Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Тевелев, Изотропные подпространства полилинейных форм, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 6, 925–933

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm707>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 17:41:56

УДК 512

ИЗОТРОПНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ПОЛИЛИНЕЙНЫХ ФОРМ

Е. А. Тевелев

В работе найдены размерности максимальных изотропных подпространств симметрических и кососимметрических форм степени d общего положения.

Библиография: 8 названий.

Введение. Пусть $V = \mathbb{C}^n$. Пусть w – симметрическая или кососимметрическая полилинейная форма степени d , т.е. $w \in S^d V^*$ или $w \in \Lambda^d V^*$. Подпространство $U \subset V$ назовем *изотропным* относительно w , если $w|_U = 0$. При решении различных задач алгебраической геометрии часто возникает необходимость изучить многообразие изотропных подпространств фиксированной размерности для форм общего положения.

В случае симметрических форм эта задача эквивалентна описанию “схемы Фано”, т.е. многообразия проективных подпространств заданной размерности, содержащихся в общей гиперповерхности степени d в проективном пространстве. Эти многообразия интенсивно изучались в алгебраической геометрии, начиная с классических работ Бертини и Сегре. В качестве простейших примеров отметим знаменитую задачу о 27 прямых на кубической поверхности или стандартную задачу линейной алгебры о двух семействах прямых на квадрике в $\mathbb{P}^3$.

Если известно, что у формы общего положения изотропные подпространства заданной размерности существуют, то нетрудно описать многие алгебро-геометрические свойства всего многообразия изотропных подпространств. Например, можно вычислить его размерность, доказать гладкость, а в ряде случаев и неприводимость. Тем принципиальнее кажется вопрос о том, в каких случаях можно гарантировать существование изотропного подпространства заданной размерности. Цель этой работы – дать простое доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $w \in S^d V^*$, соответственно $w \in \Lambda^d V^*$, – форма общего положения. Пространство V содержит k -мерное изотропное подпространство относительно w тогда и только тогда, когда

$$n \geq \frac{\binom{d+k-1}{d}}{k} + k, \quad \text{соответственно} \quad n \geq \frac{\binom{k}{d}}{k} + k, \quad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда CRDF, грант RM1-206, и фонда INTAS, грант INTAS-OPEN-97-1570.

кроме следующих исключений:

- 1) если $w \in S^2V^*$ или $w \in \Lambda^2V^*$ – формы общего положения, то V содержит k -мерное изотропное подпространство тогда и только тогда, когда $n \geq 2k$;
- 2) если $w \in \Lambda^{n-2}V^*$ общего положения, n четно, то V содержит k -мерное изотропное подпространство тогда и только тогда, когда $k \leq n - 2$;
- 3) если $w \in \Lambda^3V^*$ общего положения, $n = 7$, то V содержит k -мерное изотропное подпространство тогда и только тогда, когда $k \leq 4$.

Интересно отметить, что многообразие 4-мерных изотропных подпространств кососимметрической 3-формы общего положения в 7-мерном пространстве является, как нетрудно доказать, 8-мерным гладким многообразием Фано. Более того, оно является компактификацией единственного симметрического пространства простой исключительной алгебраической группы G_2 .

Доказательство теоремы приведено в п. 2. Оно основано на полученном в п. 1 критерии (теорема 2) непустоты схемы нулей однородных векторных расслоений на флаговых многообразиях типа грассманианов, соответствующих “коротким градуировкам” полупростых алгебр Ли. Этот критерий является вторым основным результатом статьи.

Автор признателен Э. Б. Винбергу и А. И. Бондалу за полезные обсуждения результатов работы.

1. Схемы нулей однородных векторных расслоений на флаговых многообразиях. Пусть G – связная редуктивная группа. Зафиксируем в G максимальный тор T , борелевскую подгруппу $B \supset T$, противоположную борелевскую подгруппу B_- , параболическую подгруппу $P \supset B_-$. Пусть $X(T)$ – решетка характеров T , $\lambda \in X(T)$ – доминантный вес. Рассмотрим векторное расслоение $\mathcal{L}_\lambda = G \times_P U_\lambda$ над G/P , где U_λ – неприводимый P -модуль со старшим весом λ . По теореме Бореля–Вейля–Ботта (см. [1]) G -модуль $V_\lambda = H^0(G/P, \mathcal{L}_\lambda)$ является неприводимым модулем со старшим весом λ .

ЛЕММА 1. Пусть $s \in H^0(G/P, \mathcal{L}_\lambda)$ – глобальное сечение общего положения. Тогда

- 1) при $\dim U_\lambda > \dim G/P$ схема нулей Z_s пуста;
- 2) при $\dim U_\lambda \leq \dim G/P$ либо схема нулей Z_s пуста, либо s пересекает нулевое сечение $\mathcal{L}_\lambda$ трансверсально и, следовательно, Z_s – гладкое несмешанное подмногообразие коразмерности $\dim U_\lambda$.

Доказательство леммы стандартно (см., например, [2]).

Из леммы следует, что неравенство $\dim U_\lambda \leq \dim G/P$ является необходимым условием существования нулей у глобального сечения общего положения. Довольно удивительно, что это неравенство, вообще говоря, не является достаточным. С точки зрения алгебраической геометрии необходимым и достаточным условием отсутствия нулей является равенство нулю старшего класса Чженя расслоения $\mathcal{L}$, однако это условие является очень трудно проверяемым в конкретных случаях. Поэтому мы применим другие соображения.

Рассмотрим в V_λ P -подмодуль

$$M_\lambda = \{s \in H^0(G/P, \mathcal{L}_\lambda) \mid s(P) = 0\}.$$

Здесь $s(P)$ – росток сечения s в точке G/P , соответствующей P . Нетрудно видеть, что M_λ можно охарактеризовать как единственный максимальный собственный P -подмодуль модуля V_λ ; ясно, что имеется изоморфизм P -модулей $V_\lambda/M_\lambda \simeq U_\lambda$. Рассмотрим отображение $\Psi: G \times M_\lambda \rightarrow V_\lambda$, $\Psi(g, v) = gv$. Тогда существование нулей у глобальных сечений $\mathcal{L}$ общего положения равносильно доминантности Ψ , что равносильно сюръективности дифференциала Ψ в точке общего положения. Пусть $\mathfrak{g}, \mathfrak{p}$ – алгебры Ли групп G и P соответственно. Естественное отображение $\mathfrak{g} \times V_\lambda \rightarrow V_\lambda$ факторизуется до P -эquivариантного отображения $\psi: \mathfrak{g}/\mathfrak{p} \times M_\lambda \rightarrow U_\lambda$. Нетрудно видеть, что доминантность Ψ равносильна сюръективности отображения $\psi(\cdot, x)$ в точке $x \in M_\lambda$ общего положения. Пусть $Z_\lambda = \psi^{-1}(0)_{\text{red}} \subset \mathfrak{g}/\mathfrak{p} \times M_\lambda$ – многообразие инцидентности. Наши вычисления основываются на следующей очевидной лемме (для доказательства которой достаточно применить теорему о размерности слоев морфизма к ограничению на Z_λ проекции $\mathfrak{g}/\mathfrak{p} \times M_\lambda$ на второй сомножитель).

ЛЕММА 2. Пусть $\dim Z_\lambda = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{p} + \dim M_\lambda - \dim U_\lambda$. Тогда глобальное сечение расслоения $\mathcal{L}$ общего положения имеет нули.

Обозначим через π ограничение на Z_λ проекции $\mathfrak{g}/\mathfrak{p} \times M_\lambda$ на первый сомножитель. Изучение многообразия Z_λ осложняется тем, что в общем случае оно приводимо, но упрощается благодаря тому, что прообразы $\pi^{-1}(x)$ – линейные пространства. Рассмотрим функцию $l(x) = \dim \pi^{-1}(x)$, $x \in \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$. Предположим, что существует стратификация $\mathfrak{g}/\mathfrak{p} = \bigcup_{i=1}^r X_i$ непересекающимися подмногообразиями такими, что функция $l(x)$ постоянна на X_i : $l(x) = l_i$, $x \in X_i$. Тогда, очевидно,

$$\dim Z_\lambda = \max_i (\dim X_i + l_i). \quad (2)$$

Конечно, в общем случае, существование такой стратификации, которая подходила бы для *всех* модулей V_λ , представляется неочевидным. Все существенно упрощается в том случае, если действие P в $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ имеет конечное число орбит: в этом случае в качестве X_i можно взять эти орбиты (ввиду P -эquivариантности ψ). К сожалению, класс параболических подгрупп таких, что P имеет конечное число орбит в $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$, очень узок. Двойственный P -модуль $(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^*$ изоморфен представлению P на унитарном радикале $\mathfrak{p}_n$ алгебры Ли $\mathfrak{p}$ (двойственность определяется инвариантным скалярным произведением на $\mathfrak{g}$); по теореме Пясецкого [3] действие $P: \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ имеет конечное число орбит тогда и только тогда, когда этим свойством обладает действие $P: \mathfrak{p}_n$; такие действия изучались в [4], практически полная классификация была получена в [5]. Но даже в этом случае задача полного описания орбитного разложения (нахождение представителей всех орбит) представляется малоосуществимой. Сузим класс рассматриваемых параболических еще больше: рассмотрим параболические подгруппы P с коммутативным унитарным радикалом $\mathfrak{p}_n$. Пусть P^- – противоположная параболическая, $L = P \cap P^-$ – подгруппа Леви, $\mathfrak{l}$ – алгебра Ли L , $\mathfrak{p}_n^-$ – унитарный радикал $\mathfrak{p}^-$. Тогда коммутативность $\mathfrak{p}_n$ равносильна тому, что разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_n^- \oplus \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}_n$ является $\mathbb{Z}$ -градуировкой $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$. Заметим, что $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ изоморфно как L -модуль модулю $\mathfrak{p}_n^-$. Хорошо известно, что действие L в $\mathfrak{p}_n^-$ имеет в этом случае конечное число орбит (это следует из более общей теоремы Ричардсона [6] о том, что для всякой параболической P подгруппа Леви L имеет конечное число орбит на факторах убывающего центрального ряда $\mathfrak{p}_n$).

Пусть $\mathfrak{p}_n^- = \bigcup_{i=1}^r Lf_i$ – орбитное разложение. Его детальное описание было получено в работе [7]. Тогда равенство (2) принимает вид

$$\dim Z_\lambda = \max_i (\dim Lf_i + l(f_i)). \quad (3)$$

Осталось вычислить $l(f_i)$. Если $f_i = 0$, то $l(f_i) = \dim M_\lambda$. В противном случае вложим f_i в $\mathfrak{sl}_2$ -тройку $\langle f_i, h_i, e_i \rangle$. Очевидно, можно считать, что $h_i \in \mathfrak{l}$, $e_i \in \mathfrak{p}_n$. Явный вид h_i также найден в статье [7]. Мы используем следующую простую лемму из теории представлений $\mathfrak{sl}_2$.

ЛЕММА 3. Пусть V – конечномерный $\mathfrak{sl}_2$ -модуль, $\mathfrak{sl}_2 = \langle f, h, e \rangle$. Пусть $\mathfrak{b} = \langle h, e \rangle$. Предположим, что $M \subset V$ – $\mathfrak{b}$ -подмодуль такой, что $eV \subset M$. Тогда

$$\dim \operatorname{Coker}(M \subset V \xrightarrow{f} V \rightarrow V/M) = \dim(V/M)^h,$$

где $(V/M)^h = \{v \in V/M \mid hv = 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $V = \bigoplus_{i=0}^N V_i$ – разложение на $\mathfrak{sl}_2$ -изотипические компоненты, здесь V_i – прямая сумма неприводимых $(i+1)$ -мерных модулей. Далее, пусть $V_i = V_i^{-i} \oplus V_i^{-i+2} \oplus \dots \oplus V_i^i$ – разложение на весовые подпространства относительно h . Введем обозначение $U_i = V_i^{-i+2} \oplus V_i^{-i+4} \oplus \dots \oplus V_i^i$. Нетрудно видеть, что условие $eV \subset M$ означает, что $U_i \subset M$ для всякого i . Используя h -инвариантность M , получаем, что

$$M = (M \cap V_0) \oplus (M \cap V_1^{-1}) \oplus U_1 \oplus (M \cap V_2^{-2}) \oplus U_2 \oplus \dots \oplus (M \cap V_N^{-N}) \oplus U_N.$$

Отсюда V/M отождествляется с

$$V_0/(M \cap V_0) \oplus V_1^{-1}/(M \cap V_1^{-1}) \oplus V_2^{-2}/(M \cap V_2^{-2}) \oplus \dots \oplus V_N^{-N}/(M \cap V_N^{-N}).$$

Теперь заметим, что $V_0/(M \cap V_0) = (V/M)^h$, а

$$V_1^{-1}/(M \cap V_1^{-1}) \oplus V_2^{-2}/(M \cap V_2^{-2}) \oplus \dots \oplus V_N^{-N}/(M \cap V_N^{-N}) = \operatorname{Im}(M \subset V \xrightarrow{f} V \rightarrow V/M).$$

Лемма доказана.

Применяя к представлению $\mathfrak{sl}_2$ в V_λ лемму 3, получаем

$$\begin{aligned} l(f_i) &= \dim \operatorname{Ker} \psi(f_i, \cdot) \\ &= \dim M_\lambda - \dim U_\lambda + \dim \operatorname{Coker} \psi(f_i, \cdot) = \dim M_\lambda - \dim U_\lambda + \dim U_\lambda^{h_i}. \end{aligned}$$

Заметим, что формула остается справедливой и при $f_i = 0$, если считать, что в этом случае $h_i = 0$. Подставляя этот результат в (3) и применяя лемму 2, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть при всех i выполняется неравенство

$$\dim U_{\lambda}^{h_i} \leq \operatorname{codim}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}} Lf_i. \quad (4)$$

Тогда глобальное сечение общего положения расслоения $\mathcal{L}$ имеет нули.

Все составляющие формулы (4) легко вычисляются в конкретных случаях. Мы применим теорему 2 для доказательства теоремы 1.

2. Доказательство теоремы 1. Выберем в пространстве V базис $\{e_1, \dots, e_n\}$; отождествим GL_n с группой матриц. Пусть T, B, B^- – подгруппы диагональных, верхне- и нижнетреугольных матриц. Зафиксируем целое k . Рассмотрим в GL_n параболическую подгруппу

$$P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ * & B \end{pmatrix},$$

где $B - (k \times k)$ -матрица. Тогда G/P – это грассманиан $\mathrm{Gr}(k, V)$. Рассмотрим на G/P векторное расслоение $\mathcal{L} = S^d \mathcal{S}^*$ (соответственно $\mathcal{L} = \Lambda^d \mathcal{S}^*$, в этом случае считаем, что $k \geq d$), где $\mathcal{S}$ – тавтологическое расслоение. Тогда $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\lambda}$, где λ – старший вес $S^d V^*$ (соответственно $\Lambda^d V^*$) как GL_n -модуля. Пусть $w \in S^d V^*$ (соответственно $w \in \Lambda^d V^*$), s_w – соответствующее глобальное сечение. Нетрудно видеть, что $(Z_{s_w})_{\mathrm{red}}$ совпадает с многообразием k -мерных изотропных подпространств w . Заметим, что неравенства (1) равносильны в данном случае условию $\dim U_{\lambda} \leq \dim G/P$. В дальнейшем предполагаем, что эти неравенства выполнены.

Положим

$$f_i = E_{1,n} + E_{2,n-1} + \dots + E_{i,n+1-i}, \quad i = 0, \dots, r = \min(k, n-k).$$

Радикал $\mathfrak{p}_n^-$ отождествляется с матрицами размера $k \times (n-k)$, а орбита Lf_i с многообразием матриц ранга i , поэтому

$$\operatorname{codim}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}} Lf_i = (k-i)(n-k-i).$$

Далее,

$$h_i = (E_{n,n} - E_{1,1}) + (E_{n-1,n-1} - E_{2,2}) + \dots + (E_{n+1-i,n+1-i} - E_{i,i}),$$

откуда

$$\dim U_{\lambda}^{h_i} = \begin{cases} \binom{d+k-i-1}{d}, & \text{если } V_{\lambda} = S^d V^*, \\ \binom{k-i}{d}, & \text{если } V_{\lambda} = \Lambda^d V^*. \end{cases}$$

Применяя теорему 1, получаем следующую лемму.

ЛЕММА 4. Пусть при всех $i = 0, \dots, r$ имеет место неравенство

$$\binom{d+k-i-1}{d} \leq (k-i)(n-k-i).$$

Тогда форма $w \in S^d V^*$ общего положения имеет k -мерное изотропное подпространство.

Пусть при всех $i = 0, \dots, r$ имеет место неравенство

$$\binom{k-i}{d} \leq (k-i)(n-k-i).$$

Тогда форма $w \in \Lambda^d V^*$ общего положения имеет k -мерное изотропное подпространство.

Осталось выяснить, когда из формулы (1) вытекают условия леммы.

Разберем симметрический случай. Ясно, что при $i = k$ условия леммы 4 выполнены. Поэтому достаточно выяснить, когда из

$$n \geq \frac{\binom{d+k-1}{d}}{k} + k$$

вытекает неравенство

$$n \geq \frac{\binom{d+k-i-1}{d}}{k-i} + k+i$$

при $i = 1, \dots, \min(k-1, n-k)$. В случае $d = 1$ теорема 1 очевидна, в случае $d = 2$ она сводится к хорошо известному результату об изотропных подпространствах квадратичных форм. Далее будем считать, что $d \geq 3$. Мы используем следующий легко проверяемый по индукции факт.

ЛЕММА 5. Пусть $d \geq 3$, $\alpha \geq 2$. Тогда

$$\frac{\binom{d+\alpha-1}{d}}{\alpha} \geq \frac{\binom{d+\alpha-2}{d}}{\alpha-1} + 1.$$

Теперь из леммы 5 вытекает

$$\begin{aligned} n &\geq \frac{\binom{d+k-1}{d}}{k} + k \geq \frac{\binom{d+k-2}{d}}{k-1} + k+1 \geq \frac{\binom{d+k-3}{d}}{k-2} + k+2 \geq \dots \\ &\geq \frac{\binom{d+k-1-(k-1)}{d}}{k-(k-1)} + k+k-1, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Разберем кососимметрический случай. Ясно, что при $i > k - d$ условия леммы 5 выполнены. Поэтому достаточно выяснить, когда из

$$n \geq \frac{\binom{k}{d}}{k} + k$$

вытекает неравенство

$$n \geq \frac{\binom{k-i}{d}}{k-i} + k + i$$

при $i = 1, \dots, \min(k - d, n - k)$. В случае $d = 1$ теорема 1 очевидна, в случае $d = 2$ она сводится к хорошо известному результату об изотропных подпространствах 2-форм. Далее будем считать, что $d \geq 3$. Мы используем следующий легко проверяемый по индукции факт.

ЛЕММА 6. Пусть $3 \leq d \leq \alpha - 2$. Тогда

$$\frac{\binom{\alpha}{d}}{\alpha} \geq \frac{\binom{\alpha-1}{d}}{\alpha-1} + 1.$$

Теперь из леммы 6 вытекает

$$\begin{aligned} n &\geq \frac{\binom{k}{d}}{k} + k \geq \frac{\binom{k-1}{d}}{k-1} + k + 1 \geq \frac{\binom{k-2}{d}}{k-2} + k + 2 \geq \dots \\ &\geq \frac{\binom{k-(k-3-d)}{d}}{k-(k-3-d)} + k + (k-3-d). \end{aligned}$$

Осталось разобрать следующие три случая:

- 1) $i = k - d - 2$;
- 2) $i = k - d - 1$;
- 3) $i = k - d$

при условии, что $i \leq n - k$.

Пусть $i = k - d - 2$, $n \geq 2k - d - 2$. Нужно из оценки

$$n \geq \frac{\binom{k}{d}}{k} + k$$

вывести неравенство

$$n \geq \frac{\binom{d+2}{d}}{d+2} + 2k - d - 2 = 2k - \frac{d-1}{2} - 2.$$

Для этого достаточно, чтобы было выполнено

$$\binom{k}{d} \geq k \left(k - \frac{d-1}{2} - 2 \right).$$

Поскольку $d \geq 3$ и $k - d = i + 2 \geq 3$, имеем

$$\binom{k}{d} \geq \binom{k}{3} \geq k(k-3) \geq k \left(k - \frac{d-1}{2} - 2 \right).$$

Пусть $i = k - d - 1$, $n \geq 2k - d - 1$. Нужно из оценки

$$n \geq \frac{\binom{k}{d}}{k} + k$$

вывести неравенство

$$n \geq \frac{\binom{d+1}{d}}{d+1} + 2k - d - 1 = 2k - d.$$

Для этого достаточно неравенства

$$\binom{k}{d} \geq k(k-d).$$

Поскольку $d \geq 3$ и $k - d = i + 1 \geq 2$, имеем, при $k - d \geq 3$

$$\binom{k}{d} \geq \binom{k}{3} \geq k(k-3) \geq k(k-d).$$

При $k - d = 2$ получаем

$$\binom{k}{d} = \frac{(d+2)(d+1)}{2} \geq 2(d+2) \geq k(k-d).$$

Пусть $i = k - d$, $n \geq 2k - d$. Нужно из неравенства

$$n \geq \frac{\binom{k}{d}}{k} + k$$

вывести

$$n \geq \frac{\binom{d}{d}}{d} + 2k - d = 2k - d + \frac{1}{d}.$$

Все исключения определяются следующей системой равенств и неравенств:

$$n = 2k - d, \quad \binom{k}{d} \leq k(k-d), \quad k - d \geq 1.$$

Есть только две возможности: либо $k = d + 1$, $n = d + 2$, либо $d = 3$, $k = 5$, $n = 7$.

В первом случае нужно выяснить, имеет ли форма $w \in \Lambda^{n-2}V^*$ общего положения $(n - 1)$ -мерное изотропное подпространство. Это эквивалентно вопросу о том, имеет ли 2-форма общего положения в V^* ядро. Хорошо известно, что это так только при нечетном n .

Для завершения доказательства теоремы 1 осталось выяснить, имеет ли форма $w \in \Lambda^3(\mathbb{C}^7)^*$ общего положения 5-мерное изотропное подпространство. В подходящей системе координат это изотропное подпространство совпадает с линейной оболочкой $\langle e_1, \dots, e_5 \rangle$. Таким образом,

$$w = \sum_{1 \leq i < j < k \leq 7} \alpha_{ijk} x_i \wedge x_j \wedge x_k,$$

где $\alpha_{ijk} = 0$ при $k \leq 5$. Рассмотрим в SL_7 однопараметрическую подгруппу

$$H(t) = \mathrm{diag}(t^2, t^2, t^2, t^2, t^2, t^{-5}, t^{-5})$$

Ясно, что $\lim_{t \rightarrow 0} H(t)w = 0$. Поэтому w лежит в нульконусе действия $\mathrm{SL}_7 : \Lambda^3(\mathbb{C}^7)^*$, а значит, на w обращается в 0 всякий однородный инвариант этого действия, отличный от константы (см. [8]). Однако известно, что у этого действия есть инварианты, отличные от констант (см. [8]). Поэтому формы общего положения не имеют 5-мерных изотропных подпространств.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bott R. Homogeneous vector bundles // Ann. Math. 1957. V. 66/2. P. 203–248.
- [2] Тевелев Е. А. Подалгебры и дискриминанты антикоммутативных алгебр // Изв. РАН. Сер. матем. 1999. Т. 63 (3). С. 169–184.
- [3] Пясецкий В. С. Действия линейных групп с конечным числом орбит // Функцион. анализ и прилож. 1975. Т. 9. С. 351–353.
- [4] Popov V., Röhrle G. On the number of orbits of a parabolic subgroup on its unipotent radical // Algebraic Groups and Lie Groups / ed. G. I. Lehrer. Austr. Math. Soc. Lecture Ser. V. 9, 1997.
- [5] Hille L., Röhrle G. On parabolic subgroups of classical groups with a finite number of orbits on the unipotent radical // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. 1997. V. 325. P. 465–470.
- [6] Richardson R. W. Finiteness theorems for orbits of algebraic groups // Indag. Math. 1985. V. 88. P. 337–344.
- [7] Muller I., Rubenthaler H., Schiffmann G. Structure des espaces préhomogènes associés à certaines algèbres de Lie graduées // Math. Ann. 1986. V. 274. P. 95–123.
- [8] Винберг Э. Б., Попов В. Л. Теория инвариантов // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 55. М.: ВИНТИ, 1989. С. 137–314.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: tevelev@ium.ips.ras.ru

Поступило
07.10.1999
Исправленный вариант
05.07.2000