которой выполняется тождество $\alpha\alpha = e$;*
- II) *на A существует стабильный порядок $\leq$, тождественно удовлетворяющий неравенствам*
 - 1) $\alpha\beta \leq \alpha(\alpha\beta)$;
 - 2) $\alpha\beta \leq (\alpha(\alpha\beta))(\beta(\alpha\beta))$;
 - 3) $\alpha\beta \leq ((\alpha\beta)\beta)((\alpha\beta)((\alpha\beta)\beta))$;
 - 4) $\alpha\beta \leq ((\alpha\beta)((\alpha\beta)\alpha))((\alpha\beta)((\alpha\beta)\beta))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть A – подгруппоид с единицей (подассоциация) ассоциации $G[L]$, где G – 2-группа, L – квазибулева решетка. Так как G – коммутативная группа, умножение в $G[L]$, определенное формулой (1), также коммутативно. Квадрат каждого элемента из A равен единице:

$$(\mu\mu)(e) = \bigvee_{e=fg} (\mu(f) \wedge \mu(g)) = \bigvee_f \mu(f) = 1$$

и $(\mu\mu)(f) = 0$ для любого $f \neq e$. Таким образом, условие I) выполняется во всех квазибулевых степенях элементарных 2-групп. Возможны два случая.

1. Пусть $A/\theta \cong Z_2$. В этом случае в A произведение любых двух неединичных элементов равняется единице e . Порядком на A , удовлетворяющим условиям II), является, например, тождественное отношение Δ .

2. Пусть $A/\theta \not\cong Z_2$. Заметим, что любые два неединичных элемента f, g в элементарной 2-группе, отличной от Z_2 , порождают четверную группу $\{e, f, g, fg\}$.

Покажем, что в $G[L]$, где $G \not\cong Z_2$, условиям II) удовлетворяет естественный порядок $\mu \leq \nu \iff (\forall f \in G)(\mu(f) \leq \nu(f))$. Очевидно, что этот порядок стабилен относительно умножения в $G[L]$, определенного формулой (1).

ЛЕММА 1. *Для любых $\mu, \nu \in G[L]$ и $f, g \in G$ выполняется неравенство*

$$\mu(f) \wedge (\mu\nu)(g) \geq \mu(f) \wedge \nu(fg).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле,

$$\begin{aligned} \mu(f) \wedge (\mu\nu)(g) &= \mu(f) \wedge \bigvee_{g=uv} (\mu(u) \wedge \nu(v)) \\ &= \mu(f) \wedge ((\mu(f) \wedge \nu(fg)) \vee \bigvee_{g=uv, u \neq f} (\mu(u) \wedge \nu(v))) \\ &\geq \mu(f) \wedge (\mu(f) \wedge \nu(fg)) = \mu(f) \wedge \nu(fg). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Используя лемму 1, проверяем выполнимость в $G[L]$ неравенств 1)–4) из условий II).

1) Рассмотрим

$$\begin{aligned} (\mu(\mu(\nu)))(f) &= \bigvee_{f=gh} (\mu(g) \wedge (\mu(\nu))(h)) \geq \bigvee_{f=gh} (\mu(g) \wedge (\mu\nu)(gh)) \\ &\geq \bigvee_{f=gh} (\mu(g) \wedge \nu(ggh)) = \bigvee_{f=gh} (\mu(g) \wedge \nu(h)) = (\mu\nu)(f), \end{aligned}$$

т.е. $\mu\nu \leq \mu(\mu(\nu))$.

2) Рассмотрим

$$\begin{aligned} ((\mu(\nu))(\nu(\mu\nu)))(f) &= \bigvee_{f=gh} ((\mu(\nu))(g) \wedge (\nu(\mu\nu))(h)) \\ &= \bigvee_{f=gh} \left(\left(\bigvee_{g=uv} (\mu(u) \wedge (\mu\nu)(v)) \right) \wedge \left(\bigvee_{h=xy} (\nu(x) \wedge (\mu\nu)(y)) \right) \right) \\ &\geq \bigvee_{f=gh} \left(\left(\bigvee_{g=uv} (\mu(u) \wedge \nu(uv)) \right) \wedge \left(\bigvee_{h=xy} (\nu(x) \wedge \mu(xy)) \right) \right) \\ &= \bigvee_{f=gh} \left(\left(\bigvee_u (\mu(u) \wedge \nu(g)) \right) \wedge \left(\bigvee_x (\nu(x) \wedge \mu(h)) \right) \right) \\ &\geq \bigvee_{f=gh} (\mu(h) \wedge \nu(g)) = (\nu\mu)(f) = (\mu\nu)(f), \end{aligned}$$

т.е. $\mu\nu \leq (\mu(\nu))(\nu(\mu\nu))$.

3) Рассмотрим

$$\begin{aligned} (((\mu\nu)\nu)((\mu\nu)((\mu\nu)\nu)))(f) &= \bigvee_{f=gh} (((\mu\nu)\nu)(g) \wedge ((\mu\nu)((\mu\nu)\nu))(h)) \\ &= \bigvee_{f=gh} \left(\left(\bigvee_{g=uv} ((\mu\nu)(u) \wedge \nu(v)) \right) \wedge \bigvee_{h=xy} ((\mu\nu)(x) \wedge ((\mu\nu)\nu)(y)) \right) \\ &\geq \bigvee_{f=gh} \left(\left(\bigvee_{g=uv} (\mu(uv) \wedge \nu(v)) \right) \wedge \bigvee_{h=xy} ((\mu\nu)(x) \wedge \nu(xy)) \right) \\ &= \bigvee_{f=gh} \left(\left(\bigvee_v (\mu(g) \wedge \nu(v)) \right) \wedge \bigvee_x ((\mu)(x) \wedge \nu(h)) \right) \\ &\geq \bigvee_{f=gh} \left((\mu(g) \wedge \nu(h)) \wedge \bigvee_x (\mu(xh)\nu(h)) \right) \\ &\geq \bigvee_{f=gh} (\mu(g) \wedge \nu(h)) = (\mu\nu)(f), \end{aligned}$$

т.е. $\mu\nu \leq ((\mu\nu)\nu)((\mu\nu)((\mu\nu)\nu))$.

4) Рассмотрим

$$((\mu\nu)((\mu\nu)\mu))((\mu\nu)((\mu\nu)\nu))(f) = \bigvee_{f=gh} (((\mu\nu)((\mu\nu)\mu))(g) \wedge ((\mu\nu)((\mu\nu)\nu))(h))$$

$$\begin{aligned}
&= \bigvee_{f=gh} \left(\left(\bigvee_{g=uv} ((\mu\nu)(u) \wedge ((\mu\nu)\mu)(v)) \right) \wedge \bigvee_{h=xy} ((\mu\nu)(x) \wedge ((\mu\nu)\nu)(y)) \right) \\
&\geq \bigvee_{f=gh} \left(\left(\bigvee_{g=uv} ((\mu\nu)(u) \wedge \mu(uv)) \right) \wedge \left(\bigvee_{h=xy} ((\mu\nu)(x) \wedge \nu(xy)) \right) \right) \\
&= \bigvee_{f=gh} \left(\left(\bigvee_u ((\mu\nu)(u) \wedge \mu(g)) \right) \wedge \left(\bigvee_x ((\mu\nu)(x) \wedge \nu(h)) \right) \right) \\
&\geq \bigvee_{f=gh} \left(\left(\bigvee_u (\mu(g) \wedge \nu(gu)) \right) \wedge \left(\bigvee_x (\mu(xh) \wedge \nu(h)) \right) \right) \\
&\geq \bigvee_{f=gh} (\mu(g) \wedge \nu(h)) = (\mu\nu)(f),
\end{aligned}$$

т.е. $\mu\nu \leq ((\mu\nu)((\mu\nu)\mu))((\mu\nu)((\mu\nu)((\mu\nu)\nu)))$.

Таким образом, квазибулевы степени элементарных 2-групп обладают и всеми свойствами II).

Достаточность. Пусть группоид A с единицей e удовлетворяет условиям I), II). Так как выполняется I), отношение θ совместной обратимости является конгруэнцией на A и факторассоциация $G = A/\theta$ является элементарной 2-группой.

1. Рассмотрим случай $G = Z_2 = \{e, z\}$.

Тогда произведение любых двух неединичных элементов в A равно e и стабильным порядком, удовлетворяющим аксиомам II), будет, например, тождественное отношение Δ .

Пусть $A = \{e\} \cup \{\alpha_i \mid i \in I\}$. Через $M_{|I|}$ обозначим решетку высоты 2 с наименьшим элементом α^0 , наибольшим элементом α^1 и атомами α_i , $i \in I$. В четырехэлементной булевой алгебре $L^* = \{0, a, b, 1\}$ заменим атом b решеткой $M_{|I|}$. При этом считается, что элемент α^0 непосредственно следует за нулем 0, а единица 1 непосредственно следует за α^1 . Получается квазибулева решетка L .

Каждому элементу α из A сопоставим отображение $\nu_\alpha: Z_2 \rightarrow L$ следующим образом: $\nu_e = (0, 1)$, $\nu_{\alpha_i} = (a, \alpha_i)$, $i \in I$ (функция $\nu: Z_2 \rightarrow L$ записывается в виде вектора $(\nu(e), \nu(z))$). Очевидно, что соответствие $\alpha \mapsto \nu_\alpha$ взаимно однозначно отображает A в $Z_2[L]$. При этом $\nu_\alpha \nu_e = \nu_\alpha$ для любого $\alpha \in A$ и выполнены соотношения

$$\begin{aligned}
(\nu_{\alpha_i} \nu_{\alpha_j})(e) &= \bigvee_{e=xy} (\nu_{\alpha_i}(x) \wedge \nu_{\alpha_j}(y)) = (\nu_{\alpha_i}(e) \wedge \nu_{\alpha_j}(e)) \vee (\nu_{\alpha_i}(z) \wedge \nu_{\alpha_j}(z)) \\
&= (a \wedge a) \vee (\alpha_i^0 \wedge \alpha_j^0) = a \vee \alpha^0 = 1, \\
(\nu_{\alpha_i} \nu_{\alpha_j})(z) &= (\nu_{\alpha_i}(e) \wedge \nu_{\alpha_j}(z)) \vee (\nu_{\alpha_i}(z) \wedge \nu_{\alpha_j}(e)) = (a \wedge \alpha_j) \vee (\alpha_i \wedge a) = 0,
\end{aligned}$$

т.е. $\nu_{\alpha_i} \nu_{\alpha_j} = \nu_e = \nu_{\alpha_i \alpha_j}$.

Таким образом, любая ассоциация A с $A/\theta \cong Z_2$ вкладывается в квазибулеву степень группы Z_2 .

2. Пусть $G = A/\theta \not\cong Z_2$. Элементарная 2-группа G является прямым произведением циклических групп G_k , $k \in K$, каждая из которых изоморфна Z_2 [4, теорема 8.5]. Элементы группы G можно считать функциями $f: K \rightarrow Z_2$, для которых множества $\text{supp } f := \{k \in K \mid f(k) \neq e\}$ конечны. Группа G вкладывается в группу характеров $\text{Hom}(G, Z_2)$. Если $\chi_f: G \rightarrow Z_2$ – характер, соответствующий элементу $f \in G$, то $\nu_f = \chi_f^{-1}$ отображает Z_2 в булеву алгебру $L^* = P(G)$ всех подмножеств множества G .

Понятно, что $\chi_f^{-1}(e) \cap \chi_f^{-1}(z) = \emptyset$ и $\chi_f^{-1}(e) \cup \chi_f^{-1}(z) = G$, так что $\nu_f \in Z_2[L^*]$. Несложные выкладки показывают, что $(\nu_f \nu_g)(e) = (\nu_f(e) \cap \nu_g(e)) \cup (\nu_f(z) \cap \nu_g(z)) = \nu_{fg}(e)$ и $(\nu_f \nu_g)(z) = (\nu_f(e) \cap \nu_g(z)) \cup (\nu_f(z) \cap \nu_g(e)) = \nu_{fg}(z)$ и, значит, соответствие $f \mapsto \nu_f$ является вложением группы $G = A/\theta$ в булеву степень $Z_2[L^*]$, где $L^* = P(G)$.

Трансформацией этого представления и получается вложение группоида A в группоид $Z_2[L]$, где L – квазибулева решетка, получающаяся из L^* с помощью описываемых ниже конструкций.

Под идеалами упорядоченного множества понимаются его минорантно насыщенные подмножества.

Пусть $\alpha \in A$. Через $L(\alpha)$ обозначим решетку $\text{Id}(\theta(\alpha))$ всех идеалов (включая пустой) упорядоченного множества $(\theta(\alpha), \leq)$, где $\leq$ – стабильный порядок на A , существование которого постулируется в II). В булевой алгебре $L^* = P(G)$ каждый элемент вида $\chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(x)$, $x \in Z_2$, заменим решеткой $L(\alpha)$, обозначая ее в этой ситуации через $L(\alpha, x)$. Каждый элемент l , лежащий в L^* ниже элемента вида $\chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(x)$, $x \in Z_2$, и отличный от $\emptyset$, заменим решеткой $P(\bar{\theta})$ всех подмножеств отношения $\bar{\theta} = (A \times A) - \theta$, обозначая ее в этой ситуации через $L(l)$.

Теперь определим порядок в множестве L , полученном из L^* в результате всех указанных замен. Сохраняя все порядковые связи, имеющиеся в решетках вида $L(\alpha, x)$ и $L(l)$, зададим следующие соотношения:

- а) наименьший элемент 0 решетки L^* (т.е. $\emptyset$) остается наименьшим элементом в L ;
- б) если $\chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(x) < l$ в L^* , то в L каждый элемент подрешетки $L(\alpha, x)$ считается меньше l ;
- в) если $0 < l_1 < l_2 < \chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(x)$ в L^* для некоторых α и x , то каждый элемент подрешетки $L(l_1)$ считается меньшим одноименного элемента подрешетки $L(l_2)$;
- г) если $0 < l < \chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(x)$ в L^* для некоторых α и x , то наибольшим минорантом элемента $J \in L(\alpha, x)$ в подрешетке $L(l)$ считается отношение

$$\rho(J) = \bigcup_{\beta \in J} \{(\gamma, \delta) \in \bar{\theta} \mid \beta \in \langle \gamma, \delta \rangle \uparrow\},$$

где $\langle \gamma, \delta \rangle$ – подгруппоид в A , порожденный элементами γ, δ ;

- д) если $0 < l < \chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(x)$ в L^* для некоторых α и x , то наименьшим мажорантом элемента $\rho \in P(\bar{\theta})$ в подрешетке $L(\alpha, x)$ считается идеал $J(\rho) = \bigcup_{(\gamma, \delta) \in \rho} J(\gamma, \delta)$, где $J(\gamma, \delta) = \downarrow \text{least}(\langle \gamma, \delta \rangle \cap \theta(\alpha))$, если этот наименьший элемент существует (стрелки $\downarrow$ и $\uparrow$ обозначают соответственно минорантное и мажорантное насыщение);
- е) для l_1, l_2 , лежащих в L^* выше элемента вида $\chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(x)$, в L сохраняется упорядоченность, связывающая их в L^* .

Транзитивное замыкание построенного отношения, состоящего из объединения порядков в решетках вида $L(\alpha, x)$ и $L(l)$ и неравенств, заданных в а)–е), упорядочивает множество L .

Покажем, что множество L с введенным порядком – решетка. Здесь нужно рассмотреть два случая.

1. Пусть $J_1, J_2 \in L(\alpha, x)$. В $L(\alpha, x)$ наибольшей нижней гранью для $\{J_1, J_2\}$ будет $J_1 \cap J_2$. Но у этих идеалов есть общие нижние грани и в каждой подрешетке вида $L(l)$, где $l < \chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(x)$ в L^* . Пусть $\chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(x)$ является покрытием для l в L^* . Наибольшей

нижней гранью для $\{J_1, J_2\}$ в $L(l)$ будет пересечение отношений

$$\rho(J_i) = \bigcup_{\beta \in J_i} \{(\gamma, \delta) \in \bar{\theta} \mid \beta \in \langle \gamma, \delta \rangle \uparrow\}, \quad i = 1, 2.$$

Пусть $(\gamma, \delta) \in \rho(J_1) \cap \rho(J_2)$. Если в $\langle \gamma, \delta \rangle \cap \theta(\alpha)$ нет наименьшего элемента, то $J(\gamma, \delta) = \emptyset$ и, значит, $J(\gamma, \delta) \subseteq J_1 \cap J_2$. Пусть $\alpha_0 = \text{least}(\langle \gamma, \delta \rangle \cap \theta(\alpha))$. Так как $(\gamma, \delta) \in \rho(J_1)$, то существует элемент $\alpha_1 \in J_1$ такой, что $\alpha_1 \in \langle \gamma, \delta \rangle \uparrow \cap \theta(\alpha)$. Аналогично в J_2 имеется элемент $\alpha_2 \in \langle \gamma, \delta \rangle \uparrow \cap \theta(\alpha)$. Но тогда $\alpha_0 \leq \alpha_1$ и $\alpha_0 \leq \alpha_2$ и, следовательно, $J(\gamma, \delta) = \downarrow \text{least}(\langle \gamma, \delta \rangle \cap \theta(\alpha)) \subseteq J_1 \cap J_2$. Таким образом, $J(\gamma, \delta) \subseteq J_1 \cap J_2$ для любой пары (γ, δ) из $\rho(J_1) \cap \rho(J_2)$. Отсюда $\rho(J_1) \cap \rho(J_2) \subseteq J_1 \cap J_2$ в L , так что $\inf_L \{J_1, J_2\} = J_1 \cap J_2$.

2. Пусть $\rho_1, \rho_2 \in L(l)$. В $L(l)$ наименьшей верхней гранью для $\{\rho_1, \rho_2\}$ будет $\rho_1 \cup \rho_2$. Но у этих множеств (т.е. отношений, содержащихся в $\bar{\theta}$) есть общие верхние грани и в каждой подрешетке вида $L(\alpha, x)$, где $l < \chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(x)$ в L^* . Пусть $\chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(x)$ является покрытием для l в L^* . Наименьшей верхней гранью для $\{\rho_1, \rho_2\}$ в $L(\alpha, x)$ будет объединение идеалов $J(\rho_i) = \bigcup_{(\gamma, \delta) \in \rho_i} J(\gamma, \delta)$, $i = 1, 2$. Пусть $(\gamma, \delta) \in \rho_1 \cup \rho_2$. Если $(\gamma, \delta) \in \rho_i$, то, очевидно, $J(\gamma, \delta) \subseteq J(\rho_i)$, $i \in \{1, 2\}$, откуда $\rho_1 \cup \rho_2 \subseteq J(\rho_1) \cup J(\rho_2)$, так что $\sup_L \{\rho_1, \rho_2\} = \rho_1 \cup \rho_2$.

Мы получили, что L – решетка. Очевидно, что она будет полной. Если в L отождествить элементы каждой подрешетки вида $L(\alpha, x)$ и отождествить элементы каждой подрешетки вида $L(l)$, получится канонический $\wedge$ -гомоморфизм решетки L на булеву решетку $L^* = P(G)$. Следовательно, L – квазибулева решетка.

Для дальнейшего потребуются

ЛЕММА 2. *Имеет место соотношение $\gamma\delta = \text{least}(\langle \gamma, \delta \rangle \cap \theta(\gamma\delta))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно доказать, что $\gamma\delta$ является наименьшим среди элементов подгруппоида $\langle \gamma, \delta \rangle$, входящих в θ -класс, содержащий $\gamma\delta$.

Доказательство ведется индукцией по длине слов в алфавите $\{\gamma, \delta\}$, выражающих элементы 2-порожденного подгруппоида $\langle \gamma, \delta \rangle$. Запись $[\alpha]$ означает “слово из $\theta(\alpha)$ ”. Заметив, что в элементарной 2-группе любые два неединичных элемента порождают четверную группу, и предположив, что $\gamma\delta \leq [\gamma\delta]$ для всех слов из $\langle \gamma, \delta \rangle$ длины меньше, чем длина данного слова, получаем

$$\begin{aligned} [\gamma\delta] &= [\gamma][\delta] = ([\gamma\delta][\delta])([\gamma\delta][\gamma]) \geq ((\gamma\delta)[\delta])((\gamma\delta)[\gamma]) \\ &= ((\gamma\delta)([\gamma\delta][\gamma]))((\gamma\delta)([\gamma\delta][\delta])) \geq ((\gamma\delta)((\gamma\delta)[\gamma]))((\gamma\delta)((\gamma\delta)[\delta])) \\ &= ((\gamma\delta)((\gamma\delta)([\gamma\delta][\delta])))((\gamma\delta)((\gamma\delta)([\gamma\delta][\gamma]))) \\ &\geq ((\gamma\delta)((\gamma\delta)((\gamma\delta)[\delta])))((\gamma\delta)((\gamma\delta)((\gamma\delta)[\gamma]))) \end{aligned}$$

(в предыдущих неравенствах использовались предположение индукции и стабильность порядка $\leq$, теперь ссылаемся на неравенство 1) из аксиомы II), а затем снова пойдет цепочка неравенств, продолжающих предыдущую и вытекающих из предположения индукции и стабильности порядка $\leq$, и т.д.)

$$\geq ((\gamma\delta)[\delta])((\gamma\delta)[\gamma]) \geq \dots$$

Возможными вариантами окончания этой цепочки могут быть только следующие: $(\gamma(\gamma\delta))((\gamma\delta)\delta)$, $((\gamma\delta)\delta)(\gamma\delta(\gamma\delta\delta))$, $((\gamma\delta)(\gamma(\gamma\delta)))((\gamma\delta)((\gamma\delta)\delta))$.

Согласно неравенствам 2)–4) из аксиомы II) каждое из этих слов больше, чем $\gamma\delta$. Соответствующие неравенства, кроме того, обеспечивают и базис индукции. Лемма доказана.

Покажем теперь, что группоид A вкладывается в квазибулеву степень $Z_2[L]$. Для большей наглядности элементы подрешеток вида $L(\alpha, x)$ будем записывать в виде пар $(J, \chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(x))$.

Определим отображение $\varphi: A \rightarrow Z_2[L]$, $\alpha \mapsto \nu_\alpha$, полагая $\nu_\alpha(x) = (\alpha \downarrow, \chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(x))$, $x \in Z_2$, при $\alpha \neq e$ и $\nu_e = (1, 0)$ (здесь $1 = G, 0 = \emptyset$). Поскольку $\chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(e) \cap \chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(z) = \emptyset$ и $\chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(e) \cup \chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(z) = G$, то $\nu_\alpha(e) \wedge \nu_\alpha(z) = 0$ и $\nu_\alpha(e) \vee \nu_\alpha(z) = 1$, откуда $\nu_\alpha \in Z_2[L]$.

Если $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, то $\theta(\alpha) = \theta(\beta)$ и $\alpha \downarrow = \beta \downarrow$, что влечет равенство $\alpha = \beta$. Таким образом, φ инъективно.

Нужно доказать, что φ – гомоморфизм, т.е. что $\nu_\alpha \nu_\beta = \nu_{\alpha\beta}$ для любых $\alpha, \beta \in A$.

Случай 1. $(\alpha, \beta) \in \theta$, т.е. $\theta(\alpha) = \theta(\beta)$. Получаем

$$\begin{aligned}(\nu_\alpha \nu_\beta)(e) &= (\nu_\alpha(e) \wedge \nu_\beta(e)) \vee (\nu_\alpha(z) \wedge \nu_\beta(z)) \\&= (\alpha \downarrow \cap \beta \downarrow, \chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(e)) \vee (\alpha \downarrow \cap \beta \downarrow, \chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(z)) = 1, \\(\nu_\alpha \nu_\beta)(e) &= (\nu_\alpha(e) \wedge \nu_\beta(z)) \vee (\nu_\alpha(z) \wedge \nu_\beta(e)) = 0,\end{aligned}$$

откуда $\nu_\alpha \nu_\beta = \nu_e = \nu_{\alpha\beta}$, так как $\theta(\alpha\beta) = \theta(\alpha)\theta(\beta) = (\theta(\alpha))^2 = \{e\}$, поскольку $G = A/\theta$ является 2-группой.

Случай 2. $(\alpha, \beta) \notin \theta$. Имеем

$$\begin{aligned}(\nu_\alpha \nu_\beta)(e) &= (\nu_\alpha(e) \wedge \nu_\beta(e)) \vee (\nu_\alpha(z) \wedge \nu_\beta(z)) \\&= ((\alpha \downarrow, \chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(e)) \wedge (\beta \downarrow, \chi_{\theta(\beta)}^{-1}(e))) \vee ((\alpha \downarrow, \chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(z)) \wedge (\beta \downarrow, \chi_{\theta(\beta)}^{-1}(z))).\end{aligned}$$

При описанном выше вложении группы G в булеву степень $Z_2[L]$ выполняется равенство $(\chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(e) \cap \chi_{\theta(\beta)}^{-1}(e)) \cup (\chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(z) \cap \chi_{\theta(\beta)}^{-1}(z)) = \chi_{\theta(\alpha\beta)}^{-1}(e)$. Следовательно, $(\nu_\alpha \nu_\beta)(e)$ является в L элементом подрешетки $L(\alpha\beta, e)$. Далее, так как $\alpha \in \langle \alpha, \beta \rangle \uparrow$ и $\beta \in \langle \alpha, \beta \rangle \uparrow$, то пара (α, β) является общим минорантом для $(\alpha \downarrow, \chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(e))$ и $(\beta \downarrow, \chi_{\theta(\beta)}^{-1}(e))$ в подрешетке $L(\chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(e) \cap \chi_{\theta(\beta)}^{-1}(e))$. Из леммы 2 следует, что наименьшим из элементов подрешетки $L(\alpha\beta, e)$, мажорирующих элемент $\{(\alpha, \beta)\}$ из $L(\chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(e) \cap \chi_{\theta(\beta)}^{-1}(e))$, является главный главный идеал $(\alpha\beta) \downarrow$. Отсюда $(\nu_\alpha \nu_\beta)(e) = ((\alpha\beta) \downarrow, \chi_{\theta(\alpha\beta)}^{-1}(e)) = \nu_{\alpha\beta}(e)$.

Аналогично $(\nu_\alpha \nu_\beta)(z) = \nu_{\alpha\beta}(z)$.

Этим завершается доказательство теоремы.

Очевидно, что пересечение класса группоидов, описанного в теореме, с многообразием всех полугрупп совпадает с многообразием элементарных 2-групп.

Заметим еще, что упомянутое в [1] описание группоидов, вложимых в квазибулевы степени полурешеток, опубликовано в [5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Салий В. Н. Квазибулевы степени элементарных абелевых p -групп // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 2. С. 264–274.
- [2] Salii V. N. Quasi-boolean lattices and associations // Colloq. Math. Soc. János Bolyai. Lectures in Univ. Algebra. Szeged (Hungary), 1983. V. 43. Amsterdam: North-Holland, 1986. P. 429–454.
- [3] Скорняков Л. А. Общая алгебра. Т. 2. М.: Наука, 1991.
- [4] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. М.: Мир, 1974.
- [5] Салий В. Н. Квазибулевы степени полурешеток // Изв. вузов. Матем. 1999. № 7. С. 54–60.