Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Старовойтов, К проблеме описания последовательностей наилучших тригонометрических рациональных приближений, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 6, 919–924

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm706>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 15:58:00

УДК 517.51+517.53

К ПРОБЛЕМЕ ОПИСАНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ НАИЛУЧШИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

А. П. Старовойтов

Для заданной последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ неотрицательных действительных чисел, которая строго убывает и сходится к нулю, построена непрерывная 2π -периодическая функция f такая, что $R_n^T(f) = a_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, где $R_n^T(f)$ – наилучшие приближения функции f тригонометрическими рациональными функциями степени не выше n в равномерной норме.

Библиография: 11 названий.

Пусть $C_{2\pi}$ – банахово пространство 2π -периодических непрерывных на всей числовой прямой функций с равномерной нормой. Через $\mathcal{P}_n$ и $\mathcal{R}_n$ обозначим соответственное множество всех тригонометрических полиномов и тригонометрических рациональных функций с действительными коэффициентами степени не выше n . Для $f \in C_{2\pi}$ и $n = 0, 1, 2, \dots$ рассмотрим

$$E_n(f) = \inf\{\|f - p\| : p \in \mathcal{P}_n\}, \quad R_n(f) = \inf\{\|f - r\| : r \in \mathcal{R}_n\}$$

– наилучшие приближения f в $C_{2\pi}$ множествами $\mathcal{P}_n$, $\mathcal{R}_n$.

Хорошо известно, что последовательности $\{E_n(f)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{R_n(f)\}_{n=0}^{\infty}$ не возрастают и сходятся к нулю. Отмеченные свойства наилучших тригонометрических полиномиальных приближений характеризуют их полностью. Именно, справедлива следующая теорема Бернштейна (см. [1], [2]): если последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ неотрицательных чисел не возрастает и сходится к нулю, то существует $f \in C_{2\pi}$, для которой

$$E_n(f) = a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Позже этот результат был перенесен на произвольное банахово пространство (см. [2]).

Аналог теоремы Бернштейна для рациональных приближений отсутствует даже в классическом случае пространства $C_{2\pi}$, хотя проблема описания всех последовательностей $\{R_n(f)\}_{n=0}^{\infty}$, $f \in C_{2\pi}$, поставлена давно (см., например, [3]). По существу, единственным результатом в этом направлении является следующее утверждение Долженко [3]: для указанной выше последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ существует функция $f \in C_{2\pi}$ такая, что

$$R_{gk}(f) = a_{gk}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

С другой стороны, в случае приближения комплекснозначных функций рациональными функциями с комплексными коэффициентами в решении указанной проблемы имеется существенный сдвиг (см. [4], [5]).

Основным результатом данной работы является следующая

ТЕОРЕМА. Для любой строго убывающей к нулю последовательности $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ неотрицательных чисел существует такая нечетная функция $f \in C_{2\pi}$, что

$$R_n(f) = a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы базируется на принципе неподвижной точки Шаудера, а в основу конструкции искомой функции $f \in C_{2\pi}$ положены алгебраические дроби Чебышева–Маркова, наименее уклоняющиеся от нуля на отрезке $[-1, 1]$. Заметим, что классическое доказательство Бернштейна основано на принципе компактности Больца–Вейерштрасса, при этом построенная им функция $f \in C_{2\pi}$ является четной.

Без ограничения общности при построении функции f будем считать, что $a_0 = 1$. В противном случае следует рассмотреть последовательность

$$1, \quad \frac{a_1}{a_0}, \quad \frac{a_2}{a_0}, \quad \dots$$

и воспользоваться равенством $R_n(\lambda f) = |\lambda| R_n(f)$. Определим две бесконечно малые последовательности положительных чисел

$$\Delta a_n = a_{n-1} - a_n, \quad \varepsilon_n = \min\{\Delta a_1, \Delta a_2, \dots, \Delta a_n\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ЛЕММА [4]. Существует последовательность $\{\beta_j\}_{j=1}^\infty$, удовлетворяющая условиям

$$1 > \beta_j > \beta_{j+1} > 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \\ \sum_{j=l+1}^\infty \frac{\beta_j}{\beta_l} < \frac{1}{4} \varepsilon_{l+1}, \quad l = 1, 2, 3, \dots, \quad \sum_{j=1}^{l-1} \frac{\beta_l}{\beta_j} < \frac{1}{4} \varepsilon_l, \quad l = 2, 3, 4, \dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужным условиям удовлетворяет последовательность

$$\beta_j = \frac{\varepsilon_1}{5} \frac{\varepsilon_2}{5} \dots \frac{\varepsilon_j}{5}, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Лемма доказана.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $z_k = i\beta_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, и, взяв каждую точку z_k с кратностью 2, построим синус-дробь Бернштейна [6, гл. 1, § 1]

$$N_{2n}(y) = \sin \Phi_{2n}(y) = \frac{y P_{2n-2}(y)}{\prod_{k=1}^n (y^2 + \beta_k^2)}, \quad (1)$$

где $P_{2n-2}(y)$ – четный полином порядка $2n - 2$, а

$$\Phi_{2n}(y) = 2 \sum_{k=1}^n \arg(z_k - y).$$

ЛЕММА 2. Пусть $\lambda_{k,l} = N_{2k}(\beta_l)$. Тогда

$$|\lambda_{k,l}| < \frac{1}{2}\varepsilon_l \quad \text{при } l > k, \quad (2)$$

$$|\lambda_{k,l} - (-1)^l| < \frac{1}{2}\varepsilon_l \quad \text{при } l \leq k. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая выбор точек $\{z_j\}_{j=1}^k$, получим, что при $y > 0$

$$\Phi_{2k}(y) = 2 \sum_{j=1}^k \arg(i\beta_j - y) = 2 \sum_{j=1}^k \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{y}{\beta_j} \right) = \pi k + 2 \sum_{j=1}^k \operatorname{arctg} \frac{y}{\beta_j}.$$

Следовательно, если $l > k$, учитывая лемму 1, имеем

$$0 < \Phi_{2k}(\beta_l) - \pi k = 2 \sum_{j=1}^k \operatorname{arctg} \frac{\beta_l}{\beta_j} \leq 2 \sum_{j=1}^k \frac{\beta_l}{\beta_j} < \frac{1}{2}\varepsilon_l.$$

Отсюда получим

$$|\lambda_{k,l}| = |\sin \Phi_{2k}(\beta_l)| < \frac{1}{2}\varepsilon_l,$$

и неравенство (2) доказано.

Пусть теперь $l \leq k$. Тогда из представления

$$\Phi_{2k}(y) = 2 \left\{ \sum_{j=1}^{l-1} \arg(-y + i\beta_j) + \arg(-y + i\beta_l) + \sum_{j=l+1}^k \arg(-y + i\beta_j) \right\}$$

имеем, что

$$\Phi_{2k}(\beta_l) = \pi(2k - l) + \frac{\pi}{2} + 2 \sum_{j=1}^{l-1} \operatorname{arctg} \frac{\beta_l}{\beta_j} - 2 \sum_{j=l+1}^k \operatorname{arctg} \frac{\beta_j}{\beta_l}.$$

Снова применив лемму 1, получим

$$\begin{aligned} \left| \Phi_{2k}(\beta_l) - \pi(2k - l) - \frac{\pi}{2} \right| &\leq 2 \max \left\{ \sum_{j=1}^{l-1} \operatorname{arctg} \frac{\beta_l}{\beta_j}, \sum_{j=l+1}^k \operatorname{arctg} \frac{\beta_j}{\beta_l} \right\} \\ &< 2 \max \left\{ \sum_{j=1}^{l-1} \frac{\beta_l}{\beta_j}, \sum_{j=l+1}^k \frac{\beta_j}{\beta_l} \right\} < \frac{1}{2}\varepsilon_l. \end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство (3). Лемма доказана.

Сделав в (1) замену $x = (1 - y^2)/(1 + y^2)$, придем к синус-дробь Чебышева–Маркова, которая имеет следующий вид [6, гл. 2, § 1, равенство (9)]:

$$\nu_n(x) = \sin \varphi_{2n}(x) = \sin \Phi_{2n}(y) = \sqrt{1 - x^2} \frac{P_{n-1}(x)}{\prod_{j=1}^n (1 - c_j x)},$$

где $P_{n-1}(x)$ – алгебраический полином степени $n - 1$ с действительными коэффициентами, а $c_k = (1 - \beta_k^2)/(1 + \beta_k^2)$, $k = 1, 2, \dots, n$. С учетом замены и последних равенств получим, что $0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n < \dots < 1$ и $\nu_k(c_l) = \lambda_{k,l}$, $k = 1, 2, \dots, l = 1, 2, \dots$.

В банаховом пространстве $\mathbf{c}_0$ сходящихся к нулю последовательностей $t = (t_0, t_1, t_2, \dots)$ с нормой $\|t\|_{c_0} = \sup\{|t_n|: n = 0, 1, 2, \dots\}$ определим выпуклое компактное множество

$$K = \{t: 0 \leq t_k \leq \varepsilon_{k+1}; \quad k = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Если $t = (t_0, t_1, t_2, \dots) \in K$, то полагая $\Delta t_k = t_{k-1} - t_k$, рассмотрим функцию

$$f_t(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta a_k + \Delta t_k) \sin \theta \frac{P_{k-1}(\cos \theta)}{\prod_{j=1}^k (1 - c_j \cos \theta)}. \quad (4)$$

Поскольку ряд (4) равномерно сходится на любом конечном отрезке, то $f_t(\theta)$ является нечетной функцией из $C_{2\pi}$. Покажем, что семейство функций $(f_t(\theta))_{t \in K}$ содержит функцию f с нужными свойствами.

ЛЕММА 3. Пусть $\theta_k = \arccos c_k$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда $0 < \theta_k < \pi/2$ и при всех $t \in K$ справедливы неравенства

$$(-1)^l f_t(\theta_l) \geq a_{l-1} + t_{l-1} - \varepsilon_l, \quad l = 1, 2, \dots \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что при $\theta \in [0, \pi/2]$

$$\sin \theta \frac{P_{k-1}(\cos \theta)}{\prod_{j=1}^k (1 - c_j \cos \theta)} = \nu_k(\cos \theta).$$

С учетом этого равенства имеем

$$\begin{aligned} f_t(\theta_l) - (-1)^l (a_{l-1} + t_{l-1}) &= \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta a_k + \Delta t_k) \nu_k(c_l) - (-1)^l (a_{l-1} + t_{l-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{l-1} (\Delta a_k + \Delta t_k) \lambda_{k,l} + \sum_{k=l}^{\infty} (\Delta a_k + \Delta t_k) (\lambda_{k,l} - (-1)^l). \end{aligned}$$

Поскольку $t \in K$, то $\Delta a_k + \Delta t_k \geq 0$. Поэтому, используя лемму 2, получим

$$|f_t(\theta_k) - (-1)^l (a_{l-1} + t_{l-1})| \leq \frac{1}{2} \varepsilon_l \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta a_k + \Delta t_k) \leq \frac{1}{2} \varepsilon_l (a_0 + t_0) < \varepsilon_l.$$

Отсюда следует (5). Лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству теоремы. Для этого заметим, что при любом $t \in K$ функция f_t подчинена условиям

$$a_n + t_n - \varepsilon_{n+1} \leq R_n(f_t) \leq a_n + t_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Действительно, так как $|\nu_k(x)| = |\sin \varphi_{2k}(x)| \leq 1$ и $\Delta a_k + \Delta t_k \geq 0$, то

$$\begin{aligned} &\left| f_t(\theta) - \sum_{k=1}^n (\Delta a_k + \Delta t_k) \sin \theta \frac{P_{k-1}(\cos \theta)}{\prod_{j=1}^k (1 - c_j \cos \theta)} \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (\Delta a_k + \Delta t_k) |\nu_k(\cos \theta)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (\Delta a_k + \Delta t_k) = a_n + t_n. \end{aligned}$$

Таким образом, оценка сверху в (6) доказана. Для доказательства оценки снизу воспользуемся следующим аналогом теоремы Валле-Пуссена [7, гл. 2, § 31] для периодического случая.

ЛЕММА 4. Если $f \in C_{2\pi}$ и принимает в последовательных точках $u_1 < u_2 < \dots < u_N$ промежутка $(-\pi, \pi]$ отличные от нуля значения $\lambda_1, -\lambda_2, \dots, (-1)^{N-1}\lambda_N$ с чередующимися знаками (все λ_i имеют одинаковый знак), причем $N \geq 2n + 2$, то

$$R_n(f) \geq \min\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}.$$

На промежутке $(-\pi, \pi]$ имеется с учетом нечетности функции $f_t(\theta)$ $2n + 2$ точек $u_1 = \theta_1, u_2 = \theta_2, \dots, u_{n+1} = \theta_{n+1}, u_{n+2} = -\theta_{n+1}, u_{n+3} = -\theta_n, \dots, u_{2n+2} = -\theta_1$, в которых согласно (5) функция f_t принимает значения с чередующимися знаками. Поэтому из лемм 3, 4 получим оценку снизу в (6). Неравенства (6) означают, что отображение $\Pi: \mathbf{c}_0 \rightarrow \mathbf{c}_0$, определяемое равенством

$$\Pi(t) = \{a_n + t_n - R_n(f_t)\}_{n=0}^{\infty},$$

переводит K в себя.

ЛЕММА 5. Отображение $t \mapsto f_t(\theta)$ банахова пространства $\mathbf{c}_0$ в $C_{2\pi}$ равномерно непрерывно на K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t', t'' \in K$. Тогда с учетом (4) будем иметь, что

$$\begin{aligned} \max_{\theta \in \mathbb{R}} |f_{t''}(\theta) - f_{t'}(\theta)| &\leq \sum_{k=1}^N |\Delta t''_k - \Delta t'_k| + \sum_{k=N+1}^{\infty} (\Delta a_k + \Delta t''_k) + \sum_{k=N+1}^{\infty} (\Delta a_k + \Delta t'_k) \\ &\leq 2N \max_{0 \leq k \leq N} |t''_k - t'_k| + 2a_N + t''_N + t'_N. \end{aligned}$$

Отсюда и вытекает утверждение леммы. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть $f, g \in C_{2\pi}$ и для некоторого $\varepsilon > 0$ верно неравенство $\|f - g\| < \varepsilon$. Тогда

$$|R_n(f) - R_n(g)| < \varepsilon \quad \text{для } n = 0, 1, 2, \dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть r_n^f и r_n^g — тригонометрические рациональные функции наилучшего приближения f и g степени не выше n . Тогда из условия леммы следует, что

$$\|f - r_n^g\| < R_n(g) + \varepsilon, \quad \|g - r_n^f\| < R_n(f) + \varepsilon,$$

поэтому

$$R_n(f) < R_n(g) + \varepsilon, \quad R_n(g) < R_n(f) + \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Из леммы 5 и 6 следует, что отображение $\Pi(t)$ непрерывно на K . По теореме Шаудера (см. [8]) существует точка $t^* = (t_0^*, t_1^*, t_2^*, \dots) \in K$, для которой $\Pi(t^*) = t^*$, т.е. $R_n(f_{t^*}) = a_n, n = 0, 1, 2, \dots$. Следовательно, функция $f(\theta) = f_{t^*}(\theta)$ является искомой. Теорема доказана.

Отметим, что приведенное доказательство теоремы в сравнении с доказательством Бернштейна является более конструктивным. В частности, задав нужную скорость

убывания к нулю последовательности $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, можно изучать различные свойства всего семейства функций $(f_t(\theta))_{t \in K}$, которому принадлежит искомая функция. Данное обстоятельство имеет важное значение как при доказательстве точности прямых теорем рациональной аппроксимации, так и при получении обратных теорем.

Основные результаты статьи анонсированы в [9]–[11].

В заключение автор выражает благодарность профессору В. Н. Русаку и профессору А. А. Пекарскому за полезные обсуждения полученных результатов и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.–Л.: ГИТТЛ, 1949.
- [2] Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: ГИФМЛ, 1950.
- [3] Долженко Е. П. Сравнение скоростей рациональной и полиномиальной аппроксимаций // Матем. заметки. 1967. Т. 1. № 3. С. 313–320.
- [4] Пекарский А. А. Существование функции с заданными наилучшими равномерными рациональными приближениями // Изв. АН Беларуси. Сер. физ.-матем. науки. 1994. № 1. С. 23–26.
- [5] Назаренко М. А. Существование функции с заданными рациональными приближениями в пространстве $C(A)$ // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1997. № 4. С. 20–22.
- [6] Русак В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения. Минск: БГУ, 1979.
- [7] Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
- [8] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
- [9] Старовойтов А. П. Об одной проблеме Бернштейна–Долженко // International Conference on Approximation Theory and its Applications Dedicated to the Memory of V. K. Dzjadyk. Abstracts. Kyiv: Institute of Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine, 1999. P. 78.
- [10] Старовойтов А. П. Описание последовательностей наилучших тригонометрических рациональных приближений // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений. Тез. докл. междунар. конф. (14–18 сентября 1999 г., Минск, Беларусь). Минск: БГУ, 1999. С. 213–214.
- [11] Старовойтов А. П. К проблеме описания последовательностей наилучших тригонометрических рациональных приближений // Докл. НАН Беларуси. 2000. Т. 44. № 2. С. 23–25.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
E-mail: svoitov@gsu.unibel.by

Поступило
03.04.2000