Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Смирнов, Условия вырождения A_∞ -структур, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 6, 906–911

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm704>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 13:37:45

УДК 513.83

УСЛОВИЯ ВЫРОЖДЕНИЯ A_∞ -СТРУКТУР

В. А. Смирнов

В работе найдены условия, при которых A_∞ -структура на гомологиях дифференциальной алгебры вырождается. Рассматриваются примеры таких алгебр. В частности, показывается, что структура A_∞ -алгебры на коалгебре Милнора вырождается, и если когомологии топологического пространства являются алгеброй многочленов, то структура A_∞ -алгебры на них вырождается.

Библиография: 5 названий.

A_∞ -структуры были определены Стасеффым [1] и играют важную роль во многих вопросах теории гомологий, теории гомотопий и др.

Здесь мы рассмотрим вопрос о том, в каком случае A_∞ -структура на гомологиях дифференциальной алгебры вырождается, т.е. все высшие операции тривиальны. Важность этого вопроса для нас обусловлена тем, что он связан с вычислениями высших дифференциалов различных спектральных последовательностей и, в том числе, спектральной последовательности Адамса гомотопических групп сфер.

Для простоты будем рассматривать случай, когда основное кольцо является полем $\mathbb{Z}/2$. Напомним, что цепной комплекс A называется A_∞ -алгеброй, если заданы операции

$$\pi_n: A^{\otimes n+2} \rightarrow A, \quad n \geq 0,$$

повышающие размерность на n и удовлетворяющие соотношениям

$$d(\pi_{n+1}) = \sum_{i=0}^n \pi_i(1 \otimes \cdots \otimes \pi_{n-i} \otimes \cdots \otimes 1),$$

где сумма берется также по всем местам, на которых может стоять π_{n-i} .

В частности, градуированный модуль A_* является A_∞ -алгеброй, если заданы операции

$$\pi_n: A_*^{\otimes n+2} \rightarrow A_*, \quad n \geq 0,$$

повышающие размерность на n и удовлетворяющие соотношениям

$$\sum_{i=0}^n \pi_i(1 \otimes \cdots \otimes \pi_{n-i} \otimes \cdots \otimes 1) = 0.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00114.

Если $A', A'' - A_\infty$ -алгебры, то A_∞ -отображением из A' в A'' называется семейство отображений

$$f_n: A'^{\otimes n+1} \rightarrow A'', \quad n \geq 0,$$

повышающих размерность на n и удовлетворяющих соотношениям

$$d(f_{n+1}) = \sum_{i=0}^n f_i(1 \otimes \cdots \otimes \pi'_{n-i} \otimes \cdots \otimes 1) - \sum_{n_1 + \cdots + n_{i+2} = n-i} \pi''_i(f_{n_1} \otimes \cdots \otimes f_{n_{i+2}}).$$

Две A_∞ -структуры $\{\pi'_n\}$ и $\{\pi''_n\}$ называются *эквивалентными*, если существует A_∞ -отображение $f: (A, \pi') \rightarrow (A, \pi'')$, для которого $f_0 = \text{Id}: A \rightarrow A$.

A_∞ -структуры, эквивалентные структуре обычной алгебры, будем называть *вырожденными*.

Структура A_∞ -алгебры естественным образом возникает на гомологиях A_* дифференциальной алгебры A . Причем имеет место A_∞ -отображение из A_* в A , являющееся цепной эквивалентностью [2].

Легко видеть, что если A_* является тензорной алгеброй TX , порожденной градуированным модулем X , то структура A_∞ -алгебры на A_* вырождается. Действительно, в этом случае имеет место отображение алгебр $\xi: A_* \rightarrow A$, задаваемое формулой

$$\xi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \xi(x_1) \cdots \xi(x_n),$$

где $x_i \in X$, $\xi(x_i)$ — представители элементов x_i . Ясно, что это отображение индуцирует изоморфизм гомологий и, следовательно, является цепной эквивалентностью.

Рассмотрим случай, когда A_* является алгеброй многочленов PX , порожденной градуированным модулем X .

Если алгебра A коммутативна, то структура A_∞ -алгебры на $A_* = PX$ вырождается. Соответствующее отображение алгебр $\xi: A_* \rightarrow A$ задается формулой

$$\xi(x_1 \cdots x_n) = \xi(x_1) \cdots \xi(x_n).$$

В случае некоммутативной алгебры A структура A_∞ -алгебры на A_* может быть невырожденной. Действительно, как показано в работе [3], на алгебре многочленов P с числом образующих $n \geq 3$ существуют невырожденные A_∞ -структуры. В случае $n = 3$ они находятся в биективном соответствии с модулем когомологий Хохшильда $H^3(P; P) \cong P$.

Таким образом, нетривиальные элементы $y \in P$ порождают невырожденные A_∞ -структуры. Соответствующую A_∞ -алгебру обозначим $\tilde{P}$.

В качестве алгебры A возьмем ко- B -конструкцию над B -конструкцией над $\tilde{P}$, т.е. $A = FB\tilde{P}$. Тогда A является дифференциальной алгеброй, гомологии которой изоморфны $\tilde{P}$, т.е. является искомой.

Для выяснения ответа на вопрос о том, какие дополнительные условия требуется наложить на дифференциальную алгебру A , чтобы структура A_∞ -алгебры на A_* была вырожденной, введем понятие гомотопически тривиальной алгебры Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Алгебру Ли L с умножением $\mu: L \otimes L \rightarrow L$ будем называть *гомотопически тривиальной*, если заданы отображения

$$\mu_n: L^{\otimes n+1} \rightarrow L,$$

повышающие размерность на n и удовлетворяющие соотношениям

$$d(\mu_{n+1})(x_0 \otimes \cdots \otimes x_{n+1}) = \sum_{p+q=n} \mu(\mu_p(x_{i_0} \otimes \cdots \otimes x_{i_p}) \otimes \mu_q(x_{j_0} \otimes \cdots \otimes x_{j_q})),$$

где $\mu_0(x) = x$ и сумма берется по всем перетасовкам $I = \{i_0, \dots, i_p\}$, $J = \{j_0, \dots, j_q\}$ набора чисел $0, \dots, n+1$, для которых $I < J$.

Ясно, что алгебра Ли с тривиальным умножением μ является и гомотопически тривиальной. Рассмотрим другие примеры гомотопически тривиальных алгебр Ли.

Пусть A – дифференциальная алгебра. Она может быть превращена в алгебру Ли введением нового умножения $\mu: A \otimes A \rightarrow A$ по формуле

$$\mu(x \otimes y) = x \cdot y - y \cdot x.$$

Предположим, что в алгебре A имеется $\cup_1$ -произведение $\cup_1: A \otimes A \rightarrow A$, удовлетворяющее соотношениям

$$\begin{aligned} d(x \cup_1 y) &= d(x) \cup_1 y + x \cup_1 d(y) + x \cdot y - y \cdot x, \\ x \cup_1 (y_1 \cdot y_2) &= (x \cup_1 y_1) \cdot y_2 + y_1 \cdot (x \cup_1 y_2). \end{aligned}$$

Покажем, что в этом случае соответствующая алгебра Ли будет гомотопически тривиальной.

Определим отображения $\mu_n: A^{\otimes n+1} \rightarrow A$, положив

$$\mu_n(x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_{n+1}) = x_1 \cup_1 (x_2 \cup_1 (\dots \cup_1 x_{n+1}) \dots).$$

Непосредственные вычисления показывают, что выполняются требуемые соотношения.

Вместо выполнимости соотношения дистрибутивности для операции $\cup_1$ в алгебре A можно требовать выполнимость гомотопической дистрибутивности. А именно, пусть кроме операции $\cup_1$ в алгебре A заданы операции

$$\varphi_n: A^{\otimes n+1} \rightarrow A, \quad n \geq 1, \quad \varphi_1 = \cup_1,$$

удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{aligned} d(\varphi_{n+1})(x \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) &= y_1 \cdot \varphi_n(x \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_n) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \varphi(x \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_i \cdot y_{i+1} \otimes \cdots \otimes y_n) \\ &+ \varphi_n(x \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_{n-1}) \cdot y_n. \end{aligned}$$

Тогда на A можно также определить структуру гомотопически тривиальной алгебры Ли, положив

$$\begin{aligned}\mu_n(x_0 \otimes \cdots \otimes x_n) &= x_0 \cup_1 (x_1 \cup_1 (\dots (x_{n-1} \cup_1 x_n) \dots)) \\ &\quad + x_0 \cup_1 (\dots \cup_1 \varphi_2(x_{n-2} \otimes (x_{n-1} \otimes x_n - x_n \otimes x_{n-1})) \dots) + \cdots \\ &\quad + \sum \varphi_n(x_0 \otimes x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_n}),\end{aligned}$$

где последняя сумма берется по всем перестановкам чисел $1, \dots, n$.

Непосредственные вычисления показывают, что выполняются требуемые соотношения.

Из сказанного следует, что пример гомотопически тривиальной алгебры Ли дает коцепной комплекс $C^*(X)$ топологического пространства X . Действительно, $C^*(X)$ является E_∞ -алгеброй [4] и, следовательно, структура алгебры Ли на $C^*(X)$ будет гомотопически тривиальной.

Другой пример гомотопически тривиальной алгебры Ли дает ко- B -конструкция FK над алгеброй Хопфа K . Действительно, в этом случае на FK определено дистрибутивное $\cup_1$ -произведение, которое на образующих задается формулой

$$[x] \cup_1 [y] = [x \cdot y].$$

Поэтому структура алгебры Ли на FK будет гомотопически тривиальной.

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – дифференциальная алгебра, для которой структура алгебры Ли гомотопически тривиальна и гомологии $A_* = H_*(A)$ являются алгеброй многочленов. Тогда структура A_∞ -алгебры на A_* вырождается.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A_* = PX$. Упорядочим каким-либо образом образующие $x \in X$ и обозначим через $\xi(x) \in A$ их представители. Определим отображение $\xi: A_* \rightarrow A$, положив

$$\xi(x_{i_1} \cdots x_{i_n}) = \xi(x_{i_1}) \cdots \xi(x_{i_n}), \quad i_1 \leq \cdots \leq i_n.$$

Конечно, если алгебра A не является коммутативной, то это отображение не является отображением алгебр. Нашей задачей является построить отображение ξ до A_∞ -отображения.

Определим отображение $\xi_n: A_*^{\otimes n+1} \rightarrow A$, положив на образующих

$$\xi_n(x_{i_0} \otimes \cdots \otimes x_{i_n}) = \begin{cases} \mu_n(\xi(x_{i_0}) \otimes \cdots \otimes \xi(x_{i_n})), & i_0 > \cdots > i_n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для элементов $u_0, \dots, u_n \in A_*$, для которых выполняется одно из неравенств $u_0 \leq u_1, \dots, u_{n-1} \leq u_n$, положим

$$\xi_n(u_0 \otimes u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) = 0.$$

Покажем, что на остальных элементах отображения ξ_n однозначно определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}d(\xi_{n+1})(u_0 \otimes \cdots \otimes u_{n+1}) &= \sum_{i=0}^n \xi_n(u_0 \otimes \cdots \otimes u_i \cdot u_{i+1} \otimes \cdots \otimes u_{n+1}) \\ &\quad - \sum_{i=0}^n \xi_i(u_0 \otimes \cdots \otimes u_i) \cdot \xi_{n-i}(u_{i+1} \otimes \cdots \otimes u_{n+1}),\end{aligned}$$

означающими, что семейство $\{\xi_n\}$ является A_∞ -отображением из A_* в A .

Определение значений $\xi_n(u_0 \otimes \cdots \otimes u_n)$ является индуктивным по общему числу сомножителей, входящих в $u_0, \dots, u_n$.

Обозначим через x наименьшую образующую, входящую в один из элементов $u_0, \dots, u_n$. Предположим, что x входит в первый элемент u_0 . Если $x = u_0$, то из того, что $x \leq u_1$, следует равенство

$$\xi_n(x \otimes \cdots \otimes u_n) = 0.$$

Если же $u_0 = x \cdot u'_0$, то из приведенных соотношений следует равенство

$$\xi_n(u_0 \otimes \cdots \otimes u_n) = \xi(x)\xi_n(u'_0 \otimes \cdots \otimes u_n),$$

где в правой части стоит значение ξ_n на элементе меньшей фильтрации.

Аналогично, если x входит в u_k , т.е. $u_k = x \cdot u'_k$, то имеем равенство

$$\begin{aligned} \xi_n(u_0 \otimes \cdots \otimes x \cdot u'_k \otimes \cdots \otimes u_n) &= \xi_n(u_0 \otimes \cdots \otimes x \cdot u_{k-1} \otimes u'_k \otimes \cdots \otimes u_n) \\ &\quad + \xi_k(u_0 \otimes \cdots \otimes u_{k-1} \otimes x) \cdot \xi_{n-k}(u'_k \otimes \cdots \otimes u_n). \end{aligned}$$

Таким образом, значение ξ_n в этом случае определяется значением на элементе, в котором x стоит ближе к началу, и значениями на элементах меньшей фильтрации.

Повторяя этот процесс, приходим к значению ξ_n на элементе, в котором x стоит на первом месте, и значениям ξ_k на элементах меньшей фильтрации.

Остается один случай, когда $x = u_n$ и элементы $u_0, \dots, u_{n-1}$ не содержат x . В этом случае следует рассмотреть наименьшую из оставшихся в $u_0, \dots, u_{n-1}$ образующих и повторить описанный выше процесс. В результате получим, что значения ξ_n определяются через заданные значения и значения на элементах меньшей фильтрации.

Например, из приведенных соотношений следует, что для отображения ξ_1 имеют место формулы

$$\begin{aligned} \xi_1(x_{i_1} \cdots x_{i_n} \otimes x_{j_1} \cdots x_{j_m}) \\ = \sum_{k,l} \xi(x_{i_1} \cdots x_{i_{k-1}} x_{j_1} \cdots x_{j_{l-1}}) \xi_1(x_{i_k} \otimes x_{j_l}) \xi(x_{i_{k+1}}) \cdots \xi(x_{i_n}) \xi(x_{j_{l+1}}) \cdots \xi(x_{j_m}). \end{aligned}$$

В качестве следствия из доказанной теоремы получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Если когомологии $H^*(X)$ топологического пространства X являются алгеброй многочленов, то структура A_∞ -алгебры на $H^*(X)$ вырождается.

Рассмотрим внешнюю алгебру ΛX , порожденную градуированным модулем X . Определим на ней структуру алгебры Хопфа, задав коумножение

$$\nabla: \Lambda X \rightarrow \Lambda X \otimes \Lambda X$$

и положив на образующих

$$\nabla(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1, \quad x \in X.$$

Известно, что гомологии ко- B -конструкции $F\Lambda X$ являются алгеброй многочленов $PS^{-1}X$, где $S^{-1}X$ – денадстрейка над X . Поэтому имеет место

СЛЕДСТВИЕ 2. Гомологии ко- B -конструкции $F\Lambda X$ внешней алгебры ΛX имеют вырожденную структуру A_∞ -алгебры.

Обратимся теперь к коалгебре Милнора $\mathcal{K}$, двойственной к алгебре Стиррода [5]. Она является алгеброй многочленов от образующих ξ_i размерности $2^i - 1$. Коумножение $\nabla: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K} \otimes \mathcal{K}$ на образующих задается формулой

$$\nabla(\xi_i) = \sum_k \xi_{i-k}^{2^k} \otimes \xi_k.$$

На остальных элементах коумножение ∇ определяется соотношениями Хопфа.

Коалгебра Милнора играет существенную роль в вычислениях гомотопических групп топологических пространств. Так, член E^2 спектральной последовательности Адамса стабильных гомотопических групп сфер представляет собой гомологии ко- B -конструкции $F\mathcal{K}$ над коалгеброй Милнора $\mathcal{K}$ [5].

Поскольку коалгебра Милнора получается взятием когомологий E_∞ -операды, то получим

СЛЕДСТВИЕ 3. Структура A_∞ -алгебры на коалгебре Милнора $\mathcal{K}$ вырождается.

Двойственным образом определяется понятие гомотопически тривиальной коалгебры Ли и устанавливаются условия вырождения структуры A_∞ -коалгебры. А именно, показывается, что имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1'. Пусть K – дифференциальная коалгебра, для которой структура коалгебры Ли гомотопически тривиальна и гомологии $K_* = H_*(K)$ являются свободной коммутативной коалгеброй. Тогда A_∞ -структура на K_* вырождается.

СЛЕДСТВИЕ 1'. Если гомологии $H_*(X)$ топологического пространства X являются свободной коммутативной коалгеброй, то структура A_∞ -коалгебры на $H_*(X)$ вырождается.

СЛЕДСТВИЕ 2'. Гомологии B -конструкции $B\Lambda X$ внешней алгебры ΛX имеют вырожденную структуру A_∞ -коалгебры.

СЛЕДСТВИЕ 3'. Структура A_∞ -коалгебры на алгебре Стиррода вырождается.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Stasheff J. D. Homotopy associativity of H -spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 108. № 2. P. 275–312.
- [2] Кадеишвили Т. В. К теории гомологий расслоенных пространств // УМН. 1980. Т. 35. № 3. С. 183–188.
- [3] Смирнов В. А. A_∞ -структуры и функтор $\mathcal{D}$ // Изв. РАН. Сер. матем. (в печати).
- [4] Смирнов В. А. О коцепном комплексе топологического пространства // Матем. сб. 1981. Т. 115. № 1. С. 146–158.
- [5] Adams J. F. On the structure and applications of the Steenrod algebra // Comm. Math. Helv. 1958. V. 32. P. 180–214.