Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Созутов, О группах с конечной инволюцией и локально конечной 2-изолированной подгруппой четного периода, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 6, 912–918

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm705>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 18:15:57

УДК 512.544

О ГРУППАХ С КОНЕЧНОЙ ИНВОЛЮЦИЕЙ И ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНОЙ 2-ИЗОЛИРОВАННОЙ ПОДГРУППОЙ ЧЕТНОГО ПЕРИОДА

А. И. Созутов

Собственная подгруппа H группы G называется *сильно изолированной*, если она содержит централизатор каждого своего неединичного элемента, и *2-изолированной*, если из условий $C_G(g) \cap H \neq 1$ и $2 \in \pi(C_G(g))$ следует $C_G(g) \leq H$. Инволюция i группы G называется *конечной*, если $|ii^g| < \infty$ ($\forall g \in G$). В работе исследуется группа G с конечной инволюцией i и 2-изолированной локально конечной подгруппой H , содержащей инволюцию. Установлено, что выполняется хотя бы одно из следующих утверждений:

- 1) все 2-элементы группы G содержатся в H ;
- 2) (G, H) – пара Фробениуса, H совпадает с централизатором своей единственной инволюции и все инволюции в G сопряжены;
- 3) $G = F \rtimes C_G(i)$ – локально конечная группа Фробениуса с абелевым ядром F ;
- 4) $H = V \rtimes D$ – группа Фробениуса с локально циклическим инвариантным множителем D и сильно изолированным ядром V , $U = O_2(V)$ – силовская 2-подгруппа группы G и $G - Z$ -группа подстановок множества $\Omega = \{U^g \mid g \in G\}$.

Библиография: 13 названий.

Собственная подгруппа H группы G называется *сильно изолированной*, если она содержит централизатор каждого своего неединичного элемента, т.е. для любого неединичного элемента $g \in G$ из условия $C_G(g) \cap H \neq 1$ следует $C_G(g) \leq H$, и *2-изолированной*, если это условие выполняется для $C_G(g)$, содержащих инволюции [1]. Инволюция i группы G называется *конечной*, если $|ii^g| < \infty$ ($\forall g \in G$) [2]. Группу G называем *группой четного периода* (*нечетного периода*), если она содержит инволюцию (не содержит инволюций). Собственная подгруппа H группы G называется *сильно вложенной*, если $2 \in \pi(H)$ и $2 \notin \pi(H \cap H^g)$ ($\forall g \in G \setminus H$) [3].

Конечные группы с сильно изолированными подгруппами изучены в 60-х годах [4]–[7]. Так М. Судзуки [5] и В.М.Бусаркин [6] показали, что конечная группа, содержащая сильно изолированную подгруппу четного порядка, является либо группой Фробениуса, либо ZT -группой, т.е. дважды транзитивной группой подстановок нечетной степени, в которой лишь единица оставляет на месте три различных точки. В [1] Бусаркин ввел понятие 2-изолированной подгруппы и доказал, что конечная группа G с 2-изолированной подгруппой H четного порядка, вне которой есть 2-элементы, имеет то же строение.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00542, и ККФН, грант № 9F132.

Цель данной заметки – доказательство бесконечного аналога теоремы Бусаркина [1]. Предварительно сделаем несколько замечаний. Как вытекает из теоремы Куроша [8], каждый множитель свободного произведения G неединичных групп H_i сильно изолирован в G . Следовательно, для содержательного результата необходимы дополнительные ограничения. Таковыми в теореме являются локальная конечность подгруппы H и существование конечной инволюции в G . Для бесконечных групп в общем случае результат Фробениуса неверен (см., например, [9], [10]), поэтому в формулировке теоремы добавилось утверждение 2). Насколько это обосновано, пока неизвестно (см. по этому поводу также вопросы 4.74, 10.64, 11.52, 12.48 из Коуровской тетради [11]). Поскольку для бесконечных групп понятие четности или нечетности степени группы подстановок не имеет смысла, изменена соответствующая часть теоремы (утверждение 4)). Кроме того, одно из условий теоремы из [1] оказалось удобнее сформулировать в качестве утверждения 1).

ТЕОРЕМА. Пусть группа G содержит 2-изолированную локально конечную подгруппу H четного периода и конечную инволюцию i . Тогда справедливо хотя бы одно из следующих утверждений:

- 1) все 2-элементы группы G содержатся в H ;
- 2) (G, H) – пара Фробениуса, H совпадает с централизатором своей единственной инволюции и все инволюции в G сопряжены;
- 3) $G = F \rtimes C_G(i)$ – локально конечная группа Фробениуса с абелевым ядром F ;
- 4) $H = V \rtimes D$ – группа Фробениуса с локально циклическим инвариантным множителем D и сильно изолированным ядром V , $U = O_2(V)$ – силовская 2-подгруппа группы G и G – Z -группа подстановок множества $\Omega = \{U^g \mid g \in G\}$.

1. Случай 2-ранга 1.

ЛЕММА 1 [1]. Справедливы следующие свойства:

- 1) пересечение любого множества 2-изолированных подгрупп в произвольной группе является 2-изолированной подгруппой;
- 2) подгруппа, сопряженная 2-изолированной подгруппе, 2-изолирована;
- 3) если A 2-изолирована в B , а B 2-изолирована в C , то A 2-изолирована в C ;
- 4) если 2-изолированная подгруппа H группы G имеет четный порядок, то H содержит каждую силовскую 2-подгруппу группы G , нетривиально пересекающуюся с H .

Далее предполагается, что группа G удовлетворяет условиям теоремы и не все инволюции из G содержатся в H .

ЛЕММА 2. Если в $G \setminus H$ есть инволюция, то все инволюции в G сопряжены. В частности, любая инволюция в G конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать сопряженность двух инволюций u и v , взятых из H и $G \setminus H$ соответственно. Предположим вначале, что хотя бы одна из этих инволюций конечна. Рассмотрим $K = \langle u, v \rangle$. Очевидно, подгруппа K конечна, не содержится в H и имеет с H нетривиальное пересечение. Поэтому $Z(K) = 1$ и K – группа

Фробениуса. Это влечет сопряженность u и v в K . Отсюда заключаем, что H содержит конечную инволюцию. Поэтому можно считать, что инволюция u конечна, а v – произвольная инволюция из $G \setminus H$. По доказанному выше u и v сопряжены. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть v – инволюция из $G \setminus H$ и i – инволюция из H . Тогда

- 1) $D = H \cap H^v$ – периодическая абелева группа и v инвертирует D ;
- 2) множества инволюций из i^H , элементов из D и инволюций правого смежного класса Hv равномощны; при этом если i – фиксированная инволюция из H , то каждой инволюции $k \in i^H$ (в том числе и инволюции i) соответствует единственная инволюция $j_k \in Hv$ такая, что $viv = j_k i j_k$;
- 3) подгруппа D сильно изолирована в H и $F = C_G(D)$ – периодическая абелева сильно изолированная в G подгруппа без инволюций;
- 4) в каждом смежном классе $C_H(i) \cdot b$, где $b \in H$, существует и при том единственный инвертируемый инволюцией v элемент; в частности, $H = D \cdot C_H(i)$;
- 5) если $D = 1$, то H совпадает с централизатором $C_G(i)$ некоторой инволюции i ;
- 6) подгруппа H совпадает с централизатором $C_G(i)$ некоторой инволюции i в том и только том случае, когда (G, H) – пара Фробениуса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Понятно, что $v \in N_G(D)$ и $C_D(v) = 1$. Ввиду леммы 2 инволюция v конечна. Но тогда для любого $h \in D$ имеем $|vv^h| < \infty$, $\langle v, v^h \rangle = \langle v, h \rangle$, причем $h^v = h^{-1}$, что и доказывает утверждение.

2) Пусть i, k, t – не обязательно различные инволюции из i^H , $V = \langle vkv, i \rangle$ и $W = \langle vkv, k \rangle$. Очевидно, что $v \in N_G(W)$, поэтому $vk v \notin H$, V – конечная группа Фробениуса и в V найдется инволюция j_k такая, что $j_k i j_k = vkv$. Поскольку инволюции i и k сопряжены в H , то $j_k \in Hv$. Аналогично определяется инволюция $j_t \in Hv$. Если $k \neq t$, то $vk v = j_k i j_k \neq vtv = j_t i j_t$ и $j_k \neq j_t$.

Пусть теперь j – произвольная инволюция из Hv , $v = hj$, где $h \in H$. Понятно, что $h = vj \in D$. Положим $k = h i h^{-1}$. Тогда $vk v = j i j$, $j \in \langle i, vkv \rangle$ и $j = j_k$. Таким образом, соответствие $k \leftrightarrow j_k$ биективно. Из доказанного также следует, что множество инволюций из Hv совпадает с множеством Dv и утверждение верно.

3) Покажем вначале, что для любого элемента $b \in D$ подгруппа $C_G(b)$ не содержит инволюций. Действительно, если $j \in C_G(b)$ – инволюция, то $C_G(b) \leq H$. Учитывая утверждение 1) леммы, имеем $v \in N_G(C_G(b))$ и $L \cap H$ – 2-изолированная подгруппа четного периода группы $L = C_G(B) \rtimes \langle v \rangle$. Но тогда ввиду леммы 2 инволюции v и j сопряжены в L ; получили противоречие.

Если бы централизатор некоторого элемента из $M = C_G(b)$ имел четный период, то этот централизатор как содержащий элемент b имел бы неединичное пересечение с 2-изолированной подгруппой D и поэтому содержался бы целиком в D (лемма 1). Это противоречит нечетности периода группы D . Значит, централизатор любого неединичного элемента из M не содержит инволюций. Но тогда по тем же соображениям, что и в доказательстве утверждения 1), M – абелева периодическая подгруппа, инвертируемая инволюцией v , $M = C_G(d)$ для любого элемента $d \in M$ и подгруппа $F = C_G(D)$ совпадает с $C_G(b)$ для каждого элемента $b \in F^\#$ и сильно изолирована в G . Отсюда также следует $H \cap C_G(d) = D$ для любого неединичного элемента $d \in D$, поэтому D

сильно изолирована в H . Утверждение доказано.

4) Пусть b – любой элемент из H . По утверждению 2) леммы смежный класс Hv содержит единственную инволюцию j_k такую, что $(bv)^{-1}i(bv) = j_k i j_k$. Это означает, что $b v j_k \in C_H(i)$, $c = v j_k \in b^{-1} \cdot C_H(i)$ и элемент $j_k v \in C_H(i) \cdot b$ инвертируется инволюцией v . Если $d = tv$ – произвольный инвертируемый инволюцией v элемент из $C_H(i)b$, то $bvt \in C_H(i)$, $(bv)^{-1}i(bv) = tit$, $t = j_k$, по утверждению 2) леммы и $d = c$. Таким образом, D содержит ровно по одному представителю каждого смежного класса H по подгруппе $C_H(i)$, значит H факторизуется подгруппами D и $C_H(i)$.

5) Поскольку $D = 1$, то ввиду утверждения 4) $H = C_H(i)$ для произвольной инволюции $i \in H$. Утверждение доказано.

6) Пусть (G, H) – пара Фробениуса. Тогда $D = 1$ и по утверждению 5) i – единственная инволюция в H . Обратно, если i – единственная инволюция в H , то ввиду утверждения 2) (G, H) – пара Фробениуса. Лемма доказана.

Таким образом, если i – единственная инволюция в H , то имеет место утверждение 2) теоремы (в силу лемм 2, 3). Пусть теперь H содержит более одной инволюции. Тогда при условиях леммы 4 справедливо утверждение 3) теоремы.

ЛЕММА 4. Пусть v – инволюция из $G \setminus H$, $1 \neq D = H \cap H^v$ и $N_H(D) \neq D$. Тогда $F = C_G(D)$ – периодическая абелева нормальная в G подгруппа, каждая инволюция из G инвертирует F и $G = F \rtimes C_H(i)$ – локально конечная группа Фробениуса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условий и утверждения 2) леммы 3 $D = H \cap H^v \neq 1$ и $N_H(D) \neq D$. Ввиду локальной конечности H и сильной изолированности D в G $N_H(D)$ – группа Фробениуса с неинвариантным множителем T (см., например, [9]). Пусть $1 \neq t \in T$. Из леммы 3 следует, что $t \in N_G(F)$, $vF \in Z(N_G(D)/F)$, поэтому $t \leq C_G(i)$ для некоторой инволюции $i \in vF$. Но тогда $i \in C_G(t) \leq H$. Понятно, что i инвертирует D и ввиду леммы 3 $i^H = i^D$. Отсюда выводим, что подгруппа D нормальна в H и инвертируется любой инволюцией из H . Теперь легко показать, что множество i^D исчерпывает множество всех инволюций из H . Таким образом, $H \leq N_G(D)$. Ввиду локальной конечности H и сильно изолированности D в H заключаем, что $H = D \rtimes C_H(i)$ – группа Фробениуса с неинвариантным множителем $C_H(i)$ и ядром D .

Пусть k – произвольная инволюция из $G \setminus H$ и $H_k = H \cap H^k$. По лемме 3 H_k – периодическая абелева подгруппа группы H , действующая при сопряжении транзитивно на множестве i^D . Из свойств локально конечных групп Фробениуса (см., например, [9]) легко следует, что $H_k = D$. Это означает, что инволюция $k \in G$ инвертирует D . Ввиду леммы 1 все инволюции из G исчерпывают множество i^G , при этом $C_G(i) = C_H(i)$. Поэтому $V = \langle i^G \rangle = C_V(D) \rtimes \langle i \rangle$. Но тогда $C_V(D) = F$ и F – периодическая абелева сильно изолированная подгруппа нечетного периода, инвертируемая каждой инволюцией из G (лемма 3). Следовательно, все инволюции в V сопряжены и $G = F \rtimes C_H(i)$. Поскольку централизатор любого элемента из $C_H(i)$ содержится в $C_H(i)$, причем $C_H(i)$ – локально конечная группа, то $G = F \rtimes C_H(i)$ – группа Фробениуса и в этом случае лемма доказана.

2. Случай 2-ранга ≥ 2 . Ввиду лемм 3, 4 остается рассмотреть случай, когда $1 \neq D = H \cap H^v$ и $N_H(D) = D$ для некоторой инволюции v из $G \setminus H$. Покажем, что в этом случае реализуется утверждение 4) теоремы.

ЛЕММА 5. Пусть v – инволюция из $G \setminus H$, $1 \neq D = H \cap H^v$ и $N_H(D) = D$. Тогда

- 1) $H = V \rtimes D$ – группа Фробениуса с локально циклическим инвариантным множителем D и нильпотентным ядром V четного периода;
- 2) подгруппа V сильно изолирована в G ;
- 3) силовская 2-подгруппа U группы H нормальна в H ;
- 4) подгруппа $B = N_G(U)$ сильно вложена в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Поскольку D сильно изолирована в H , $N_H(D) = D$ и H локально конечна, то ввиду хорошо известных результатов теории локально конечных групп (Фробениуса) (см., например, [9]) $H = V \rtimes D$ – группа Фробениуса с локально циклическим инвариантным множителем D и нильпотентным ядром V четного периода.

2) Из нильпотентности V и 2-изолированности H следует $C_G(f) \leq H$ для любого элемента $1 \neq f \in V$ и ввиду утверждения 1) $C_G(f) \leq V$.

3) Поскольку $U \leq V$ и V нильпотентна, то U нормальна в H .

4) По условиям леммы не все инволюции из G содержатся в U ; следовательно, $B = N_G(U) \neq G$. Ввиду нильпотентности V и ее сильно изолированности в G для $g \in G \setminus B$ выполняется $V \cap V^g = 1$ и $B \cap V^g = 1$. Отсюда $2 \notin \pi(B \cap B^g)$ и лемма доказана.

Доказательства утверждений следующих ниже лемм можно найти в [12], [13], [2].

ЛЕММА 6 [2, лемма 2.1]. Пусть G – группа с сильно вложенной подгруппой B и конечной инволюцией. Тогда

- 1) все инволюции в G сопряжены и все инволюции из B сопряжены в B ; в частности, любая пара инволюций в G порождает конечную подгруппу;
- 2) между множеством инволюций из B и множеством инволюций любого правого смежного класса Bg , где $g \in G$, можно установить взаимно однозначное соответствие; при этом если i – фиксированная инволюция из B , то каждой инволюции $k \in B$ (в том числе и инволюции i) соответствует единственная инволюция $j_k \in Bg$ такая, что $g^{-1}kg = j_k i j_k$;
- 3) любой элемент $g \in G$ обладает представлением $g = hj$, где $h \in B$, а j – некоторая инволюция;
- 4) для любой инволюции $j \in G \setminus B$ в подгруппе B существует множество M_j инвертируемых инволюцией j элементов той же мощности, что и множество инволюций из B .

ЛЕММА 7 [2, лемма 2.2]. Пусть G – группа с сильно вложенной подгруппой B и конечной инволюцией, $i \in B$ и $j \in G \setminus B$ – произвольные инволюции, $H_j = B \cap B^j$ и T_j – подгруппа в B , порожденная всеми инвертируемыми инволюцией j элементами из B . Тогда

- 1) $T_j \leq H_j$, H_j – подгруппа без инволюций, $\langle j, T_j \rangle = T_j \rtimes \langle j \rangle$ и $\langle j, H_j \rangle = H_j \rtimes \langle j \rangle$;
- 2) в каждом смежном классе $C_B(i) \cdot b$, где $b \in B$, существует единственный инвертируемый инволюцией j элемент, и его порядок конечен и нечетен;
- 3) $B = T_j \cdot C_B(i) = H_j \cdot C_B(i)$ и i^{T_j} – множество всех инволюций группы B ;
- 4) если b – неединичный строго вещественный относительно инволюции $j \in G \setminus B$ элемент из B , то $C_B(b)$ не содержит инволюций.

Таким образом, далее $B = N_G(U)$ – сильно вложенная подгруппа, V – периодическая нильпотентная сильно изолированная подгруппа 2-ранга ≥ 2 , U – силовская 2-подгруппа из V .

ЛЕММА 8. Пусть v – произвольная инволюция из $G \setminus B$ и $T = B \cap B^v$. Справедливы следующие утверждения:

- 1) $B = V \rtimes T$ и все инволюции из U содержатся в ее центре $Z(U)$;
- 2) T – периодическая локально циклическая группа, инвертируемая инволюцией v и действующая транзитивно на множестве всех инволюций из U ;
- 3) $B = V \rtimes T$ – локально конечная группа Фробениуса с ядром V и локально циклическим дополнением T ;
- 4) подгруппа T сильно изолирована в G и $W = N_G(T) = T \rtimes C_W(v)$ – группа Фробениуса с конечным дополнением $C_W(v)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) По лемме 7 подгруппа T не содержит инволюций и $B = T \cdot C_B(i)$, где i – произвольная инволюция из U . Поскольку $C_B(i) \leq V$ и V сильно изолирована, то $B = V \cdot T$ и $C_B(i) \geq U$. Утверждение доказано.

2) Предположим вначале, что $C = C_T(v) \neq 1$. Тогда, очевидно, подгруппа C сопряжена с некоторой подгруппой из V . Поскольку V сильно изолирована в G (лемма 3) и нормальна в B (лемма 5), то $C \leq V$, противоречие. Следовательно, $C_T(v) = 1$ и T – периодическая абелева подгруппа, инвертируемая инволюцией v . Теперь леммы 6, 7 завершают доказательство утверждения.

3) По лемме 7 $T \cap V = 1$ и ввиду сильной изолированности V в G и равенства $B = VT$ заключаем, что $B = V \rtimes T$ – группа Фробениуса с ядром V и локально циклическим дополнением T .

4) Пусть $1 \neq t \in T$ и $x \in C_G(t) \setminus T$. Тогда $x \in G \setminus B$ и по лемме 6 $x = hj$, $h \in B$, j – инволюция. Понятно, что $x \in B \cap B^x = B \cap B^j = K$. По утверждению 3) леммы K – неинвариантный множитель группы Фробениуса $B = V \rtimes T$. Поскольку $t \in K$, то $K = T$ и по утверждению 2) леммы j инвертирует t . Но тогда h также инвертирует t , противоречие. Следовательно, $C_G(t) = T$ и подгруппа T сильно изолирована в G . Отсюда и из локальной циклическости T выводим, что $T = C_G(T)$ имеет конечный индекс в $W = N_G(T)$ и $W = T \rtimes C_W(v)$ – локально конечная группа Фробениуса. Лемма доказана.

Обозначим через Ω множество всех подгрупп из G , сопряженных с подгруппой U . Далее будем рассматривать подстановочное представление группы G на множестве Ω , при этом обозначим $U = \alpha \in \Omega$. Доказательство теоремы завершает

ЛЕММА 9. Пусть v – инволюция из $G \setminus B$. Тогда

- 1) v^B – множество всех инволюций из $G \setminus B$;
- 2) группа G – 2-транзитивна на Ω , при этом $B = G_\alpha$ – стабилизатор точки и $T = G_{\alpha\beta}$ – стабилизатор двух точек;
- 3) подгруппа V действует регулярно на множестве $\Omega \setminus \{\alpha\}$;
- 4) только единичный элемент группы G оставляет на месте три различные точки из Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $T = B \cap B^v$. Поскольку по лемме 8 для любой инволюции $j \in G \setminus B$ подгруппа $T_j = B \cap B^j$ есть неинвариантный множитель группы

Фробениуса $B = V \rtimes T$, то $T_j^u = T$ для некоторого $u \in V$, и ввиду последнего утверждения той же леммы инволюции v и j^u сопряжены с помощью подходящего элемента $t \in T$. Это и означает, что $j \in v^B$. Утверждение доказано.

2) Очевидно, что $B = G_\alpha$. Ввиду утверждения 1) B транзитивна на $\Omega \setminus \{\alpha\}$. Следовательно, G – 2-транзитивна на Ω . Из лемм 6–8 вытекает, что для любого $g \in G \setminus B$ пересечение $B \cap B^g$ совпадает с подходящим неизменяемым множителем Фробениуса T^u группы B , здесь $u \in V$. Последнее равносильно тому, что $T = G_{\alpha\beta}$ – стабилизатор двух точек. Утверждение доказано.

3) Поскольку $G_\alpha = V \rtimes G_{\alpha\beta}$ и B транзитивна на $\Omega \setminus \{\alpha\}$, то подгруппа V , очевидно, регулярна на $\Omega \setminus \{\alpha\}$. Утверждение доказано.

4) Пусть $\gamma \in \Omega \setminus \{\alpha, \beta\}$ и $u \in V$ элемент такой, что $\beta^u = \gamma$. Поскольку T – неизменяемый множитель группы Фробениуса B , а u – неединичный элемент из ее ядра V , то $T \cap T^u = 1$. Следовательно, $G_{\alpha\beta\gamma} = 1$ как подгруппа тривиального пересечения $T \cap T^u$. Ввиду 2-транзитивности G заключаем, что ее стабилизатор любых трех точек из Ω тривиален, т.е. G – Z -группа [3]. Лемма и вместе с ней теорема доказаны.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бусаркин В. М. О 2-изолированных подгруппах // Матем. заметки. 1968. Т. 3. № 5. С. 497–501.
- [2] Созутов А. И. О некоторых бесконечных группах с сильно вложенной подгруппой // Алгебра и логика (в печати).
- [3] Горенштейн Д. Конечные простые группы. М.: Мир, 1985.
- [4] Feit W. On groups which contain Frobenius groups as subgroups // Proc. Symp. Pure Math. 1959. P. 22–28.
- [5] Suzuki M. Two characteristic properties of (ZT) -groups // Osaka Math. J. 1963. V. 15. P. 143–150.
- [6] Бусаркин В. М. Строение изолированных подгрупп в конечных группах // Алгебра и логика. 1965. Т. 4. № 2. С. 33–50.
- [7] Herzog M. On finite groups which contain a Frobenius subgroup // J. Algebra. 1967. V. 6. P. 192–221.
- [8] Курош А. Г. Теория групп. М.: Наука, 1967.
- [9] Старостин А. И. О группах Фробениуса // Укр. матем. ж. 1971. Т. 23. № 5. С. 629–639.
- [10] Созутов А. И., Шунков В. П. Об одном обобщении теоремы Фробениуса на бесконечные группы // Матем. сб. 1976. Т. 100. № 4. С. 495–506.
- [11] Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 14-е изд. Новосибирск, 1999.
- [12] Шунков В. П. *Мр*-группы. М.: Наука, 1990.
- [13] Шунков В. П. О вложении примарных элементов в группе. Новосибирск: Наука, 1992.

г. Красноярск
E-mail: root@sozutov.krasnoyarsk.su

Поступило
05.04.2000