Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. В. Вегнер, С. Б. Гашков, Сложность приближенной реализации липшицевых функций схемами в континуальных базисах, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 1, 27–43

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm7099>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 14:18:22

Сложность приближенной реализации липшицевых функций схемами в континуальных базисах

Я. В. Вегнер, С. Б. Гашков

В работе показано, что любую функцию, удовлетворяющую условию Липшица на данном отрезке, можно приближенно вычислить схемой (неветвящейся программой) в базисе, состоящем из функций

$$x - y, \quad |x|, \quad x * y = \min(\max(x, 0), 1) \min(\max(y, 0), 1),$$

и всех констант из отрезка $[0, 1]$, сложность которой равна $O(1/\sqrt{\varepsilon})$, где ε – точность приближения. Указанная оценка сложности, вообще говоря, по порядку точная.

Библиография: 21 название.

1. Введение

Назовем *базисом* произвольное множество B непрерывных функций (операций) $\omega: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, чьи аргументы и значения принадлежат $\mathbb{R}$.

Схемой в базисе B называется произвольная последовательность функций $f_1(X), \dots, f_L(X)$, $X = (x_1, \dots, x_n)$, в которой первые n функций определяются равенствами $f_i(X) = x_i$, а каждая следующая функция $f_l(X)$ вычисляется через некоторые из предыдущих с помощью одной из базисных операций w_k , $k = k(l)$ (схемы иногда называют *неветвящимися программами*). Схема называется *формулой*, если каждая функция $f_l(X)$, $l > n$, используется в ней для вычисления следующих за ней функций не более одного раза. *Сложностью* схемы (формулы) называется число L составляющих ее функций. Функция f *реализуется* схемой S , если f равна какой-то из функций f_i схемы S . *Глубиной* схемы S называется максимальная длина $D(S)$ цепи элементов от входов (или констант) схемы к выходам. Эти определения использовались [1], [2] и являются аналогами соответствующих определений, используемых в теории сложности булевых функций [3].

Следуя [1], [2], для любой непрерывной функции $f \in C(I)$ определим *сложность ε -приближения* f схемами в базисе B как

$$L_B(f, \varepsilon) = \min\{L_B(g) : \|g - f\| \leq \varepsilon\},$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 11-01-00508-а и 11-01-0792-а), и программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН “Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения” (проект “Задачи оптимального синтеза управляющих систем”).

где $\|\cdot\|$ суть чебышевская норма в пространстве $C(I)$. Для произвольного компакта $K \subset C(I)$ определим сложность его ε -аппроксимации схемами в базисе B как $L_B(K, \varepsilon) = \max_{f \in K} L_B(f, \varepsilon)$. Для произвольного конечного базиса B и любого компакта $K \subset C(I)$ мощностным методом Шеннона–Лупанова может быть доказана следующая нижняя оценка (в [1] она приведена с остаточным членом):

$$L_B(K, \varepsilon) \geq \rho_B \frac{H_\varepsilon(K)}{\log H_\varepsilon(K)} (1 + o(1)),$$

где $H_\varepsilon(K)$ – колмогоровская ε -энтропия компакта K (определение и методы ее вычисления см. в [4]), а константа ρ_B выражается, как и в [3], через максимальное число существенных переменных, какое может быть у $f \in B$, как $\rho_B = 1/(m-1)$.

Верхние оценки, совпадающие по порядку (а иногда и асимптотически) с этой нижней оценкой, для некоторых базисов и многих функциональных компактов, обычно рассматриваемых в теории приближений, были получены вторым из авторов этой статьи с 1983 по 1988 гг. в [5]–[11]. Более подробное изложение см. в [1], [2]. Например, для класса $W(M, N, I)$ функций f , не превосходящих по модулю N и удовлетворяющих условию Липшица

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

на a отрезке $I = [a, b]$, и для базисов

$$B_1 = \left\{ x - y, xy, \frac{1}{2} \right\}, \quad B_2 = \left\{ x - y, |x|, \frac{x}{2}, 1 \right\}$$

в [1], [11] получена асимптотика

$$L_{B_i}(W, \epsilon) \sim \frac{H_\epsilon(W)}{\log_2 H_\epsilon(W)}.$$

Однако для базисов, содержащих конечное число функций и континуум констант (называемых в [1], [2] *почти конечными* базисами), получить какие-либо универсальные нижние оценки нельзя. Действительно, в [1] показано, что можно построить функцию $g(x, y)$, удовлетворяющую условию Липшица на $\mathbb{R}^2$, такую, что для

$$K = \left\{ f : f(0) = 0, \omega(f, \tau) \leq \frac{\tau}{2} \right\} \subset W\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, [0, 1]\right)$$

и $B = \{g(x, y)\} \cup \mathbb{R}$ имеем

$$L_B(K, \epsilon) \leq 2, \quad H_\epsilon(K) = \Omega\left(\frac{1}{\epsilon}\right).$$

Но такие оценки можно получить для базисов, удовлетворяющих некоторым ограничениям, например, для почти конечных полиномиальных базисов или липшицевых базисов. Здесь *липшицевым* называется базис, состоящий из конечного числа функций, удовлетворяющих условию Липшица, и констант из некоторого отрезка, а *полиномиальным* – базис, состоящий из конечного числа полиномов и всех действительных констант.

Для любого компакта $K \subset C(I^n)$ в [1], [10] доказано следующее.

(i) Для любого липшицева или полиномиального базиса

$$L_B(K, \varepsilon) \geq c_B \min \left(\sqrt{H_{2\varepsilon}(K)}, \frac{H_{2\varepsilon}(K)}{\log 1/\varepsilon} \right),$$

где $c_B > 0$ – константа, зависящая от B .

(ii) Если в липшицевом базисе все функции $f \in B$ удовлетворяют условию

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq \max_i |x_i - y_i|,$$

то

$$L_B(K, \varepsilon) \geq (1 + o(1)) \frac{\rho_B}{\rho_B + n} \frac{H_{2\varepsilon}(K)}{\log(1/\varepsilon)},$$

где n – число переменных у функций класса K .

(iii) Если почти конечный базис содержит только липшицевы функции и *мультилинейные*¹ функции, а константы принадлежат некоторому отрезку, то при реализации класса K

$$L_B^\Phi(K, \varepsilon) \geq c_B \min \left(\sqrt{H_{2\varepsilon}(K)}, \frac{H_{2\varepsilon}(K)}{\log 1/\varepsilon} \right).$$

(iv) Если все $f \in B$ удовлетворяют условию

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq \sum_i |x_i - y_i|,$$

то

$$L_B^\Phi(K, \varepsilon) \geq (1 + o(1)) \frac{H_{2\varepsilon}(K)}{2 \log \max\{H_{2\varepsilon}(K), 1/\varepsilon\}}.$$

(v) Если B мультилинеен, то

$$L_B^\Phi(f, \varepsilon) \geq (1 + o(1)) \frac{(1 + \rho_B) H_{2\varepsilon}(K)}{(n + 1) \log \max(H_{2\varepsilon}(K), 1/\varepsilon)}.$$

Доказательство этого факта близко к доказательству аналогичных оценок в работе второго автора [12] (1980 г.) В случае липшицевых базисов оно основано на элементарных геометрических соображениях, а в случае полиномиальных базисов использует оценки Петровского–Олейник [13] для числа компонент алгебраических поверхностей². В 1983 г. подобный метод применил Бен-Ор в [15] для оценки сложности алгебраических вычислительных деревьев³.

В [1] показано, что в (iii) заменить $L_B^\Phi(K, \varepsilon)$ на $L_B(K, \varepsilon)$ нельзя. Действительно, для класса K функций

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx, \quad |c_n| \leq 2^{-n}, \quad \text{и} \quad B = \{g(x, y), x + y, xy\} \cup [-1, 1],$$

¹Полиномиальные функции, у которых степени по каждой переменной равны 1.

²Эти результаты были использованы Витушкиным [14] для оценки сложности таблиц для непрерывных функций.

³Вместо [13] он использовал полученные позже аналогичные результаты Милнора–Тома [16].

где

$$g(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sin nx \sin(\alpha_n y),$$

при некоторой последовательности $\alpha_n \in [0, 2\pi]$

$$L_B(K, \epsilon) = O(\log \log 1/\epsilon) = o\left(\min\left(\sqrt{H_{2\epsilon}(K)}, \frac{H_{2\epsilon}(K)}{\log 1/\epsilon}\right)\right), \quad H_\epsilon(K) = \Omega(\log^2 \epsilon).$$

Там же показано, что оценка (iii) достижима. А именно, для класса $K \subset C[0, 1]$ функций

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\arctg x)^n, \quad |c_n| \leq 2^{-n}, \quad \text{и} \quad B = \{h(x, y), x+y, xy, \arctg x\} \cup [-1, 1],$$

где

$$h(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (\arctg x)^n \sin(\alpha_n y), \quad L_B(K, \epsilon) = O\left(\log \log \frac{1}{\epsilon}\right),$$

$$L_B^\Phi(K, \epsilon) = \Omega\left(\log \frac{1}{\epsilon}\right), \quad H_\epsilon(K) = \Omega(\log^2 \epsilon).$$

Для класса $K \subset C[0, 1]$ функций

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n, \quad |c_n| \leq 2^{-n},$$

$$B_1 = \{x + y, xy\} \cup \mathbb{R}, \quad B_2 = \{x + y, \phi(x)\phi(y)\} \cup [-1, 1],$$

где $\phi(x) = (|x + 1| - |x - 1|)/2$ имеем

$$H_\epsilon(K) = \Omega(\log^2 \epsilon), \quad L_{B_i}(K, \epsilon) = \Omega\left(\log \frac{1}{\epsilon}\right), \quad H_\epsilon(K) = \Omega(\log^2 \epsilon),$$

что показывает точность по порядку оценок (i), (iii)–(v).

В [1] для

$$B = \{x - y, \max(x, y), |x|, 1\} \cup \{cx : 0 \leq c \leq 1\}$$

доказано, что

$$L_B^\Phi(W(M, N, [a, b]), \epsilon) = \Omega\left(\frac{1/\epsilon}{\log(1/\epsilon)}\right),$$

т.е. оценка (iv) точна по порядку для класса липшицевых функций. В [1] доказано, что для

$$K = \left\{f \in W\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, [0, 1]\right), f(0) = 0\right\}, \quad B = \left\{\frac{x+y}{2}, \max(x, y), -x\right\} \cup [0, 1]$$

выполнено

$$L_B(K, \epsilon) = \Omega\left(\frac{1}{\epsilon \log(1/\epsilon)}\right),$$

т.е. оценка (ii) тоже точна по порядку. В [1], [10] доказано, что для

$$B = \{x + y, xy\} \cup \mathbb{R}$$

выполнено

$$L_B^\Phi(W(M, N, [a, b]), \epsilon) = \Omega\left(\frac{1}{\epsilon}\right).$$

Здесь нижняя оценка выше, чем в (v). Для некоторых классов $L_B^\Phi(K, \epsilon)$ может быть еще больше в сравнении с $H_\epsilon(K)$, например, в [1], [17] доказано, что для⁴

$$K = \sum_{n=1}^{\infty} c_n T_{3^n}(x), \quad |c_n| \leq 2^{-n},$$

имеем

$$L_B^\Phi(K, \epsilon) = \Omega(\epsilon^{-\log_2 3}), \quad L_B(K, \epsilon) = \Omega\left(\log \frac{1}{\epsilon}\right), \quad H_\epsilon(K) = \Omega(\log^2 \epsilon).$$

Это также показывает достижимость по порядку тривиальной нижней оценки

$$L_B(K, \epsilon) \geq \Omega(\log(L_B^\Phi(K, \epsilon))).$$

Для полиномиального немультитлинейного базиса

$$B' = \{x + y, xy, T_3(x)\} \cup \mathbb{R}$$

имеем

$$L_{B'}^\Phi(K, \epsilon) = O(\log^2 \epsilon).$$

Для почти конечных липшицевых базисов получение нижних оценок можно свести к получению нижних оценок для конечных базисов⁵.

На этом пути можно доказать следующее [2].

(i) Пусть B – произвольный липшицев почти конечный базис. Тогда для любой функции f такой, что при $\epsilon \rightarrow 0$ $L_{B_0}(f, \epsilon)/\log(1/\epsilon) \rightarrow \infty$,

$$L_B(f, \epsilon) \geq c_B \min\left(\sqrt{L_{B_0}(f, \epsilon + \epsilon^2) \log L_{B_0}(f, \epsilon + \epsilon^2)}, \frac{L_{B_0}(f, \epsilon + \epsilon^2) \log L_{B_0}(f, \epsilon + \epsilon^2)}{\log 1/\epsilon}\right).$$

(ii) Если в дополнение к (i) для всех функций $f \in B$ выполнено $|f(x) - f(y)| \leq \max_i |x_i - y_i|$, то

$$L_B(f, \epsilon) \gg \frac{L_{B_0}(f, 2\epsilon) \log \min(L_{B_0}(f, 2\epsilon), 1/\epsilon)}{\log 1/\epsilon}.$$

⁴ $T_n(x)$ – полиномы Чебышёва. K содержит нигде не дифференцируемые функции.

⁵Можно рассуждать следующим образом. Пусть S – схема в базисе B , ϵ -аппроксимирующая f , $L_B(S) = L_B(f, \epsilon)$. Заменим в ней константы на их двоично-рациональные аппроксимации с точностью δ . Новую схему можно реализовать в конечном базисе B_0 , получающимся удалением из B всех констант и добавлением операций $x - y$, xy и константы $1/2$. Кажется, что реализуемая ей функция g удовлетворяет неравенству $\|g - f\| \leq \epsilon + L_B(S)\delta$, и, продолжая рассуждения, можно получить такую же нижнюю оценку, как и в конечном базисе. Но это неверно. Из леммы 27 [1] следует, что функция g , реализуемая новой схемой, удовлетворяет неравенству $\|g - f\| \leq \epsilon + c_B^{D_B(S)}\delta$. Эта оценка хуже, чем $\|g - f\| \leq \epsilon + L_B(S)\delta$. Действительно, “вытянутая в линию” схема из L элементов $2x$ реализует функцию $(2^L)x$, и если изменить x на δ , то выход изменится на $\delta 2^L$, $L = L(S) = D(S)$.

(iii) Если в дополнение к (i) все $f \in B$ удовлетворяют по каждой переменной условию Липшица с множителем 1, то

$$L_B^\Phi(f, \varepsilon) \gg \frac{L_B^\Phi(f, \varepsilon + \varepsilon^2)}{\log \max(L_B^\Phi(f, \varepsilon + \varepsilon^2), 1/\varepsilon)}.$$

(iv) Если базис есть объединение липшицева и мультилинейного базисов и имеет ограниченные константы, то

$$L_B^\Phi(f, \varepsilon) \geq c_B \min\left(\sqrt{L_{B_0}^\Phi(f, \varepsilon + \varepsilon^2)}, \frac{L_{B_0}^\Phi(f, \varepsilon + \varepsilon^2)}{\log 1/\varepsilon}\right).$$

Из приведенного утверждения можно вывести часть указанных выше нижних оценок и получить оценки сложности индивидуальных функций, если известны такие оценки для соответствующих конечных базисов⁶.

В приведенных примерах энтропия классов мала, и в нижних оценках обе границы, из которых выбирается минимум, или по порядку совпадают, или граница квадратного корня ниже.

Интересно было бы найти естественные примеры классов с большой энтропией, для которых достигалась граница квадратного корня. Целью заметки является построение примера базиса, для которого достигается нижняя оценка квадратного корня в случае приближенной реализации естественного функционального класса с большой энтропией схемами в почти конечном кусочно-полиномиальном липшицевом базисе. В качестве такого класса будет использован класс $W(M, N, I)$ функций, удовлетворяющих условию Липшица.

2. Постановка задачи и формулировка теоремы

Рассмотрим задачу о приближенной реализации произвольной $f \in W(M, N, I)$ с погрешностью $\varepsilon > 0$ схемой в почти-конечном липшицевом базисе

$$B = \{x - y, x * y, |x|\} \cup [0, 1],$$

где $x * y = \min(\max(x, 0), 1) \cdot \min(\max(y, 0), 1)$.

Будет доказана

ТЕОРЕМА 1. *Любую функцию $f \in W[M, N, [a, b]]$ можно приближенно реализовать с любой заданной точностью $\varepsilon > 0$ схемой в B сложности $O(1/\sqrt{\varepsilon})$.*

Из нижней оценки следует, что оценка теоремы по порядку точная, так как согласно [4]

$$H_\varepsilon(W(M, N, [a, b])) = \frac{M(b-a)}{\varepsilon} + \log \frac{N}{\varepsilon} + O(1).$$

⁶Из нижних оценок для $L_B(K, \varepsilon)$ не следует никаких оценок для сложности индивидуальных функций $L_B(f, \varepsilon)$. Действительно, если, например, класс $K \subset W(M, N, I)$ содержит только функции, точно реализуемые в базисе $\{x + y, |x|, -1/2\}$, то для любой $f \in K$ $L_B(f, \varepsilon) = O(1)$ и $H_\varepsilon(K) = \Omega(H_\varepsilon(K))$. Колмогоров в [18] поставил вопрос о существовании сложных функций в этом и подобных классах (у него функции аппроксимировались булевыми схемами, и рассматриваемая им мера сложности сейчас называется битовой сложностью). Существенные результаты в этом направлении были получены Асариным в [19] (для битовой сложности), а также в [2] (для рассматриваемых здесь мер сложности).

Поэтому справедливо

СЛЕДСТВИЕ 1. Для $B = \{x - y, x * y, |x|\} \cup [0, 1]$

$$L_B(W(M, N, [a, b]), \epsilon) = \Omega\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right).$$

Из этого следствия вытекает, что нижняя оценка для почти конечных липшицевых базисов неумлучшаема.

Так как $x * y$ точно выражается формулой в базисе $B = \{x - y, xy, |x|, 1/2\}$, верны также следующие утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для $B = \{x - y, xy, |x|\} \cup [0, 1]$

$$L_B(W(M, N, [a, b]), \epsilon) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Для

$$\begin{aligned} B_1 &= \{x - y, |x|, 1\} \cup \{cx : 0 \leq c \leq 1\}, \\ B_2 &= \{x - y, \max(x, y), |x|, 1\} \cup \{cx : 0 \leq c \leq 1\}, \\ B_3 &= \{x + y, \max(x, y), |x|, -x, 1\} \cup \{cx : 0 \leq c \leq 1\} \end{aligned}$$

имеем

$$L_{B_i}(W(M, N, [a, b]), \epsilon) = \Omega\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right).$$

Из результатов [1] можно вывести, что для

$$B_4 = \left\{ \frac{x + y}{2}, \max(x, y), |x|, -x, 1 \right\} \cup \{cx : 0 \leq c \leq 1\}$$

выполнено

$$\begin{aligned} L_{B_4}\left(W\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, [0, 1]\right), \epsilon\right) &= \Omega\left(\frac{1}{\epsilon \log(1/\epsilon)}\right), \\ L_{B_3}^\Phi(W(M, N, [a, b]), \epsilon) &= \Omega\left(\frac{1}{\epsilon \log(1/\epsilon)}\right). \end{aligned}$$

Применяя лемму 38 и теорему 2 [1], можно получить также

СЛЕДСТВИЕ 4. Для $B = \{x - y, xy\} \cup [0, 1]$

$$\Omega\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right) \leq L_B(W(M, N, [a, b]), \epsilon) \leq \Omega\left(\frac{\log(1/\epsilon)}{\sqrt{\epsilon}}\right).$$

Перед началом доказательства заметим следующее. Необходимым условием достижимости оценки квадратного корня является использование “вытянутых в линию” схем S , у которых $L(S) = \Omega(D(S))$. Действительно, в доказательстве нижних оценок фактически оценивается $L(S)D(S)$, из которой получается оценка квадратного корня с учетом того, что $L(S) \geq D(S)$. Если использовать для аппроксимации функций схемы, у которых $D(S) = \Omega(\log_2 L(S))$ (т.е. схемы с минимальной по порядку глубины), то методом [1] можно получить нижнюю оценку

$$L_B(K, \epsilon) \geq \Omega\left(\frac{H_{2\epsilon}(K)}{\log \max\{H_{2\epsilon}(K), 1/\epsilon\}}\right).$$

“Вытянутые” подсхемы в доказательстве появляются в леммах 8, 11, 10, 7. Сама схема тоже является “вытянутой”. Кратко результаты работы были изложены в [20]. Существенную роль в доказательстве играет лемма 8, идея которой заимствована из работы Турана и Ватана [21].

3. Вспомогательные леммы

ЛЕММА 1. Пусть заданы функция $f \in W[a, b]$, $f(a) = 0$, и величина δ . Тогда найдется кусочно-линейная функция $\tilde{f}(x)$ с угловыми коэффициентами ± 1 , $\tilde{f}(a) = 0$, меняющая поведение только в точках $\{a + i\delta : i = 0, 1, \dots, \lceil (b - a)/\delta \rceil - 1\}$, приближающая функцию f на отрезке $[a, b]$ с погрешностью δ .

Доказательство можно найти в [4].

ЛЕММА 2. Пусть заданы функция $f \in W(1, 1, [a, b])$, $f(a) = 0$, $f(b) = 0$, и величина δ такая, что $b - a = n\delta$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда найдется кусочно-линейная функция $\tilde{f}(x)$ с угловыми коэффициентами ± 1 , $\tilde{f}(a) = 0$, $\tilde{f}(b) = 0$, которая может менять поведение только в точках $\{a + i\delta/2 : i = 0, 1, \dots, 2n - 1\}$, приближающая функцию f на отрезке $[a, b]$ с погрешностью δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя лемму 1, находим функцию $\tilde{f}(x)$, меняющую поведение только в точках $a + i\delta$ и приближающую функцию f с погрешностью δ . Если $\tilde{f}(b) = 0$, то $\tilde{f}$ – искомая. Рассмотрим функцию

$$g(x) = \min(-x + b, \max(x - b, \tilde{f}(x))).$$

Функция $g(x)$ – кусочно-линейная с коэффициентами ± 1 . Поскольку липшицева функция $f(x)$ равна нулю в точке b , она не может выходить за пределы, входящие в определение функции $g(x)$, и погрешность приближения при замене функции $\tilde{f}(x)$ функцией $g(x)$ могла только уменьшиться. В силу того, что $b - a$ делится на δ нацело, функции $\min$ или $\max$ могли поменять поведение функции $\tilde{f}$ только в конце или середине отрезка $[a + i\delta, a + (i + 1)\delta]$, т.е. в точке вида $a + i\delta/2$.

ЛЕММА 3. Функции $x + y$ и $2x$ можно реализовать формулами сложности не более 6 в базисе B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $x + y = x - (0 - y)$, $2x = x + x$.

ЛЕММА 4. Пусть задана величина δ , $0 < \delta \leq 1$. Тогда функцию $h_\delta(x) = \max(0, \min(\delta, x))$ можно реализовать формулой сложности не более 10 в базисе B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $h_\delta(x) = 1/2 * (|x| - |x - \delta| + \delta)$.

4. Доказательство теоремы

Для простоты далее полагаем, что $M = N = 1$, $[a, b] = [0, 1]$. Общий случай доказывается аналогично (подобно [1]). Пусть задана погрешность ε . Можно далее считать, что $\varepsilon < 1/4$. Определим параметры $s = \lceil 1/\sqrt{\varepsilon} \rceil \geq 3$, $u = 1/s^2$, $v = 1/s$. Тогда

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{\varepsilon} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right), \quad \frac{1}{v} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + O(1), \quad u \leq \varepsilon, \quad v \leq \sqrt{\varepsilon}.$$

Отрезок $[0, 1]$ разбивается на отрезки $[kv, (k+1)v]$, $k = 0, \dots, s-1$. Через Δ_k обозначим отрезки $[kv + u, (k+1)v - u]$, $k = 0, \dots, s-1$.

Зафиксируем произвольную функцию $f \in W$. Представим ее в виде суммы двух функций

$$f(x) = f_1(x) + g_1(x),$$

где $f_1(x)$ – кусочно-линейная функция, равная $f(x)$ в точках kv , $k = 0, \dots, s$, в остальных точках продолженная по линейности, а $g_1(x)$ – функция, удовлетворяющая условию Липшица с константой 2, равная нулю в точках kv , $k = 0, \dots, s$. Рассмотрим функции $g_{1,k}(x)$, $k = 0, \dots, s-1$. Функция $g_{1,k}(x)$ определена на отрезке $[kv, (k+1)v]$ и равна сужению функции $g_1(x)$ на этот отрезок. Каждая функция $g_{1,k}(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой 2 и обращается в ноль на концах отрезка. Применяя к функции $g_{1,k}/2$ лемму 2, где $\delta = u/4$, найдем кусочно-линейную функцию $f_{2,k}(x)$ с угловыми коэффициентами ± 1 , меняющую поведение только в точках $kv + i\delta/2$, равную нулю в концах отрезка, и приближающую функцию $g_{1,k}/2$ с точностью $\delta \leq \varepsilon/4$, так что $\|g_{1,k} - 2f_{2,k}\| \leq \varepsilon/2$. Далее, рассмотрим функции $f_{3,k}(x)$, $k = 0, \dots, s-1$. Каждая функция $f_{3,k}(x)$ определена на отрезке $[kv, (k+1)v]$, совпадает с $f_{2,k}$ на отрезках $[kv, kv + u]$ и $[(k+1)v - u, (k+1)v]$ и доопределена по линейности на отрезке $\Delta_k = [kv + u, (k+1)v - u]$. Представим функцию $f_{2,k}$ в виде суммы

$$f_{2,k}(x) = f_{3,k}(x) + g_{3,k}(x),$$

где $g_{3,k}$ удовлетворяет условию Липшица с константой 2 и равна нулю на концах отрезка Δ_k и вне него. Применяя к функции $g_{3,k}/2$ лемму 2 при $\delta = u/8$, найдем функцию $f_{4,k}$ с угловыми коэффициентами ± 1 , меняющую поведение только в точках $kv + u + i\delta/2$, и приближающую функцию $g_{3,k}/2$ с точностью $\delta \leq \varepsilon/8$, так что

$$\|g_{3,k} - 2f_{4,k}\| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Определим теперь функции

$$f_3(x) = \begin{cases} f_{3,k}(x), & x \in [kv, (k+1)v], \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad f_4(x) = \begin{cases} f_{4,k}(x), & \text{если } x \in \Delta_k, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Далее мы построим схему, вычисляющую три функции $f_1(x)$, $f_3(x)$ и $f_4(x)$ со сложностью $O(1/\sqrt{\varepsilon})$. Покажем, как с их помощью вычислить f . Пусть $x \in [kv, (k+1)v]$. Верна цепочка равенств

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) + g_1(x) = f_1(x) + g_{1,k}(x) = f_1(x) + 2f_{2,k}(x) + \theta_1(x)\frac{\varepsilon}{2} \\ &= f_1(x) + 2(f_{3,k}(x) + g_{3,k}(x)) + \theta_1(x)\frac{\varepsilon}{2} \\ &= f_1(x) + 2\left(f_{3,k}(x) + 2f_{4,k}(x) + \theta_2(x)\frac{\varepsilon}{4}\right) + \theta_1(x)\frac{\varepsilon}{2} \\ &= f_1(x) + 2(f_3(x) + 2f_4(x)) + \theta_3(x)\varepsilon, \end{aligned}$$

где $\theta_i(x)$ обозначают функции, не превосходящие по модулю 1. Таким образом, схема, вычисляющая $f_1(x) + 2(f_3(x) + 2f_4(x))$, приближает функцию $f(x)$ с точностью ε .

Покажем теперь, как реализовать функции $f_1(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ со сложностью $O(1/\sqrt{\varepsilon})$.

4.1. Основные леммы.

ЛЕММА 5. *Функцию $f_1(x)$ можно точно реализовать формулой сложности $O(1/\sqrt{\varepsilon})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $f_1(x)$ кусочно-линейная, с фиксированными угловыми коэффициентами $d_k = (f(kv + v) - f(kv))/v$ на каждом из отрезков $[kv, (k+1)v]$, причем $|d_k| \leq 1$. Тогда функцию $f_1(x)$ можно реализовать формулой

$$f_1(x) = f_1(0) + \sum_{\substack{k=0, \\ d_k > 0}}^{s-1} d_k * h_v(x - kv) - \sum_{\substack{k=0, \\ d_k < 0}}^{s-1} (-d_k) * h_v(x - kv).$$

Сумма по всем индексам k представлена в таком виде, чтобы для реализации функции f_1 использовались только константы из отрезка $[0, 1]$. Все константы kv лежат в этом отрезке. Поскольку для числа отрезков s выполнено соотношение $s = 1/\sqrt{\varepsilon} + O(1)$, формула имеет сложность $O(1/\sqrt{\varepsilon})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Лемма верна и для базиса, в котором вместо кусочно-полиномиальной функции $x * y$ используется континуальное семейство линейных функций $\{cx : 0 \leq c \leq 1\}$.

ЛЕММА 6. *Функцию $f_3(x)$ можно точно реализовать формулой сложности $O(1/\sqrt{\varepsilon})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Реализуем каждую из функций $f_{3,k}(x)$ формулой сложности $O(1)$ и сложим выходы формул. Таким образом, общая сложность формулы составит $O(1/\sqrt{\varepsilon})$.

В самом деле, функция $f_{3,k}(x)$ меняет поведение только в точках $kv + iu/8$, $i = 0, 1, \dots, 8$ и $(k+1)v - u + iu/8$, $i = 0, 1, \dots, 8$. Обозначим через d_i угловые коэффициенты функции $f_{3,k}(x)$ на отрезках

$$\left[kv + \frac{i u}{8}, kv + \frac{(i+1)u}{8} \right], \quad i = 0, \dots, 7,$$

через e_i – угловые коэффициенты на отрезках

$$\left[(k+1)v - u + \frac{i u}{8}, (k+1)v - u + \frac{(i+1)u}{8} \right], \quad i = 0, \dots, 7,$$

где $d_i = \pm 1$, $e_i = \pm 1$. Обозначим через c угловой коэффициент функции $f_{3,k}(x)$ на отрезке Δ_k , $|c| \leq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} f_{3,k}(x) = & \sum_{\substack{i=0 \\ d_i=+1}}^7 h_{u/8} \left(x - kv - \frac{i u}{8} \right) - \sum_{\substack{i=0 \\ d_i=-1}}^7 h_{u/8} \left(x - kv - \frac{i u}{8} \right) \pm |c| * h_{|\Delta_k|} \left(x - kv - u \right) \\ & + \sum_{\substack{i=0 \\ e_i=+1}}^7 h_{u/8} \left(x - (k+1)v + u - \frac{i u}{8} \right) - \sum_{\substack{i=0 \\ e_i=-1}}^7 h_{u/8} \left(x - (k+1)v + u - \frac{i u}{8} \right) \end{aligned}$$

есть точная формула для функции $f_{3,k}$, где знак $\pm$ означает плюс, если $c \geq 0$, и минус, если $c < 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Лемма верна и для базиса, в котором вместо кусочно-полиномиальной функции $x * y$ используется континуальное семейство линейных функций $\{cx : 0 \leq c \leq 1\}$.

ЛЕММА 7. Функцию $f_4(x)$ можно точно реализовать схемой сложности $O(1/\sqrt{\varepsilon})$.

Для доказательства леммы 7 понадобятся

4.2. Еще несколько лемм.

ЛЕММА 8. Для любого натурального n имеется отображение Φ_n из множества двоичных наборов длины n в отрезок $[0, 1]$ и схема S_n сложности $O(n)$ с одним входом и n выходами такие, что для любого двоичного набора $(x_1, \dots, x_n)$ выполнено $S_n(\Phi_n(x_1, \dots, x_n)) = (x_1, \dots, x_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $g(z)$, определенную на отрезке $[0, 1]$, отображающую его в себя⁷:

$$g(z) = \begin{cases} 4z, & 0 \leq z \leq \frac{1}{4}, \\ 1, & \frac{1}{4} < z < \frac{3}{4}, \\ 4 - 4z, & \frac{3}{4} \leq z \leq 1. \end{cases}$$

Заметим, что $g(z)$ можно реализовать формулой

$$2\left(|z| + |z - 1| - \left|z - \frac{1}{4}\right| - \left|z - \frac{3}{4}\right|\right)$$

сложности $O(1)$. Рассмотрим также две функции $g_0^{-1}(z) = z/4$, $g_1^{-1}(z) = 1 - z/4$, определенные на отрезке $[0, 1]$, обладающие свойством $g(g_i^{-1}(z)) = z$. Функция $g_0^{-1}(z)$ отображает отрезок $[0, 1]$ в отрезок $[0, 1/4]$, а функция $g_1^{-1}(z)$ — в отрезок $[3/4, 1]$.

Определим отображение Φ_n по индукции. Положим $\Phi_1(x_1) = g_{x_1}^{-1}(1/2)$. Пусть определено отображение Φ_n , определим Φ_{n+1} по формуле

$$\Phi_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = g_{x_{n+1}}^{-1}(\Phi_n(x_1, \dots, x_n)).$$

Схема S_n вычисляет результат $(n - 1)$ -кратного применения функции $g(z)$ ко входному значению z , и все промежуточные значения:

$$z, \quad g(z), \quad g(g(z)), \quad \dots, \quad \underbrace{g(\dots g(z) \dots)}_{n-1 \text{ раз}}.$$

К каждому из полученных значений применяется функция

$$l(z) = \begin{cases} 0, & 0 \leq z < \frac{1}{4}, \\ 2z - \frac{1}{2}, & \frac{1}{4} \leq z < \frac{3}{4}, \\ 1, & \frac{3}{4} \leq z \leq 1, \end{cases}$$

⁷Такие функции в теории динамических систем называют тент-функциями.

($l(z) = |z - 1/4| - |z - 3/4| + 1/2$ реализуется формулой сложности $O(1)$) и в качестве выходов схемы используются значения

$$l(g(\dots g(z) \dots)), \dots, l(g(z)), l(z).$$

Поскольку функции $g(z)$ и $l(z)$ реализуются со сложностью $O(1)$, сложность схемы составляет $O(n)$.

Если на вход схемы подавалось значение $\Phi_n(x_1, \dots, x_n)$, то в силу определения отображения Φ_n при $(n-1)$ -кратном применении функции $g(z)$ будут получены все значения

$$\Phi_n(x_1, \dots, x_n), \quad \dots, \quad \Phi_2(x_1, x_2), \quad \Phi_1(x_1).$$

По определению $\Phi_k(x_1, \dots, x_k)$ лежит в отрезке $[0, 1/4]$, если $x_k = 0$, и в отрезке $[3/4, 1]$, если $x_k = 1$. Таким образом, $l(\Phi_k(x_1, \dots, x_k)) = x_k$, и вычисляются все значения x_k .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В доказательстве леммы не используется функция $x * y$. Если в базис добавить кусочно-линейную функцию

$$|x| + |x - 1| - \left| x - \frac{1}{4} \right| - \left| x - \frac{3}{4} \right|$$

и функцию $2x$, то лемма будет верна и для случая реализации схемами, имеющими ветвление у каждого элемента не более 2. Можно доказать аналогичную лемму и для базиса с добавленной только функцией $2x$, если вместо $g(x)$ использовать $1 - |2x - 1|$.

Варианты следующих двух лемм использовались в [1], [6], [11].

ЛЕММА 9. *Кусочно-линейную функцию $p_1(x)$, определенную на $[0, v2^{\lceil \log s \rceil}]$, принимающую значения 0 в точках $2iv$ и 1 в точках $(2i+1)v$, и линейную между ними, можно реализовать схемой сложности $O(\log s) = O(\log 1/\varepsilon)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта функция реализуется многократным применением функции $1 - |2x - 1|$, в которую вместо аргумента подставляется величина $x * s/2^{\lceil \log s \rceil}$. График функции $1 - |2x - 1|$ представляет собой один зубец на отрезке $[0, 1]$; при каждой повторной подстановке число зубцов на отрезке $[0, 1]$ удваивается, поэтому достаточно $\log s + O(1)$ шагов, чтобы получить $2^{\lceil \log s \rceil - 1}$ зубцов. Каждый шаг реализуется со сложностью $O(1)$. Подстановка в качестве аргумента величины $x * s/2^{\lceil \log s \rceil}$ изменяет ширину каждого зубца с $1/2^{\lceil \log s \rceil - 1}$ на $2v$. Поскольку $s/2^{\lceil \log s \rceil} \leq 1$, умножение $x * s/2^{\lceil \log s \rceil}$ реализуется со сложностью $O(1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Построенная в лемме пилообразная функция на самом деле определена на всей прямой, причем при $x < 0$ выполнено $p_1(x) < 0$.

Из доказанной леммы непосредственно вытекает

ЛЕММА 10. *Кусочно-линейную функцию $p_2(x)$, определенную на отрезке $[0, 1]$, принимающую значения 0 в точках $2iv$ и v в точках $(2i+1)v$, можно реализовать схемой сложности $O(\log s) = O(\log 1/\varepsilon)$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если к базису добавить функцию $2x$, то обе предыдущие леммы будут верны и для случая реализации формулами.

ЛЕММА 11. Пусть задан произвольный набор значений $c_k \in [0, 1]$, $k = 0, \dots, s-1$. Тогда кусочно-полиномиальную функцию $c(x)$, постоянную на каждом отрезке Δ_k , $k = 0, \dots, s-1$, и принимающую на нем значение c_k , можно реализовать схемой сложности $O(s) = O(1/\sqrt{\varepsilon})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $H(x) = h_{2v}(x - 1/2 + v)/2v$, представляющую собой ступеньку ширины $2v$ и высоты 1. Чтобы ее получить, реализуем функцию $h_{2v}(x - 1/2 + v)$ формулой сложности $O(1)$. Обозначим через $d(x)$ функцию $2x$. Пусть t – наименьшее неотрицательное целое число такое, что $2^t 2v \geq 1$; для t справедливо равенство $t = 2 \log 1/\varepsilon + O(1)$. Тогда $1/(2^t 2v) \in [0, 1]$, и функцию $H(x)$ можно реализовать схемой, вычисляющей выражение

$$d\left(d\left(\dots d\left(\frac{1}{2^t 2v} * h_{2v}\left(x - \frac{1}{2} + v\right)\right)\dots\right)\right) \quad (\text{функция } d \text{ применяется } t \text{ раз}).$$

Рассмотрим кусочно-линейную функцию $I_{\text{odd}}(x) = H(p_1(x - v/2))$. Эта функция обладает свойствами:

она равна нулю на отрезках Δ_{2i} , $i = 0, \dots, \lfloor (s-1)/2 \rfloor$, и единице на отрезках Δ_{2i+1} , $i = 0, \dots, \lfloor s/2 \rfloor - 1$.

Действительно, пусть $x \in \Delta_{2i} = [2iv + u, (2i+1)v - u]$. Тогда

$$x - \frac{v}{2} \in \left[2iv - \frac{v}{2} + u, (2i+1)v - \frac{v}{2} - u\right].$$

В случае $x - v/2 < 0$ (т.е. на Δ_0) согласно замечанию 4 имеем $p_1(x - v/2) < 0$ и поэтому $H(p_1(x - v/2)) = 0$. Если же $x - v/2 \geq 0$, используем следующее выражение для $p_1(x)$ на отрезке $[0, v2^{\lceil \log s \rceil}]$:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x - 2iv}{v}, & x \in [2iv, (2i+1)v], \\ 1 - \frac{(x - (2i+1)v)}{v}, & x \in [(2i+1)v, (2i+2)v]. \end{cases}$$

Из нее следует, что при $x \in \Delta_{2i}$

$$p_1\left(x - \frac{v}{2}\right) \leq \frac{1}{2} - \frac{u}{v} = \frac{1}{2} - v,$$

откуда $H(p_1(x - v/2)) = 0$. Аналогично рассматривается случай $x \in \Delta_{2i+1}$. Функцию $I_{\text{odd}}(x)$ можно реализовать со сложностью $O(\log 1/\varepsilon)$.

Очевидно, что функция $I_{\text{even}}(x) = 1 - H(p_1(x - v/2))$ обладает следующими свойствами: она равна 1 на отрезках Δ_{2i} и 0 на отрезках Δ_{2i+1} . Если функция I_{odd} построена, новая функция реализуется со сложностью 1.

Рассмотрим функцию $c_{\text{even}}(x)$, постоянную на каждом отрезке

$$[2iv, (2i+1)v], \quad i = 0, \dots, \left\lfloor \frac{(s-1)}{2} \right\rfloor,$$

равную на нем константе c_{2i} и доопределенную по линейности между этими отрезками, и функцию $c_{\text{odd}}(x)$, постоянную на каждом отрезке

$$[(2i+1)v, (2i+2)v], \quad i = 0, \dots, \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor - 1,$$

равную на нем константе c_{2i+1} и доопределенную по линейности между этими отрезками. Покажем, что функции $c_{\text{even}}(x)$ и $c_{\text{odd}}(x)$ можно реализовать со сложностью $O(1/\sqrt{\varepsilon})$.

Построим формулу, вычисляющую значения $1, 2, \dots, s-1$ и sx с помощью сложения. Это можно сделать со сложностью $O(s)$. Если такие значения вычислены, то функция $h_1(sx - k)$ реализуется формулой со сложностью $O(1)$. Непосредственно проверяются равенства

$$c_{\text{even}}(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{\lfloor (s-1)/2 \rfloor} (c_{2i} - c_{2i-2})h_1(sx - 2i + 1),$$

$$c_{\text{odd}}(x) = c_1 + \sum_{i=1}^{\lfloor s/2 \rfloor - 1} (c_{2i+1} - c_{2i-1})h_1(sx - 2i).$$

Аналогично тому, как было сделано в доказательстве леммы 5, представим сумму по всем индексам в виде двух сумм с положительными и отрицательными коэффициентами, и реализуем функции $c_{\text{even}}(x)$ и $c_{\text{odd}}(x)$. Это можно сделать со сложностью $O(s) = O(1/\sqrt{\varepsilon})$.

Наконец, построим функцию $c(x)$ по формуле

$$c(x) = I_{\text{even}}(x) * c_{\text{even}}(x) + I_{\text{odd}}(x) * c_{\text{odd}}(x).$$

Согласно свойствам функций I_{even} , I_{odd} и определению функций c_{even} , c_{odd} , функция $c(x)$ принимает на каждом отрезке Δ_k значение c_k . Схема, вычисляющая $c(x)$, имеет сложность $O(1/\sqrt{\varepsilon})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Лемма верна и для базиса, не содержащего функцию $x * y$, но содержащего семейство линейных функций $\{cx : 0 \leq c \leq 1\}$. Для доказательства достаточно вместо формулы $I_{\text{even}}(x) * c_{\text{even}}(x) + I_{\text{odd}}(x) * c_{\text{odd}}(x)$ использовать формулу

$$\min(I_{\text{even}}(x), c_{\text{even}}(x)) + \min(I_{\text{odd}}(x) * c_{\text{odd}}(x))$$

или формулу

$$\max(\min(I_{\text{even}}(x), c_{\text{even}}(x)), \min(I_{\text{odd}}(x) * c_{\text{odd}}(x))).$$

Так построенная функция $c(x)$ будет кусочно-линейной. Если в базис добавить функцию $2x$, то лемма верна и для формул вместо схем, но с оценкой сложности $O((\log 1/\varepsilon)/\sqrt{\varepsilon})$.

4.3. Доказательство леммы 7. Пусть задан набор кусочно-линейных функций $f_{4,k}(x)$, $k = 0, \dots, s-1$. Каждая функция $f_{4,k}$ определена на отрезке Δ_k , равна нулю в его концах, имеет на нем угловые коэффициенты ± 1 и меняет поведение только в точках $kv + u + iu/16$. Обозначим через $g_{4,k}(x)$ четную $2v$ -периодическую функцию, совпадающую с функцией $f_4(x)$ на отрезке $[kv, (k+1)v]$. Для каждого k , $k = 0, \dots, s-1$, составим набор из нулей и единиц $\tilde{\alpha}_k = (\alpha_{k,1}, \dots, \alpha_{k,n})$ длины

$$n = \frac{|\Delta_k|}{u/16} = \frac{16(v-2u)}{u} = 16s - 32;$$

ноль или единицу ставим в зависимости от знака углового коэффициента функции $g_{4,k}$ на отрезке $[u + iu/16, u + (i + 1)u/16]$ так, что коэффициенту $+1$ сопоставляем 1, коэффициенту -1 сопоставляем 0. Тогда связь между упомянутыми угловыми коэффициентами $d_{k,i}$ и компонентами булевого вектора $\alpha_{k,i}$ выражается в виде $d_{k,i} = 2\alpha_{k,i} - 1$. Реализуем функции

$$h^{(i)}(x) = h_{u/16}\left(p_2(x) - u - \frac{iu}{16}\right), \quad i = 0, \dots, n-1,$$

со сложностью $O(n) + \log 1/\varepsilon = O(1/\sqrt{\varepsilon})$. Рассмотрим четную $2v$ -периодическую функцию, равную $h_{u/16}(x - u - iu/16)$ на отрезке $[0, v]$. Функция $h^{(i)}(x)$ совпадает с ней на отрезке $[0, 1]$ в силу определения функции $p_2(x)$ и того, что $u + iu/16 < v$. Тогда на $[0, 1]$

$$g_{4,k}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} d_{k,i} h_{u/16}\left(x - u - \frac{iu}{16}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} d_{k,i} h^{(i)}(x).$$

Используя лемму 8, определим константу $c_k = \Phi_n(\tilde{\alpha}_k)$.

Рассмотрим кусочно-линейную функцию

$$z(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < u, \\ x - u, & u \leq x < \frac{v}{2}, \\ v - u - x, & \frac{v}{2} \leq x < v - u, \\ 0, & v - u \leq x \leq v. \end{cases}$$

Она реализуется формулой $\max(0, v/2 - u - |x - v/2|)$ сложности $O(1)$. Композиция функций $z(p_2(x))$ обладает свойствами: $z(p_2(x)) = 0$ при $x \notin \Delta_k$; $z(p_2(x))$ возрастает с угловым коэффициентом $+1$ на каждом из отрезков $[kv + u, kv + v/2]$ и убывает с угловым коэффициентом -1 на каждом из отрезков $[kv + v/2, (k + 1)v - u]$.

Покажем, как построить схему, реализующую функцию $f_4(x)$. Используя лемму 11, реализуем функцию $c(x)$, равную на каждом отрезке Δ_k константе c_k . К ее выходу подсоединим схему S_n из леммы 8. Схема S_n имеет n выходов; обозначим их через s_i , а реализуемые ими кусочно-полиномиальные функции $s_i(x)$, $i = 0, \dots, n-1$. Подадим выходы s_i и выходы подсхем, реализующих функции $h^{(i)}(x)$ на входы формулы, вычисляющей $d(s_i(x) * h^{(i)}(x)) - h^{(i)}(x)$, $d(x) = 2x$. Обозначим выход этой формулы и реализуемую на нем кусочно-полиномиальную функцию через $g_i(x)$. На выходе всей схемы реализуем функцию

$$F(x) = \min\left(z(p_2(x)), \max\left(-z(p_2(x)), \sum_{i=0}^{n-1} g_i(x)\right)\right).$$

По построению сложность схемы составляет $O(1/\sqrt{\varepsilon})$. Покажем, что $F = f_4$, т.е. схема реализует функцию $f_4(x)$.

Если $x \notin \Delta_k$, то поскольку $z(p_2(x)) = 0$, значение $F(x)$ также обращается в нуль. Пусть $x \in \Delta_k$ для некоторого k . Функция $c(x)$ на этом отрезке принимает постоянное значение c_k . Тогда согласно лемме 8 на выходе s_i схемы $S_n(c(x))$ реализуется

булево значение

$$s_i(c(x)) = s_i(c_k) = s_i(\Phi_n(\tilde{\alpha}_k)) = \alpha_{k,i}.$$

Подсхема, вычисляющая функцию $g_i(x)$, на выходе принимает значение

$$g_i(x) = (2s_i(c(x)) - 1)h^{(i)}(x) = d_{k,i}h^{(i)}(x).$$

Поэтому

$$\sum_{i=0}^{n-1} g_i(x) = \sum_{i=0}^{n-1} d_{k,i}h^{(i)}(x) = g_{4,k}(x) = f_{4,k}(x)$$

на отрезке Δ_k . Функция $f_{4,k}(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой 1 и равна нулю на концах отрезка Δ_k , поэтому взятие максимума и минимума не влияет на значение функции $F(x)$. Следовательно, $F(x) = f_4(x)$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Лемма верна и для базиса, не содержащего функцию $x * y$. Для доказательства достаточно вместо формулы $d(s_i(x) * h^{(i)}(x)) - h^{(i)}(x)$ использовать формулу $d(\min(us_i(x)/16, h^{(i)}(x))) - h^{(i)}(x)$. Построенная схема не содержит элементов со степенью ветвления, большей 2.

4.4. Завершение доказательства теоремы. Используя леммы 5–7, построим схемы, вычисляющие $f_1(x)$, $f_3(x)$ и $f_4(x)$, и соединим их по формуле

$$f_1(x) + 2(f_3(x) + 2f_4(x)),$$

где в качестве умножения на 2 используется функция $2x = x + x$. Как было доказано ранее, такая схема приближает значение функции $f(x)$ с погрешностью ε . Сложность схемы составляет $O(1/\sqrt{\varepsilon})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Если в базис добавить функции $2x$, $1 - |2x - 1|$, то теорема верна и для схем со степенью ветвления элементов, не большей 2, но с оценкой сложности $O((\log 1/\varepsilon)/\sqrt{\varepsilon})$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Б. Гашков, “О сложности приближенной реализации непрерывных функций схемами и формулами в полиномиальных и некоторых других базисах”, Математические вопросы кибернетики, **5**, Наука, М., 1994, 144–207.
- [2] С. Б. Гашков, “О сложности приближенной реализации функциональных компактов в некоторых пространствах и о существовании функций с заданной по порядку сложностью”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **2:3** (1996), 675–774.
- [3] О. Б. Лупанов, *Асимптотические оценки сложности управляющих систем*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1984.
- [4] А. Н. Колмогоров, В. М. Тихомиров, “ ε -энтропия и ε -емкость множеств в функциональных пространствах”, *УМН*, **14:2** (1959), 3–86.
- [5] С. Б. Гашков, “О сложности приближенной реализации аналитических функций схемами и формулами”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1983, № 4, 36–43.
- [6] С. Б. Гашков, “О сложности приближенной реализации некоторых классов дифференцируемых функций одной переменной схемами из функциональных элементов”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1984, № 3, 35–41.

- [7] С. Б. Гашков, “О сложности приближенной реализации некоторых классов дифференцируемых функций одной переменной формулами в непрерывных базисах”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1984, № 6, 53–58.
- [8] С. Б. Гашков, “О сложности приближенной реализации некоторых классов дифференцируемых функций многих переменных при помощи схем и формул в некоторых базисах, состоящих из непрерывных функций”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1986, № 3, 48–57.
- [9] С. Б. Гашков, “О сложности приближенной реализации непрерывных функций и о континуальных аналогах эффекта Шеннона”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1986, № 6, 25–33.
- [10] S. B. Gashkov, “On the complexity of approximate realization of continuous functions by schemes and formulas in continuous bases”, *Fundamentals of Computation Theory, Lecture Notes in Comput. Sci.*, **278**, Springer-verlag, 140–144.
- [11] С. Б. Гашков, “О сложности приближенной реализации функций, удовлетворяющих условию Липшица, схемами в непрерывных базисах”, *Матем. заметки*, **43**:4 (1988), 543–557.
- [12] С. Б. Гашков, “Сложность реализации булевых функций схемами из функциональных элементов и формулами в базисах, элементы которых реализуют непрерывные функции”, *Проблемы кибернетики*, **37** (1980), 57–118.
- [13] И. Г. Петровский, *Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия*, Наука, М., 1986.
- [14] А. Г. Витушкин, *Оценка сложности задачи табулирования*, Современные проблемы математики, Физматгиз, М., 1959.
- [15] M. Ben-Or, “Lower bounds for algebraic computation trees”, *Proceedings of the Fifteenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, ACM, New York, 1983, 80–86.
- [16] J. Milnor, “On the Betti numbers of real varieties”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **15**, 1964, 275–280.
- [17] С. Б. Гашков, “О сложности приближенной реализации некоторых классических функций”, *Дискретный анализ*, Тр. ин-та матем. СО РАН, **127**, Ин-т матем. СО РАН, Новосибирск, 1994, 14–33.
- [18] А. Н. Колмогоров, “Различные подходы к оценке трудности приближенного задания и вычисления функций”, *Proc. Internat. Congr. Mathematicians* (Stockholm, 1962), Inst. Mittag-Leffler, Djursholm, 1963, 351–356.
- [19] Е. А. Асарин, “О сложности равномерных приближений непрерывных функций”, *УМН*, **39**:3 (1984), 157–169.
- [20] С. Б. Гашков, Я. В. Вегнер, “О сложности приближенной реализации липшицевых функций”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2008, № 4, 49–51.
- [21] G. Turán, F. Vatan, “On the computation of Boolean functions by analog circuits of bounded fan-in”, *J. Comput. System Sci.*, **54**:1 (1997), 199–212.

Я. В. Вегнер

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило

26.01.2009

Исправленный вариант

23.08.2011

С. Б. Гашков

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: sbgashkov@gmail.com