Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Товстолис, Приближение гладких функций на полуоси целыми функциями конечной полустепени, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 6, 934–943

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm708>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 16:57:40

УДК 517.5

ПРИБЛИЖЕНИЕ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ НА ПОЛУОСИ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ КОНЕЧНОЙ ПОЛУСТЕПЕНИ

А. В. Товстолис

В статье изучается поточечное приближение функции, заданной на вещественной полуоси и имеющей там почти всюду ограниченную r -ю производную. В качестве аппарата приближения используются введенные Бернштейном целые функции конечной полустепени. В работе получена асимптотически точная оценка поточечного приближения для указанного класса.

Библиография: 11 названий.

Пусть E – замыкание непустого открытого подмножества $\mathbb{R}$. Через $W^r(E)$, $r \in \mathbb{N}$, обозначают класс функций f , у которых производная $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна на любом интервале, содержащемся в E , и $|f^{(r)}| \leq 1$ почти всюду (в смысле меры Лебега) на E .

Аппроксимация функций из этих классов изучалась во многих работах (см. [1]–[4] с обширной библиографией). В настоящей работе рассматривается случай $E = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Естественным аппаратом приближения здесь являются введенные Бернштейном целые функции конечной полустепени, т.е. целые функции порядка $1/2$ нормального типа (см. [5]). В этом случае равномерная на $\mathbb{R}_+$ аппроксимация не всегда возможна (см. [5, с. 481]) и для получения прямых и обратных теорем используется поточечное приближение. Такие теоремы были получены Брудным [6] (см. также [2]).

Вопрос о точной константе в главном члене поточечной оценки скорости приближения функции класса W^r на различных множествах рассматривается, начиная с работы Никольского [7] (см. также работы Корнейчука и Половины [8], Темлякова [9] и др.). В случае отрезка, где изучается аппроксимация алгебраическими многочленами, поточечная оценка скорости приближения с точной константой в главном члене недавно получена Тригубом [10].

В данной работе получено решение этой задачи на $\mathbb{R}_+$. Основным результатом является теорема 1 (см. ниже), которая дает асимптотически точную оценку скорости приближения функции класса $W^r(\mathbb{R}_+)$ целыми функциями конечной полустепени.

1. Формулировка основного результата. Далее, как обычно, для $\sigma > 0$ через $\mathbf{H}_\sigma$ обозначается класс целых функций конечной полустепени типа не выше σ , т.е. класс целых функций f таких, что

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k z^k}{(2k)!},$$

где

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \leq \sigma,$$

или, что то же самое, функция $F(z) = f(z^2)$ является целой функцией экспоненциального типа не выше σ (см. [5, с. 479]). Пусть также

$$K_r = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}}.$$

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in W^r(\mathbb{R}_+)$, $r \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $\sigma > 0$ найдется функция $g \in \mathbf{H}_\sigma$, для которой

$$|f(x) - g(x)| \leq \frac{2^r K_r}{\sigma^r} x^{r/2} + \frac{\gamma}{\sigma^{r+1}} x^{(r-1)/2} \quad \forall x \geq 0, \quad (1)$$

где γ – некоторая положительная константа, зависящая лишь от r .

При этом константу $2^r K_r$ в (1), вообще говоря, уменьшить нельзя.

Как и в работе [10], эта теорема доказывается без оценок интегральных операторов приближения, как это обычно делается при доказательстве такого рода утверждений (см., например, [1], [2]).

Автор выражает глубокую благодарность профессору Р.М. Тригубу за постановку задачи и внимание к работе.

2. Вспомогательные утверждения. Введем некоторые обозначения. Если $0 \in E$, то $W_0^r(E) = \{f \in W^r(E): f^{(\nu)}(0) = 0, \nu \in [1, r-1]\}$. Для произвольной константы $\alpha > 0$ положим $\alpha W^r(E) = \{f: f/\alpha \in W^r(E)\}$. Аналогично определяется класс $\alpha W_0^r(E)$. Как обычно, для $\sigma > 0$ через $\mathbf{E}_\sigma$ обозначается класс целых функций экспоненциального типа не выше σ ; $\mathbf{B}_\sigma = \mathbf{E}_\sigma \cap L_\infty(\mathbb{R})$ – класс Бернштейна;

$$\mathcal{A}_\sigma(f) = \inf_{g \in \mathbf{E}_\sigma} \|f - g\|_{C(\mathbb{R})};$$

$[t]$ – целая часть числа $t \in \mathbb{R}$. Через $\gamma(a, b)$ будем обозначать положительные константы, зависящие лишь от a и b , в разных случаях, вообще говоря, различные.

ЛЕММА 1. Пусть $f \in W_0^r(\mathbb{R}_+)$, $r \in \mathbb{N}$. Тогда

а) найдутся функции $\varphi_r \in W_0^r(\mathbb{R})$ и $\psi_r \in \gamma(r)W_0^{r+1}(\mathbb{R})$ такие, что

$$f(x^2) = (2x)^r \varphi_r(x) + (2x)^{r-1} \psi_r(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

и

$$\varphi_r^{(r)}(x) = f^{(r)}(x^2) \quad \text{для почти всех } x \in \mathbb{R}; \quad (3)$$

кроме того, функции $x^r \varphi_r(x)$ и $x^{r-1} \psi_r(x)$ четные;

б) найдутся функции $\xi_r \in W_0^r(\mathbb{R}_+)$ и $\zeta_r \in \gamma(r)W_0^{r+1}(\mathbb{R})$ такие, что

$$2^r |x|^r f(|x|) = \xi_r(x^2) + (2x)^{r-1} \zeta_r(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) При $r = 1$ достаточно положить

$$\varphi_1(x) = \int_0^x f'(t^2) dt, \quad \psi_1(x) = -2 \int_0^x \varphi_1(t) dt$$

и $\gamma(1) = 2$.

Далее по индукции. Пусть лемма верна для данного $r \in \mathbb{N}$. Докажем ее для $r + 1$. Пусть $f \in W_0^{r+1}(\mathbb{R}_+)$, тогда $f' \in W_0^r(\mathbb{R}_+)$. По предположению индукции для любого $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x^2) = (2x)^r \varphi_r(x) + (2x)^{r-1} \psi_r(x),$$

где $\varphi_r \in W_0^r(\mathbb{R})$, $\varphi_r^{(r)}(x) = f^{(r+1)}(x^2)$ для почти всех $x \in \mathbb{R}$ и $\psi_r \in \gamma(r)W_0^{r+1}(\mathbb{R})$. Умножая это тождество на $2x$ и интегрируя, получим

$$f(x^2) = \int_0^x (2t)^{r+1} \varphi_r(t) dt + \int_0^x (2t)^r \psi_r(t) dt. \quad (5)$$

Пусть

$$\varphi_{r+1}(x) = \int_0^x \varphi_r(t) dt,$$

тогда $\varphi_{r+1} \in W_0^{r+1}(\mathbb{R})$ и $\varphi_{r+1}^{(r+1)}(x) = \varphi_r^{(r)}(x) = f^{(r+1)}(x^2)$ для почти всех $x \in \mathbb{R}$. После интегрирования по частям из (5) имеем

$$f(x^2) = (2x)^{r+1} \varphi_{r+1}(x) + \int_0^x (2t)^r G_{r+1}(t) dt, \quad (6)$$

где $G_{r+1}(t) = \psi_r(t) - 2(r+1)\varphi_{r+1}(t)$. Нетрудно видеть, что

$$G_{r+1} \in \gamma_1(r+1)W_0^{r+1}(\mathbb{R}), \quad (7)$$

где $\gamma_1(r+1) = \gamma(r) + 2(r+1)$.

Положим

$$G_{r+\nu+1}(x) = \int_0^x G_{r+\nu}(t) dt, \quad \nu \in \mathbb{N}, \quad (8)$$

и

$$\psi_{r+1}(x) = \frac{1}{(2x)^r} \int_0^x (2t)^r G_{r+1}(t) dt = \sum_{\nu=0}^r \frac{(-1)^\nu r!}{(r-\nu)!} \frac{G_{r+\nu+2}(x)}{x^\nu}. \quad (9)$$

По формуле Лейбница

$$\psi_{r+1}^{(s)}(x) = G_{r+2}^{(s)}(x) + \sum_{\nu=1}^r \frac{(-1)^\nu r!}{(r-\nu)!} \left(\sum_{k=0}^s \binom{s}{k} \frac{(-1)^k (\nu+k-1)!}{(\nu-1)!} \frac{G_{r+\nu+2}^{(s-k)}(x)}{x^{\nu+k}} \right) \quad (10)$$

для $s \in [0, r+2]$. Очевидно, что при любых $\nu \in [0, r]$ и $m \in [0, r+\nu+2]$ выполнены соотношения

$$G_{r+\nu+2}^{(m)}(x) = \begin{cases} G_{r+\nu+2-m}(x), & m \in [0, \nu+1], \\ G_{r+1}^{(m-\nu-1)}(x), & m \in [\nu+2, r+\nu+2]. \end{cases}$$

Так как $G_{r+1}^{(s)}(0) = 0$ при $s \in [0, r]$, получаем $G_{r+\nu+2}^{(m)}(0) = 0$ при любом $m \in [0, r+\nu+1]$. Таким образом, $G_{r+\nu+2}^{(s-k+l)}(0) = 0$ при $l \in [0, \nu+k-1]$ ($\nu \in \mathbb{N}$, $s \in [0, r+2]$, $k \in [0, s]$).

Теперь из (10) находим, что

$$\psi_{r+1}^{(s)}(0) = 0 \quad \text{при } s \in [0, r+1] \text{ и } \|\psi_{r+1}^{(r+2)}\|_\infty \leq \gamma_2(r+1)\|G_{r+2}^{(r+2)}\|_\infty,$$

где

$$\gamma_2(r+1) = 1 + \sum_{\nu=1}^r \frac{r!}{(r-\nu)!} \left(\sum_{k=0}^{r+2} \binom{r+2}{k} \frac{1}{(\nu-1)!(\nu+k)} \right).$$

Из (7) и (8) следует, что

$$\|G_{r+2}^{(r+2)}\|_\infty = \|G_{r+1}^{(r+1)}\|_\infty \leq \gamma_1(r+1).$$

Таким образом, $\psi_{r+1} \in \gamma(r+1)W_0^{r+2}(\mathbb{R})$, где $\gamma(r+1) = \gamma_1(r+1)\gamma_2(r+1)$, и из (6) и (8) получаем (2).

Четность функций $x^r \varphi_r(x)$ и $x^{r-1} \psi_r(x)$ следует из (2) и (3).

б) Покажем, что найдутся функции $\Phi_r \in W_0^r(\mathbb{R}_+)$ и Ψ_r , удовлетворяющая условию $\Psi_r(x^2) \in \gamma(r)W_0^{r+1}(\mathbb{R})$, такие, что для любого $x \geq 0$ имеет место равенство

$$(2\sqrt{x})^r f(\sqrt{x}) = \Phi_r(x) + (2\sqrt{x})^{r-1} \Psi_r(x). \quad (11)$$

При $r = 1$ достаточно положить

$$\Phi_1(x) = \int_0^x f'(\sqrt{t}) dt, \quad \Psi_1(x) = \int_0^x \frac{f(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} dt, \quad x \geq 0,$$

и $\gamma(1) = 2$.

Далее нужно воспользоваться методом математической индукции и повторить рассуждения, аналогичные проведенным при доказательстве части а).

Для доказательства (4) теперь осталось заменить x на x^2 в (11) и положить

$$\xi_r(x) = \Phi_r(x) \quad \forall x \geq 0, \quad \zeta_r(x) = (\operatorname{sign} x)^{r-1} \Psi_r(x^2) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

ЛЕММА 2. Пусть $f \in \mathbf{E}_\sigma$ и существуют неотрицательные константы A и B такие, что $|f(x)| \leq A|x| + B$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Тогда

а) имеет место оценка

$$|f'(x)| \leq C\sigma|x| + C \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (12)$$

где

$$C = \max \left\{ \max_{|y| \leq 1} \left| \frac{f(y) - f(0)}{y} \right|, \quad A + 2B \right\};$$

б) для всех $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $T > 0$ имеет место неравенство

$$|\xi_m(x) - \xi_m(0)| \leq |x| \cdot \max \left\{ \frac{C\sigma}{T} + C\sigma + \frac{C}{T}, \quad \frac{A}{T} + 2A + \frac{2B}{T} \right\},$$

где $\xi_m(x) = (f(x+mT) + f(x-mT))/(2mT)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Из условия следует, что функция $F(x) = (f(x) - f(0))/x$ принадлежит классу $\mathbf{E}_\sigma$ и $|F(x)| \leq C$ при любом $x \in \mathbb{R}$. Таким образом, $F \in \mathbf{B}_\sigma$. Используя неравенство Бернштейна (см., например, [1, гл. IV, п. 84, теорема 1]), получаем

$$|F'(x)| \leq C\sigma \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Из определения $F(x)$ имеем также

$$F'(x) = \frac{f'(x) - F(x)}{x},$$

откуда

$$|f'(x)| \leq C\sigma|x| + C \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

б) Из определения ξ_m следует, что для всех $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства

$$|\xi_m(x)| \leq \frac{A}{2mT}(|x + mT| + |x - mT|) + \frac{B}{mT} \leq \frac{A}{T}|x| + A + \frac{B}{T}. \quad (13)$$

Кроме того, $\xi'_m(x) = (f'(x + mT) + f'(x - mT))/(2mT)$. Поэтому, применяя (12) к функции f , получим

$$\begin{aligned} |\xi'_m(x)| &\leq \frac{1}{2mT}(C\sigma|x + mT| + C\sigma|x - mT| + 2C) \\ &\leq \frac{C\sigma}{T}|x| + C\sigma + \frac{C}{T} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Используя теорему Лагранжа о среднем, отсюда имеем

$$|\xi_m(x) - \xi_m(0)| \leq \left(\frac{C\sigma}{T} + C\sigma + \frac{C}{T} \right) |x| \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad |x| \leq 1. \quad (14)$$

Кроме того, из (13) следует

$$|\xi_m(x) - \xi_m(0)| \leq \left(\frac{A}{T} + 2A + \frac{2B}{T} \right) |x| \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad |x| > 1. \quad (15)$$

Из оценок (14) и (15) получаем утверждение б).

ЛЕММА 3. Пусть $f \in W^r(\mathbb{R})$ при некотором $r \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1]$ найдется набор комплексных чисел $\{a_{k,\varepsilon}\}_{k=0}^{r-1}$ такой, что функция

$$\mathcal{F}_\varepsilon(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{r-1} a_{k,\varepsilon} \sin^k \varepsilon x$$

будет принадлежать классу $(1 + \varepsilon\gamma_0(f, r))W_0^r(\mathbb{R})$ с некоторой положительной константой $\gamma_0(f, r)$, не зависящей от ε .

Кроме того, если функция f является четной (или нечетной), то и функция $\mathcal{F}_\varepsilon$ такая же.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\frac{1}{\varepsilon^\nu} f^{(\nu)}(0) - \sum_{k=0}^{\nu} a_{k,\varepsilon} (\sin^k x)^{(\nu)}(0) = 0, \quad \nu \in [0, r-1], \quad (16)$$

относительно неизвестных $a_{k,\varepsilon}$.

Поскольку $(\sin^\nu x)^{(\nu)}(0) = \nu! \neq 0$, то матрица данной системы невырождена, следовательно, система (16) имеет единственное решение. При этом каждое из $a_{k,\varepsilon}$ является линейной комбинацией выражений $f(0), f'(0)/\varepsilon, \dots, f^{(k)}(0)/\varepsilon^k$, поэтому найдется константа $c(f, k) > 0$ такая, что

$$|a_{k,\varepsilon}| \leq \frac{c(f, k)}{\varepsilon^k} \quad \forall k \in [0, r-1], \quad \varepsilon \in (0, 1].$$

Далее, для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ имеет место разложение

$$(\sin^k x)^{(r)} = \left(\frac{i}{2}\right)^k \sum_{\nu=0}^k \binom{k}{\nu} (-1)^\nu (i(2\nu - k))^r e^{i(2\nu - k)x},$$

откуда

$$|(\sin^k \varepsilon x)^{(r)}| \leq \frac{\varepsilon^r}{2^k} \sum_{\nu=0}^k \binom{k}{\nu} |2\nu - k|^r.$$

Из полученных оценок и определения $\mathcal{F}_\varepsilon$ следует утверждение леммы 3.

Для доказательства точности константы $2^r K_r$ в главном члене неравенства (1) нам потребуется следующее утверждение.

ЛЕММА 4. Пусть $r \in \mathbb{N}$ и существуют константы A_r и $\gamma_1(r)$ такие, что для любой функции $F \in W^r(\mathbb{R}_+)$ и любого $\sigma > 0$ найдется функция $G \in \mathbf{H}_\sigma$, удовлетворяющая неравенству

$$|F(x) - G(x)| \leq \frac{A_r}{\sigma^r} x^{r/2} + \frac{\gamma_1(r)}{\sigma^{r+1}} x^{(r-1)/2} \quad \forall x \geq 0.$$

Тогда для любой периодической функции $f \in W^r(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $f(-x) = (-1)^{r-1} f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, при любом $\sigma > 0$ выполняется неравенство

$$\mathcal{A}_\sigma[f] \leq \frac{A_r}{2^r \sigma^r}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\sigma > 0$ и $k \in \mathbb{N}$,

$$k \geq \frac{2\pi}{T} \max\left\{1, \frac{r-1}{\sigma}\right\}. \quad (17)$$

Рассмотрим функцию

$$\mathcal{F}(x) = \frac{\mathcal{F}_\varepsilon(x)}{1 + \varepsilon \gamma_0(f, r)} = \frac{1}{1 + \varepsilon \gamma_0(f, r)} \left(f(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1} a_{\nu,\varepsilon} \sin^\nu \varepsilon x \right),$$

где $\varepsilon = 2\pi/(kT)$ (здесь функция $\mathcal{F}_\varepsilon(x)$ и константа $\gamma_0(f, r)$ – из леммы 3).

Из условия леммы 4 и леммы 3 получаем, что $\mathcal{F} \in W_0^r(\mathbb{R})$ и

$$\mathcal{F}(-x) = (-1)^{r-1} \mathcal{F}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (18)$$

Кроме того, очевидно, что функция $\mathcal{F}$ – периодическая с периодом kT . Из (18) имеем также

$$|x|^r \mathcal{F}(|x|) = x^{r-1} |x| \mathcal{F}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Из утверждения б) леммы 1 следует, что

$$2^r x^{r-1} |x| \mathcal{F}(x) = \xi_r(x^2) + (2x)^{r-1} \zeta_r(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (19)$$

где $\xi_r \in W_0^r(\mathbb{R}_+)$, $\zeta_r \in \gamma(r)W_0^{r+1}(\mathbb{R})$. Отсюда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi_r(x^2)}{x^{r-1}} = 0. \quad (20)$$

В силу прямой теоремы о приближении целыми функциями экспоненциального типа не выше σ (см., например, [1, гл. V, п. 101, теорема 1] и обсуждение в п. 99 там же или [2, гл. V, § 5.6]) найдется функция $g_{\sigma,r} \in \mathbf{E}_\sigma$ такая, что

$$|\zeta_r(x) - g_{\sigma,r}(x)| \leq \frac{\gamma(r)K_{r+1}}{\sigma^{r+1}} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (21)$$

Кроме того, по условию леммы существует функция $G \in \mathbf{H}_\sigma$ такая, что

$$|\xi_r(x^2) - G(x^2)| \leq \frac{A_r}{\sigma^r} |x|^r + \frac{\gamma_1(r)}{\sigma^{r+1}} |x|^{r-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (22)$$

Из этого неравенства и (20) следует, что существует и конечен $\lim_{x \rightarrow 0} (G(x^2)/x^{r-1})$, поэтому

$$\frac{G(x^2)}{x^{r-1}} \in \mathbf{E}_\sigma.$$

Теперь из (19), (21) и (22) вытекает

$$||x| \mathcal{F}(x) - G_\sigma(x)| \leq \frac{A_r}{2^r \sigma^r} |x| + \frac{\gamma_1(r) + 2^{r-1} \gamma(r) K_{r+1}}{2^r \sigma^{r+1}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (23)$$

где

$$G_\sigma(x) = \frac{G(x^2)}{2^r x^{r-1}} + \frac{1}{2} g_{\sigma,r}(x) \in \mathbf{E}_\sigma.$$

Поскольку функция $\mathcal{F} \in W_0^r(\mathbb{R})$ периодическая, то $\mathcal{F} \in L_\infty(\mathbb{R})$ и из (23) имеем

$$|G_\sigma(x)| \leq \left(\frac{A_r}{2^r \sigma^r} + \|\mathcal{F}\|_\infty \right) |x| + \frac{\gamma_1(r) + 2^{r-1} \gamma(r) K_{r+1}}{2^r \sigma^{r+1}} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (24)$$

Записывая (23) для $x + mkT$ и $x - mkT$, складывая полученные неравенства и учитывая, что $|x + mkT| + |x - mkT| = 2mkT$ при $|x| \leq mkT$, получаем

$$\left| \mathcal{F}(x) - \frac{G_\sigma(x + mkT) + G_\sigma(x - mkT)}{2mkT} \right| \leq \frac{A_r}{2^r \sigma^r} + \frac{\gamma_1(r) + 2^{r-1} \gamma(r) K_{r+1}}{2^r \sigma^{r+1} mkT} \quad (25)$$

$$\forall x: |x| \leq mkT.$$

Из (24) и утверждения б) леммы 2 следует, что найдутся функция $g_\sigma \in \mathbf{E}_\sigma$ и возрастающая последовательность $\{m_l\}$ натуральных чисел такие, что при $l \rightarrow \infty$

$$\frac{G_\sigma(x + m_l kT) + G_\sigma(x - m_l kT)}{2m_l kT} \rightarrow g_\sigma(x)$$

равномерно на любом компакте из $\mathbb{R}$. Полагая в (25) $m = m_l$, при $l \rightarrow \infty$ имеем

$$|\mathcal{F}(x) - g_\sigma(x)| \leq \frac{A_r}{2^r \sigma^r} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Это означает, что

$$|f(x) - \Theta_\sigma(x)| \leq \frac{A_r}{2^r \sigma^r} (1 + \varepsilon \gamma_0(f, r)) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (26)$$

где

$$\Theta_\sigma(x) = (1 + \varepsilon \gamma_0(f, r)) g_\sigma(x) + \sum_{\nu=0}^{r-1} a_{\nu, \varepsilon} \sin^\nu \varepsilon x.$$

Из условия (17) и определения ε видно, что $\Theta_\sigma \in \mathbf{E}_\sigma$. Тогда из (26) следует, что

$$\mathcal{A}_\sigma[f] \leq \frac{A_r}{2^r \sigma^r} \left(1 + \frac{2\pi}{kT} \gamma_0(f, r) \right).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем утверждение леммы 4.

Нам потребуются также некоторые свойства идеальных сплайнов Эйлера.

ЛЕММА 5. Пусть

$$\varphi_{\lambda, r}(x) = \frac{4}{\pi \lambda^r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)\lambda x - \pi r/2)}{(2k+1)^{r+1}}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda > 0,$$

– идеальные сплайны Эйлера (см., например, [3, гл. 3, § 3.1]). Для произвольных $\sigma > 0$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ функции $\Phi_{\sigma, r}(x) = \varphi_{[\sigma]+1, r}(x)$ обладают следующими свойствами:

- 1) $\Phi_{\sigma, r}$ – периодическая с периодом 2π ;
- 2) $\Phi_{\sigma, r}(-x) = (-1)^{r-1} \Phi_{\sigma, r}(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$;
- 3) при любых $j \in [0, r]$ выполнено равенство $\|\Phi_{\sigma, r}^{(j)}\|_\infty = K_{r-j}/([\sigma] + 1)^{r-j}$;
- 4) $\mathcal{A}_\sigma[\Phi_{\sigma, r}] = K_r/([\sigma] + 1)^r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства 1) и 2) следуют непосредственно из определения функции $\Phi_{\sigma,r}$. Свойство 3) доказано в [3, гл. 3, § 3.1].

Для доказательства свойства 4) применим теорему Бернштейна [11, теорема IV], согласно которой если f – непрерывна и ограничена на всей числовой оси и в точках некоторого полного множества степени σ (см. [11], а также [2, гл. II, § 2.12, п. 2.12.4]) выполнено неравенство $(-1)^k f(x_k) \geq \mu > 0$, то $\mathcal{A}_\sigma[f] \geq \mu$.

Как известно (см. [2, гл. II, § 2.12, п. 2.12.4]), примером такого множества точек может служить последовательность $x_k = k\pi/([\sigma] + 1) + \alpha$, $k \in \mathbb{Z}$.

Поэтому, полагая

$$x_k = \begin{cases} k\pi/([\sigma] + 1) + \pi/(2[\sigma] + 2), & r - \text{четное}, \\ k\pi/([\sigma] + 1), & r - \text{нечетное}, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z},$$

получим

$$(-1)^k \Phi_{\sigma,r}(x_k) = \begin{cases} (-1)^{r/2} K_r/([\sigma] + 1)^r, & r - \text{четное}, \\ (-1)^{[r/2]+1} K_r/([\sigma] + 1)^r, & r - \text{нечетное}, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Теперь из приведенной теоремы Бернштейна и свойства 3) имеем

$$\mathcal{A}_\sigma[\Phi_{\sigma,r}] = \|\Phi_{\sigma,r}\|_\infty = \frac{K_r}{([\sigma] + 1)^r}.$$

3. Доказательство теоремы 1. Рассмотрим функцию

$$F(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k.$$

Ясно, что $F^{(r)} \equiv f^{(r)}$ и функция F удовлетворяет условиям леммы 1. Из (2) получаем

$$F(x^2) = (2x)^r \varphi_r(x) + (2x)^{r-1} \psi_r(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (27)$$

где $\varphi_r \in W_0^r(\mathbb{R})$, $\psi_r \in \gamma_1(r)W_0^{r+1}(\mathbb{R})$ и, кроме того, функции $x^r \varphi_r(x)$ и $x^{r-1} \psi_r(x)$ – четные.

В силу прямой теоремы о приближении целыми функциями экспоненциального типа (см. [1, гл. V, п. 101, теорема 1] или [2, гл. V, § 5.6]) для любого $\sigma > 0$ найдутся целые функции $g_{\sigma,1,r}$ и $g_{\sigma,2,r}$ из класса $\mathbf{E}_\sigma$ такие, что

$$\begin{aligned} |\varphi_r(x) - g_{\sigma,1,r}(x)| &\leq \frac{K_r}{\sigma^r} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ |\psi_r(x) - g_{\sigma,2,r}(x)| &\leq \frac{\gamma_1(r)K_{r+1}}{\sigma^{r+1}} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Поскольку $x^r \varphi_r(x)$ и $x^{r-1} \psi_r(x)$ – четные функции, то $x^r g_{\sigma,1,r}(x)$ и $x^{r-1} g_{\sigma,2,r}(x)$ также можно считать четными.

Теперь из представления (27) следует, что

$$|F(x^2) - (2x)^r g_{\sigma,1,r}(x) - (2x)^{r-1} g_{\sigma,2,r}(x)| \leq \frac{2^r K_r}{\sigma^r} x^r + \frac{\gamma(r)}{\sigma^{r+1}} x^{r-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (28)$$

где $\gamma(r) = \gamma_1(r)2^{r-1}K_{r+1}$.

Обозначим $G_{\sigma,r}(x) = (2x)^r g_{\sigma,1,r}(x) + (2x)^{r-1} g_{\sigma,2,r}(x)$. Тогда функция $G_{\sigma,r} \in \mathbf{E}_\sigma$ и четная. Заменяя в (28) x^2 на x и возвращаясь к функции f , получим неравенство (1) с функцией

$$g(x) = G_{\sigma,r}(\sqrt{x}) + \sum_{k=0}^r \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)x^k \in \mathbf{H}_\sigma.$$

Предположим теперь, что в (1) при некотором $r \in \mathbb{N}$ вместо $2^r K_r$ в главном члене можно поставить некоторую константу A_r . Для $\varepsilon \in (0, 1)$ положим $\sigma_\varepsilon = [\sigma] + 1 - \varepsilon$, тогда $[\sigma_\varepsilon] = [\sigma]$.

Рассмотрим функции $\Phi_{\sigma,r}$ из леммы 5. Легко видеть, что они удовлетворяют условиям леммы 4 и в силу их 2π -периодичности

$$\mathcal{A}_\lambda[\Phi_{\sigma,r}] = \mathcal{A}_{[\lambda]}[\Phi_{\sigma,r}] \quad \forall \lambda > 0 \quad (29)$$

(см. [2, гл. II, § 2.6, п. 2.6.21]). Применяя к функции $\Phi_{\sigma,r}$ лемму 4 с σ_ε вместо σ , из (29) и леммы 5 имеем

$$\frac{A_r}{2^r \sigma_\varepsilon^r} \geq \mathcal{A}_{\sigma_\varepsilon}[\Phi_{\sigma,r}] = \mathcal{A}_{[\sigma_\varepsilon]}[\Phi_{\sigma,r}] = \mathcal{A}_{[\sigma]}[\Phi_{\sigma,r}] = \mathcal{A}_\sigma[\Phi_{\sigma,r}] = \frac{K_r}{([\sigma] + 1)^r}.$$

Таким образом,

$$A_r \geq \frac{2^r K_r \sigma_\varepsilon^r}{([\sigma] + 1)^r}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$, получаем $A_r \geq 2^r K_r$, что и требовалось доказать.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
- [2] Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.
- [3] Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987.
- [4] Ибрагимов И. И. Теория приближения целыми функциями. Баку: Элм, 1979.
- [5] Бернштейн С. Н. Функции конечной степени и функции конечной полустепени. // Собрание сочинений. Т. 2. М.: АН СССР, 1954. С. 479–492.
- [6] Брудный Ю. А. Приближение целыми функциями на внешности отрезка и полуоси // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1959. Т. 23. № 4. С. 595–612.
- [7] Никольский С. М. О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1946. Т. 10. № 4. С. 295–318.
- [8] Корнейчук Н. П., Половина А. И. О приближении непрерывных дифференцируемых функций алгебраическими полиномами на отрезке // Докл. АН СССР. 1966. Т. 166. № 2. С. 281–283.
- [9] Темляков В. Н. Приближение функций из класса W_∞^1 алгебраическими многочленами // Матем. заметки. 1981. Т. 29. № 4. С. 597–602.
- [10] Тригуб Р. М. Прямые теоремы о приближении алгебраическими полиномами гладких функций на отрезке // Матем. заметки. 1993. Т. 54. № 6. С. 113–121.
- [11] Бернштейн С. Н. О наилучшем приближении на всей вещественной оси при помощи целых функций данной степени, 3 (1946) // Собрание сочинений. Т. 2. М.: АН СССР, 1954. С. 379–383.