Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Чехлов, Об одном классе эндотранзитивных групп,
Матем. заметки, 2001, том 69, выпуск 6, 944–949

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm709>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 04:09:13

УДК 512.541

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЭНДОТРАНЗИТИВНЫХ ГРУПП

А. Р. Чехлов

Получено описание редуцированных эндотранзитивных групп без кручения со свойством максимальности на ядра эндоморфизмов, тип любого ненулевого элемента которых сравним с некоторым максимальным типом в множестве типов всех ненулевых элементов группы.

Библиография: 11 названий.

Абелева группа без кручения A называется *эндотранзитивной* (транзитивной), если для любых $0 \neq a, b \in A$ условие на их характеристики $\chi(a) = \chi(b)$ влечет существование эндоморфизма (автоморфизма) f этой группы со свойством $fa = b$. Если такой эндоморфизм f найдется при $\chi(a) \leq \chi(b)$ для любых $0 \neq a, b \in A$, то A называется *вполне транзитивной*. Транзитивные и вполне транзитивные группы без кручения изучались в работах [1]–[9] и др., см. также обзоры [10], [11, с. 367]. Всякая транзитивная и вполне транзитивная группа без кручения являются эндотранзитивными. Поэтому изучение эндотранзитивных групп представляет интерес, поскольку оно позволяет выработать определенный подход к исследованию транзитивных, вполне транзитивных и других, близких к ним классов групп. Эндотранзитивные группы без кручения исследовались в [1], [2]. Однородные эндотранзитивные группы под названием E -транзитивные изучались и в [7], [8], они совпадают с классом однородных вполне транзитивных групп. Нередуцированная группа без кручения эндотранзитивна тогда и только тогда, когда ее редуцированная часть эндотранзитивна. Прямое слагаемое эндотранзитивной группы эндотранзитивно. Отметим, что свойство эндотранзитивности группы без кручения A эквивалентно такому свойству: для любых $0 \neq a, b \in A$ таких, что $t(a) = t(b)$ и $\chi(a) \leq \chi(b)$, существует ее эндоморфизм, переводящий a в b [1, предложение 1.1].

Обозначим через $\mathcal{L}$ класс всех редуцированных групп без кручения A таких, что для любого $0 \neq a \in A$ тип $t(a)$ сравним с некоторым максимальным типом в множестве $T(A)$ типов всех ненулевых элементов группы A . В этой статье получено описание эндотранзитивных групп из $\mathcal{L}$, ядра эндоморфизмов которых обладают свойством максимальности. Таковы, например, все группы без кручения конечного ранга. Поэтому данные результаты обобщают результаты § 4 из [1], описывающие эндотранзитивные группы без кручения конечного ранга. К рассматриваемому классу относятся также квазиоднородные группы A из $\mathcal{L}$ конечного p -ранга хотя бы для одного простого числа p со свойством $pA \neq A$; ранг таких групп может достигать мощности континуума.

Если A – группа без кручения, то $h_p^A(a)$ – p -высота ее элемента a ; если $G \subseteq A$, то $\langle G \rangle_*^A$ – сервантная подгруппа в A , порожденная G (индекс A иногда опускаем); $A(t) = \{a \in A \mid t(a) \geq t\}$, аналогично определяется подгруппа $A(\chi)$; $\Pi(A)$ – множество всех простых чисел p со свойством $pA \neq A$; R – кольцо эндоморфизмов группы A , т.е. $E(A)$; если p – простое число, то p -рангом A называется ранг ее факторгруппы A/pA ; 1_A – тождественный эндоморфизм группы A ; A называется *квазиоднородной*, если $\Pi(G) = \Pi(A)$ для любой ее ненулевой сервантной подгруппы G ; *квазиразложимой*, если существуют ее сервантные подгруппы $B, G \neq 0$ такие, что $nA \subseteq B \oplus G$ для некоторого натурального числа n , B и G называются ее *квазислагаемыми*. Будем говорить, что A *квазиизоморфна* группе B , если $A \cong G$, где G – такая подгруппа в B , что $nB \subseteq G$ для некоторого натурального n . Обозначим через $\mathcal{N}$ класс всех редуцированных групп без кручения, все ненулевые эндоморфизмы которых – мономорфизмы. Если $f: A \rightarrow B$ – гомоморфизм, то $f|G$ – ограничение f на $G \subseteq A$.

Для замкнутости изложения докажем следующую лемму из [1].

ЛЕММА 1. Пусть A – редуцированная группа без кручения. Тогда

- 1) если $f \in R$, $0 \neq b \in \text{Ker } f$ и $h_p(b) \geq h_p(fa)$, то $h_p(a+b) = h_p(a)$; в частности, если $\chi(b) \geq \chi(fa)$, то $\chi(a+b) = \chi(a)$;
- 2) если A эндотранзитивна и подмножество $T \subseteq T(A)$ таково, что для всякого $t \in T(A)$ существует $\tau_t \in T$ со свойством $t \leq \tau_t$, то эндоморфизм $f \in R$, аннулирующий множество $V = \bigcup_{\tau \in T} A(\tau)$, равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Имеем $h_p(a+b) \geq h_p(a) \cap h_p(b) = h_p(a)$. Далее

$$h_p(a+b) \leq h_p(f(a+b)) = h_p(fa) \leq h_p(b),$$

поэтому

$$h_p(a) = h_p((a+b) - b) \geq h_p(a+b) \cap h_p(b) = h_p(a+b).$$

Следовательно, $h_p(a) = h_p(a+b)$.

2) Предположим, что $fa \neq 0$. По условию найдется $0 \neq b \in A$ со свойством $\chi(b) \geq \chi(fa)$. Пусть $h_p(b) < \infty$. Поделив, если нужно, b на соответствующую степень p , можно считать, что $h_p(b) = h_p(a)$. Тогда в силу 1) выполнено равенство $\chi(p^n a + b) = \chi(a)$, где $n > h_p(fa)$. Имеем $p^n \varphi a + \varphi b = a$ для некоторого $\varphi \in R$ и $\varphi b \in V$. Откуда $p^n f \varphi = fa$. Противоречие.

ЛЕММА 2. Если $A \in \mathcal{L}$ – квазиоднородная эндотранзитивная группа и $A(t) \subseteq \text{Ker } f$ для некоторого $t \in T(A)$, то $f = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $t = t(a)$ – максимальный тип, пусть $b \in A \setminus pA$ – элемент другого максимального типа. Поделив a , если нужно, на соответствующую степень p , можно считать, что $a \notin pA$. Покажем, что $t(p^n b + a) = t(b + a)$ для любого натурального n . Предположим, что $q^k x = p^n b + a$, где q – простое число $\neq p$, k – натуральное. Тогда $q^k f x = p^n f b$. Так как $\chi(fb) = \chi(sb)$ для некоторого натурального s , то $q^k \mid sb$. Если $(q, s) = 1$, то $q^k \mid b$ и, значит, $q^k \mid (b+a)$. Итак, $t(p^n b + a) \leq t(b+a)$. Аналогично, $t(p^n b + a) \geq t(b+a)$. Следовательно, найдутся взаимно простые натуральные m и r , не делящиеся на p , со свойством $\chi(p^m t b + m a) = \chi(r b + r a)$. Тогда

$p^n fb + fa = rb + ra$. В силу произвольности n из этого следует, что rb и, значит, b принадлежат замыканию в p -адической топологии группы A ее подгруппы $A(t)$. Поскольку $fA(t) = 0$, то fb принадлежит p -делимой подгруппе группы A . В силу квазиоднородности $fb = 0$. Но тогда по лемме 1 $f = 0$.

ЛЕММА 3. Пусть A – квазиразложимая эндотранзитивная группа без кручения, $tA \subseteq B \oplus G$, где $0 \neq B, G$ – сервантные подгруппы в A . Тогда

- 1) если $0 \neq f: G \rightarrow B$ – гомоморфизм, то найдется гомоморфизм $\eta: B \rightarrow G$ со свойством $\eta f \neq 0$; в частности, если $G \in \mathcal{N}$, то все ненулевые гомоморфизмы $\varphi: G \rightarrow A$ – мономорфизмы;
- 2) если $G \in \mathcal{N}$, то G – квазиоднородная эндотранзитивная группа;
- 3) если $0 \neq a \in A$, то при условии $\Pi(B) \cap \Pi(\langle a \rangle_*) \neq \emptyset$ найдется $t \in T(B)$ со свойством $t \geq t(a)$;
- 4) если $0 \neq a \in A$ – элемент максимального типа t и $t \in T(B), T(G)$, то $t(z) \leq t$ для любого $z \in A$ с условием $\Pi(\langle z \rangle_*) \cap \Pi(\langle a \rangle_*) \neq \emptyset$; в частности, t – наибольший тип в $T(A)$, если A квазиоднородна;
- 5) если $t \in T(G)$ – максимальный тип, то t максимален в $T(A)$; в этом случае условие $G \in \mathcal{N}$ влечет, что B – прямое слагаемое в A с дополнительным прямым слагаемым $D \cong G$, причем D – однородная группа при $\Pi(B) \cap \Pi(G) \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Докажем более общий факт. Если $t(b) \geq t(g)$ для некоторых $0 \neq b \in B, g \in G$, то найдется $\eta: B \rightarrow G$ со свойством $\eta b \neq 0$. Можно считать, что $\chi(b) \geq \chi(g)$, и пусть p – такое простое число, что $h_p(b) < \infty$. Как и в лемме 2, можно считать, что $h_p(b) = h_p(g) = 0$. Тогда $\chi(b + p^n g) \leq \chi(mg)$, причем типы этих элементов совпадают, так как b, g из взаимно дополнительных квазислагаемых, где натуральное n таково, что p^n не делит m^2 . Поэтому $fb + p^n fg = mg$ для некоторого $f \in R$. Если эндоморфизм $\pi \in R$ такой, что $\pi \mid G = m \cdot 1_G$ и $\text{Ker } \pi = B$, то $\pi fb + p^n \pi fg = m^2 g$. Имеем $\pi f: B \rightarrow G$ и $\pi fb \neq 0$ в силу выбора n . Пусть теперь $G \in \mathcal{N}$. Если $f: G \rightarrow A$ и $\text{Ker } f \neq 0$, то $fG \not\subseteq G$. Тогда если эндоморфизм $\theta \in R$ такой, что $\theta G = 0$ и $\theta \mid B = m \cdot 1_B$, то $\theta f \neq 0$. По доказанному найдется $\eta: B \rightarrow G$ со свойством $\eta \theta f \neq 0$, это эндоморфизм группы G с ненулевым ядром.

2) Если $a, b \in G$ и $\chi(a) = \chi(b)$, то $fa = b$ для некоторого $f \in R$. Имеем $f|G \in E(G)$. В противном случае $0 \neq \theta f: G \rightarrow A$ и $\text{Ker } \theta f \neq 0$, где θ – такой же эндоморфизм, как в 1). Итак, G эндотранзитивна. Если $h_p(g) = \infty$, где $0 \neq g \in G$, то $\chi(pg) = \chi(g)$. Поэтому $pfg = g$ для некоторого $f \in R$ и, значит, $1_G = pf$. Откуда следует, что $pG = G$. Это доказывает ее квазиоднородность.

3) Имеем $ta = b + g$, где $b \in B, g \in G, t(a) = t(ma) \leq t(b), t(g)$. Если $b \neq 0$, то $t = t(b)$. Предположим, что $b = 0$. Тогда $a \in G$. По условию найдется $b \in B \setminus pB$, где p – такое простое число, что $h_p(a) < \infty$. Как и выше, считаем, что $h_p(a) = 0$. Имеем $\chi(a + p^n b) \leq \chi(ma + mb)$, где типы этих элементов совпадают и n такое же, как в 1). Поэтому, аналогично 1), $\theta fa + p^n \theta fb = m^2 b$. Здесь $0 \neq \theta fa \in B$ и $t(\theta fa) \geq t(a)$. Заметим еще, что $t(b) \leq t((p^n \theta f - m^2 \cdot 1_B)b) = t(\theta fa)$, т.е. если $\Pi(\langle b \rangle_*) \cap \Pi(\langle g \rangle_*) \neq \emptyset$, где $0 \neq b \in B, 0 \neq g \in G$, то существует эндоморфизм группы B , переводящий b в некоторый элемент этой группы типа $\geq t(g)$.

4) Пусть $tz = x + y$, где $x \in B, y \in G$. Имеем $t(z) \leq t(x), t(y)$. Если $h_p(z), h_p(a) < \infty$, то, например, $h_p(x) < \infty$. По условию существует $0 \neq g \in G$ типа t . Поэтому это утверждение вытекает из максимальности t и замечания в конце доказательства 3).

5) Допустим, что нашелся $0 \neq a \in A$ со свойством $t(a) > t = t(g)$, где $g \in G$. Тогда $\Pi(G) \cap \Pi(\langle a \rangle_*) \neq \emptyset$, но это противоречит максимальности t по доказанному свойству 3). Пусть теперь $G \in \mathcal{N}$. Если $\Pi(G) \cap \Pi(B) = \emptyset$, то $B \oplus G$ – сервантная подгруппа в A . Действительно, если $px = b + g$, где $p \in \Pi(A), b \in B, g \in G$, и, например, $p \in \Pi(G)$, то $pB = B$ и $b \in pB$. Откуда $g \in pG$ и, значит, $x \in B \oplus G$. Сервантность влечет совпадение этой подгруппы с A .

Предположим, что $\Pi(B) \cap \Pi(G) \neq \emptyset$. Так как по 2) G квазиоднородна, то $\Pi(G) = \Pi(\langle g \rangle_*)$. Тогда по 3) $t \in T(B)$ и t – наибольший тип в $T(G)$ по 4). Если $0 \neq \gamma \in S = E(G)$, то $t(\gamma g) = t(g)$. Поэтому $\chi(\gamma g) = \chi(ng)$ для некоторого натурального n и, значит, $f\gamma g = ng$, где $f \in S$. Откуда $f\gamma = n \cdot 1_G$. Следовательно, любой элемент кольца S является целым кратным обратимого. В частности, все ненулевые эндоморфизмы группы G сохраняют типы ее элементов и все левые идеалы кольца S имеют вид nS , где n – целые числа. С другой стороны, если $t(x) < t$ для некоторого $x \in G$, то согласно сделанному замечанию в конце доказательства 3) существует эндоморфизм группы G , переводящий x в некоторый элемент типа t . Это доказывает однородность G . Так как G эндотранзитивна, то отображение $S \ni \gamma \rightarrow \gamma g$ изоморфно вкладывает S^+ в $F = G(\chi)$, где $\chi = \chi(g)$. Поскольку для $x, y \in F$ условие $\chi_F(x) \leq \chi_F(y)$ эквивалентно $\chi_G(x) \leq \chi_G(y)$, то любой эндоморфизм группы F однозначно продолжается до эндоморфизма $G = \langle F \rangle_*$. Умножение группы S^+ слева и справа на $0 \neq s \in S$ однозначно действуют на $1 \in S^+$. Рассматривая их как эндоморфизмы S^+ , получаем, что $s\gamma = \gamma s$ для любого $\gamma \in S$, т.е. S – коммутативное кольцо главных идеалов. Подгруппу $A(\chi)$ можно рассматривать как S -модуль. Действительно, если $b \in A(\chi)$, то $t(b) = t$, так как t – максимальный тип, поэтому $b = \gamma g$ для некоторого $\gamma \in R$. Полагаем $sb = \gamma sg$. Фактормодуль $E = A(\chi)/B(\chi)$ квазиизоморфен циклическому S -модулю $G(\chi) \cong Sg$. Так как S – кольцо главных идеалов, то $E \cong S^+$ и, значит, $B(\chi)$ – прямое слагаемое в $A(\chi) = B(\chi) \oplus M$. Имеем $A(t) = \langle B(\chi) \rangle_* \oplus D$, где $D = \langle M \rangle_*$. Так как $G \subseteq A(t)$, то $A = D \oplus B$. Поскольку D квазиизоморфна G , то $D \in \mathcal{N}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть A – эндотранзитивная группа без кручения, $t \in T(A)$ – максимальный тип, эндоморфизм $\alpha \in R$ с максимальным ненулевым ядром и $\alpha A(t) \neq 0$. Тогда $B = \text{Ker } \alpha$ – прямое слагаемое в A с дополнительным прямым слагаемым $D \in \mathcal{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g \in A(t)$ и $\alpha g \neq 0$. Так как $t(\alpha g) = t(g)$, то $\chi(mg) = \chi(\alpha g)$ для некоторого натурального m . Откуда следует, что существует $f \in R$ со свойством $fg = mg$ и $\text{Ker } f = B$ ($\beta \alpha g = mg$ для некоторого β , тогда $f = \beta \alpha$). Имеем $\langle B, g \rangle \subseteq \text{Ker}(f^2 - mf)$. Значит, $f^2 = mf$. Откуда $mA \subseteq B \oplus G$, где $G = \langle fA \rangle_*$. В силу максимальности $\text{Ker } f$ все ненулевые гомоморфизмы $G \rightarrow A$ являются мономорфизмами. В частности, $G \in \mathcal{N}$. Теперь утверждение теоремы вытекает из леммы 3, п. 5).

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть A – квазиоднородная группа, удовлетворяющаясылке теоремы 4. Тогда D – однородная эндотранзитивная группа, подгруппа $A(t)$

плотна в A в ее Z -адической топологии, причем любой элемент из $A(t)$ можно вложить в прямое слагаемое группы A , изоморфное D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Однородность D следует из леммы 3, п. 5) в силу квазиоднородности A . Имеем $A = B \oplus D$. По лемме 3, п. 4) t – наибольший тип в $T(A)$. Если $b \in B \setminus pB$, то $t(p^n b + x) = t(b)$ для любого $x \in D$. Теперь так же, как в доказательстве леммы 2, $A(t)$ плотна в A в ее p -адической топологии для каждого $p \in \Pi(A)$, значит, $A(t)$ плотна в Z -адической топологии. Если теперь $0 \neq a \in A(t)$, то найдется $x \in D$ со свойством $\chi(a) = \chi(x)$. Поэтому $fx = a$ и $\varphi a = x$ для некоторых $f, \varphi \in R$. Если π – проекция A на D , то для $G = fD$ имеем $\delta A = G$ и $\delta \mid G = 1_G$ (так как $G = fD \cong D$ и $\delta a = a$), т.е. G – прямое слагаемое в A .

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть $A \in \mathcal{L}$ – квазиоднородная группа, удовлетворяющая условию максимальности на ядра эндоморфизмов (в частности, пусть A имеет конечный p -ранг для некоторого $p \in \Pi(A)$), и $A \notin \mathcal{N}$. Группа A эндотранзитивна тогда и только тогда, когда она является конечной прямой суммой изоморфных однородных вполне транзитивных групп из класса $\mathcal{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость вытекает из леммы 2, следствия 5 и леммы 3, пп. 3), 4), так как если $A = B \oplus D$, где $D \in \mathcal{N}$, то B – эндотранзитивная группа, удовлетворяющаясылке следствия как прямое слагаемое. Это следует из того, что если θ – проекция A на B , то $f\theta \in R$ для любого $f \in E(B)$. Поэтому B также имеет прямое слагаемое из $\mathcal{N}$. В силу условия на ядра эндоморфизмов разложение группы A в прямую сумму групп должно быть конечным. Достаточность следует из того факта, что конечная прямая сумма однородных вполне транзитивных групп является эндотранзитивной группой [1, теорема 3.1].

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть $A \in \mathcal{L}$ – группа, удовлетворяющая условию максимальности на ядра эндоморфизмов, и $A \notin \mathcal{N}$. Тогда

- 1) A эндотранзитивна тогда и только тогда, когда $A = \bigoplus_{i=1}^n A_i$, где A_i – квазиоднородные эндотранзитивные группы из $\mathcal{L} \cap \mathcal{N}$ или эндотранзитивные группы из следствия 6, и $\Pi(A_i) \cap \Pi(A_j) = \emptyset$ при $i \neq j$ ($i, j = 1, \dots, n$);
- 2) эндотранзитивность A влечет ее транзитивность, причем если все A_i из 1) однородны, то A вполне транзитивна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) *Необходимость.* Согласно лемме 1 $\alpha A(t) \neq 0$ для некоторого максимального типа t . Если $\text{Ker } \alpha$ максимально, то по теореме 4 $A = B \oplus D$, где $D \in \mathcal{N}$. Так же, как в следствии 6, B удовлетворяетсылке следствия 7. Поэтому применяя теорему 4 несколько раз, получим, что $A = \bigoplus_{k=1}^m D_k$, где $D_k \in \mathcal{N}$. Заметим, что если $\Pi(D_k) \cap \Pi(D_s) \neq \emptyset$ при $k \neq s$, то согласно лемме 3 D_k и D_s – однородные группы, содержащие ненулевые элементы максимальных типов, поэтому типы этих групп одинаковы. Отсюда вытекает существование указанных прямых слагаемых A_i .

Достаточность. Нетрудно показать, что если $A = \bigoplus_{i=1}^n A_i$ и $\Pi(A_i) \cap \Pi(A_j) = \emptyset$ при $i \neq j$, то A эндотранзитивна тогда и только тогда, когда все A_i ($i \in I$) – эндотранзитивные группы [1, предложение 1.3]. Далее, всякая эндотранзитивная группа $D \in \mathcal{N}$ транзитивна. Группа $A = \bigoplus A_i$, где A_i – изоморфные однородные вполне транзитивные группы из класса $\mathcal{N}$, обладает таким свойством, что любой ее элемент можно вложить

в прямое слагаемое группы A , изоморфное A_i [1, лемма 3.3], откуда следует транзитивность A . В частности, из сказанного вытекает справедливость 2).

ЗАМЕЧАНИЕ. Существуют транзитивные, но не вполне транзитивные группы из $\mathcal{N}$ даже конечного ранга [2, пример 7.2]. Эндотранзитивные группы из $\mathcal{L} \cap \mathcal{N}$ описаны в [1]. Поэтому следствие 7 полностью описывает рассматриваемые в нем группы. Любые прямые разложения эндотранзитивной группы из следствия 7 в прямую сумму групп из класса $\mathcal{N}$ изоморфны; это доказывается аналогично следствию 4.5 из [1].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Добрусин Ю.Б. О продолжениях частичных эндоморфизмов абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. Вып. 4. Томск, 1986. С. 36–53.
- [2] Добрусин Ю.Б. О продолжениях частичных эндоморфизмов абелевых групп без кручения, 2 // Абелевы группы и модули. Вып. 5. Томск, 1985. С. 31–41.
- [3] Крылов П. А. Сильно однородные абелевы группы без кручения // Сиб. матем. ж. 1983. Т. 24. № 2. С. 77–84.
- [4] Крылов П. А. Вполне транзитивные абелевы группы без кручения // Алгебра и логика. 1990. Т. 29. № 5. С. 549–560.
- [5] Чехлов А. Р. Связные квазисервантно инъективные абелевы группы // Изв. вузов. Матем. 1989. № 10. С. 84–87.
- [6] Arnold D. M. Strongly homogeneous torsion-free abelian groups of finite rank // Proc. Amer. Math. Soc. 1976. V. 56. P. 67–72.
- [7] Dugas M., Shelah S. E -transitive groups in L // Contemp. Math. 1989. V. 87. P. 191–199.
- [8] Hausen J. E -transitive torsion-free abelian groups // J. Algebra. 1987. V. 107. № 1. P. 17–27.
- [9] Vinsonhaler C., Wickless W. A generalization of quasi-pure injective torsion-free abelian groups of finite rank // Houston J. Math. 1996. V. 22. № 3. P. 473–484.
- [10] Беккер И. Х., Крылов П. А., Чехлов А. Р. Абелевы группы без кручения, близкие к алгебраически компактными // Абелевы группы и модули. Вып. 11, 12. Томск, 1994. С. 3–52.
- [11] Михалев А. В., Мишина А. П. Бесконечные абелевы группы: методы и результаты // Фундамент. и прикл. матем. 1995. Т. 1. № 2. С. 319–375.