Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. С. Ткаченко, Об одной обратной задаче для параболического уравнения, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 5, 729–743

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm71>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 17:44:25

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Д. С. Ткаченко

В работе исследуется обратная задача восстановления правой части специального вида для параболического уравнения по u с зависящими от (x, t) коэффициентами перед u_t и u . При этом в качестве переопределения задается интеграл от решения по времени. Доказана фредгольмовость такой задачи, теорема существования и единственности ее решения в соболевских пространствах.

Библиография: 14 названий.

1. Постановка задачи. Формулировка результатов

1.1. Постановка задачи. Пусть Ω – ограниченная, односвязная область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega \in C^2$. В цилиндре $Q = \Omega \times (0, T)$, где $T > 0$, с боковой поверхностью $S = \partial\Omega \times (0, T)$ рассматривается начально-краевая задача для параболического уравнения. При этом неизвестной предполагается не только “температура”, но и не зависящая от времени компонента “источника”, а в качестве дополнительной информации, или “переопределения”, задается интеграл “температуры” по отрезку $[0, T]$. Подобные задачи в различных пространствах исследовались рядом авторов [1]–[8]. Однако в большинстве работ рассматривался стационарный оператор левой части уравнения. В работе [3] в одномерном случае удалось отказаться от стационарности оператора, но обратная задача (с финальным переопределением) рассматривалась в гильбертовых пространствах. Мы приводим подробное доказательство существования единственного решения обратной задачи “в малом” в соболевских пространствах без ограничений на размерность. При этом коэффициенты перед u_t и u предполагаются зависящими от (x, t) . В качестве вспомогательного результата приводится оценка некоторых норм решения прямой задачи для случая, когда все коэффициенты зависят от (x, t) .

В работе рассматривается следующая обратная задача.

ЗАДАЧА 1. Найти пару $u \in W_{2,0}^{2,1}(Q)$, $p \in L_2(\Omega)$ из условий

$$\rho(x, t)u_{1t} - L(x, t)u_1 = f_1(x, t) = \Phi_1(x, t)p(x) + q(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (1.1)$$

$$u_1|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.2)$$

$$u_1|_S = 0, \quad (x, t) \in S, \quad (1.3)$$

$$l_1 u_1 = \int_0^T \omega_1(t) u_1(x, t) dt = \chi_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.4)$$

где оператор $Lu = \sum_{i,j=1}^n (a_{i,j}(x) u_{x_i})_{x_j} - \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} - c(x, t)u$ равномерно эллиптический с достаточно гладкими коэффициентами (точные условия на них даны ниже), а все остальные, входящие в (1.1)–(1.4) функции, определены и принадлежат следующим классам:

$$\Phi_1, \Phi_{1t} \in L_\infty(Q), \quad q, q_t \in L_2(Q), \quad u_0, \chi_1 \in W_{2,0}^2(\Omega), \quad \omega_1 \in L_2(0, T). \quad (1.5)$$

Пространства и нормы, используемые в работе, вводятся общепринято; в частности, нормы в $L_2(\Omega)$, $W_2^1(\Omega)$, $W_2^2(\Omega)$ и $W_{2,0}^{2,1}(Q)$ определяются, соответственно, равенствами

$$\begin{aligned} \|v\|_{2,\Omega} &= \left(\int_\Omega v^2(x) dx \right)^{1/2}, \quad \|v\|_{2,\Omega}^{(1)} = \left(\int_\Omega (v^2(x) + v_x^2(x)) dx \right)^{1/2}, \\ \|v\|_{2,\Omega}^{(2)} &= \left(\int_\Omega (v^2(x) + v_x^2(x) + v_{xx}^2(x)) dx \right)^{1/2}, \\ \|u\|_{2,Q}^{(2,1)} &= \left(\int_Q (u^2 + u_t^2 + u_x^2 + u_{xx}^2) dx dt \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

где $u_x^2 = \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2$, $u_{xx}^2 = \sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j}^2$, пространство $W_{2,0}^{2,1}(Q) = \{u \in W_2^{2,1}(Q) : u|_S = 0\}$. Также нам понадобится пространство $L_\infty(\Omega)$ с нормой

$$\|v\|_{\infty,\Omega} = \operatorname{ess\,sup}_\Omega |v(x)| \equiv \inf\{M \in \mathbb{R} : |v| \leq M \text{ для п.в. } x \in \Omega\},$$

энергетическое пространство $V_2(Q)$ с нормой

$$\|v\| = \operatorname{ess\,sup}_{[0,T]} \|v\|_{2,\Omega} + \|v_x\|_{2,Q}$$

и $V_2^{1,0}(Q)$, состоящее из тех элементов $V_2(Q)$, для которых при каждом $t \in [0, T]$ существует след $u(x, t) \in L_2(\Omega)$, причем $\|u(x, t + \Delta t) - u(x, t)\|_{2,\Omega} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$.

В обозначениях $\dot{W}_2^1(\Omega)$ и $\dot{V}_2^{1,0}(Q)$ нуль сверху означает равенство нулю следов элементов данных пространств на границе $\partial\Omega$ и S соответственно. Все эти пространства подробно описаны, например, в [9, гл. 1, § 1] или [1, гл. 1, п. 1.1].

Все равенства и неравенства (кроме числовых и тех, смысл которых поясняется отдельно), встречающиеся в тексте, понимаются в смысле “почти всюду” по мере Лебега.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пара функций $u \in W_{2,0}^{2,1}(Q)$, $p \in L_2(\Omega)$, называется *решением задачи* (1.1)–(1.4), если выполняются равенства (1.1)–(1.4).

Всюду далее будем предполагать выполненными следующие условия:

$$\rho(x, t) \in C^2(\overline{Q}), \quad 0 < \rho_0 \leq \rho(x, t) \leq \rho_1, \quad \partial\Omega \in C^2, \quad (1.6)$$

$$a_{ij} \equiv a_{ji}(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad b_i(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \quad c(x, t) \in C^1(\overline{Q}), \quad (1.7)$$

существуют константы $\nu_1, \nu_2: 0 < \nu_1 < \nu_2$,

$$\nu_1 |\xi|^2 \leq a_{ij} \xi_i \xi_j \leq \nu_2 |\xi|^2, \quad x \in (\overline{\Omega}) \quad (1.8)$$

(здесь и далее всюду, где это не может привести к путанице, знаки суммы по всем возможным значениям индексов опускаются),

$$\Phi_1, \Phi_{1t} \in L_\infty(Q), \quad g(x)^{-1} \equiv (l_1(\Phi_1))^{-1} \in L_\infty(\Omega), \quad (1.9)$$

$$0 \neq \omega \in L_2(0, T), \quad \chi(x) \in W_{2,0}^2(\Omega). \quad (1.10)$$

1.2. Основные результаты. Введем обозначения

$$\Phi(x, t) = \frac{\Phi_1(x, t)e^{-\lambda t}}{g(x)}, \quad \varphi(x) = p(x) \cdot g(x), \quad \text{где } g(x) \equiv l_1(\Phi_1); \quad \omega \equiv \omega_1 \cdot e^{\lambda t}. \quad (1.11)$$

Заметим, что исследование задачи (1.1)–(1.4) сводится к изучению задачи

ЗАДАЧА 2. Найти пару $u(x, t) \in W_{2,0}^{2,1}(Q)$, $\varphi(x) \in L_2(\Omega)$ из условий

$$\rho u_t - Lu + \lambda \rho u = f(x, t) \equiv \Phi_1(x, t)e^{-\lambda t} p(x) \equiv \Phi(x, t)\varphi(x), \quad (x, t) \in Q, \quad (1.12)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1.13)$$

$$u|_S = 0, \quad (x, t) \in S, \quad (1.14)$$

$$lu \equiv \int_0^T \omega(t)u(x, t) dt = \chi(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.15)$$

с произвольной $\lambda \in \mathbb{R}$.

В самом деле, обозначив через u_2 решение прямой задачи (1.1)–(1.3) с $p(x) \equiv 0$, а за χ_2 результат действия на него оператора переопределения:

$$l_1 u_2 = \int_0^T \omega_1(t)u_2(x, t) dt = \chi_2(x),$$

получим, что решения обратных задач (1.1)–(1.4), (1.12)–(1.15) и указанной прямой задачи связаны соотношениями: $u_1 = u \cdot e^{\lambda t} + u_2$, а $\chi_1 = \chi + \chi_2$. При этом функции u_2 и χ_2 известны; следовательно, решив (1.12)–(1.15), мы решим и (1.1)–(1.4). Осталось заметить, что при выполнении условий (1.9), (1.8) после перехода от задачи 1 к задаче 2 классы функций сохраняются. В частности, по лемме 1 функции χ , χ_1 и χ_2 лежат в одном и том же пространстве $W_{2,0}^2(\Omega)$. Таким образом, имеет место взаимно-однозначное соответствие между множествами решений задач (1.12)–(1.15) и (1.1)–(1.4). Заметим, что в обозначениях (1.11) $l(\Phi(x)) \equiv 1$. Всяду далее будем исследовать задачу 2. Справедливы следующие утверждения:

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (1.6)–(1.11). Тогда задача (1.12)–(1.15) “фредгольмова”, т.е. эквивалентна операторному уравнению Фредгольма 2-го рода с компактным оператором.

Чтобы сформулировать следующую теорему, введем обозначение: пусть функция $\alpha(t; \lambda)$ такова, что при произвольной $\varphi \in L_2(\Omega)$ для решения $u(x, t)$ прямой задачи (1.13)–(1.15) с данной f справедливо неравенство

$$\|c_t(x, t)u + \lambda \rho_t u\|_{2, \Omega}^2 \leq \alpha(t; \lambda) \|f\|_{2, Q_t}^2. \quad (1.16)$$

То, что такая функция существует, сразу следует из оценки (2.16) [9, гл. 3]: $\|u\| \leq c \|f\|_{2, Q}$, и определения энергетической нормы $\|u\|$. Оценку для функции $\alpha(t; \lambda)$ можно получить, например, при помощи леммы 2.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены (1.6)–(1.11); функция $\alpha(t; \lambda)$ такова, что имеет место (1.16). Пусть также найдутся такие числа λ и $\varepsilon > 0$, что имеют место неравенства

$$-b_{ix_i} + 2c + \lambda \rho + \rho_t - \frac{1}{\varepsilon} \geq 0, \quad (1.17)$$

$$m = 2\|\omega\|_{2, (0, T)}^2 \left(\rho_1 + \frac{c_\lambda^2 T^2}{2\rho_0} \right) \int_0^T e^{-\lambda t} \left(\left\| \frac{\Phi^2(\cdot, 0)}{\rho(\cdot, 0)} \right\|_{\infty, \Omega} + 2\varepsilon \int_0^t e^{\lambda \tau} \cdot (\|\Phi_\tau^2(\cdot, \tau)\|_{\infty, \Omega} + \tau \alpha(\tau; \lambda) \|\Phi^2\|_{\infty, Q_\tau}) d\tau \right) dt < 1, \quad (1.18)$$

где $c_\lambda = \max_Q |c(x, t) + \lambda \rho(x, t)|$. Тогда при любой $\chi(x) \in W_{2,0}^2(\Omega)$ существует единственное решение задачи (1.12)–(1.15), и имеет место оценка устойчивости:

$$\|u\|_{2, Q}^{(2,1)} + \|\varphi\|_{2, \Omega} \leq c \|L\chi\|_{2, \Omega}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены условия (1.6)–(1.11); функция $\alpha(t; \lambda)$ такова, что имеет место (1.16). Пусть также найдутся такие числа λ и $\varepsilon > 0$, что имеют место неравенства (1.17) и

$$c(x, t) + \lambda \rho(x, t) = \tilde{c}(x) \geq 0, \quad (1.19)$$

$$m = \|\omega\|_{2, (0, T)}^2 \rho_1 \int_0^T e^{-\lambda t} \left(\left\| \frac{\Phi^2(\cdot, 0)}{\rho(\cdot, 0)} \right\|_{\infty, \Omega} + 2\varepsilon \int_0^t e^{\lambda \tau} (\|\Phi_\tau^2(\cdot, \tau)\|_{\infty, \Omega} + \tau \alpha(\tau; \lambda) \|\Phi^2\|_{\infty, Q_\tau}) d\tau \right) dt < 1. \quad (1.20)$$

Тогда выполняются утверждения теоремы 2.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть выполняется условие (1.5), а также условия теоремы 1 или следствия 1. Тогда при любой $\chi(x) \in W_{2,0}^2(\Omega)$ существует единственное решение задачи (1.1)–(1.4), и имеет место оценка устойчивости:

$$\|u_1 - u_2\|_{2, Q}^{(2,1)} + \|p\|_{2, \Omega} \leq c \|\chi\|_{2, \Omega}^{(2)},$$

где u_2 – решение прямой задачи (1.1)–(1.3) при $p(x) \equiv 0$.

2. Существование и единственность решения задачи (1.12)–(1.15)

2.1. Некоторые свойства решения прямой задачи. В этом пункте мы ради полноты изложения приведем лемму, содержащую необходимые при доказательстве теорем 1, 2 свойства повышения гладкости решения прямой задачи (1.12)–(1.15) при повышении гладкости по t правой части уравнения (1.12). Кроме того, получим оценку, аналогичную неравенству (6.3) работы [9, гл. 3].

Будем обозначать через $u(x, t)$ решение прямой задачи (1.12), (1.14) с начальным условием $u(x, 0) = u_0(x) \in W_{2,0}^2(\Omega)$ (на данную задачу мы будем ссылаться как на (1.12), (1.2), (1.14)). Для простоты положим в этом пункте $\lambda = 0$. Функцию $f(x, t)$ в правой части (1.12) будем считать произвольной фиксированной функцией такой, что $f, f_t \in L_2(Q)$. Коэффициенты a_{ij} , b_i , c оператора L будем в данном пункте считать зависящими от (x, t) функциями, обладающими следующей гладкостью:

$$a_{ij} \equiv a_{ij}(x, t) \in C^2(\overline{Q}), \quad b_i(x, t) \in C^1(\overline{Q}), \quad c(x, t) \in C^1(\overline{Q}). \quad (2.1)$$

В силу большей гладкости по t правой части уравнения (1.1) решение задачи (1.12), (1.2), (1.14) обладает некоторыми дополнительными дифференциальными свойствами. Для их формулировки рассмотрим вспомогательную прямую задачу: *найти функцию* $v(x, t) \in \dot{V}_2^{1,0}(Q)$ из условий

$$\rho(x, t)v_t - L(x, t)v + \rho_t(x, t)v = F(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (2.2)$$

$$v|_{t=0} = \frac{1}{\rho(x, 0)}(f(x, 0) + L(x, 0)u_0(x)), \quad x \in \Omega, \quad (2.3)$$

$$v|_S = 0, \quad (x, t) \in S. \quad (2.4)$$

Здесь $F(x, t) = f_t(x, t) + (a_{ij}{}_t u_{x_i})_{x_j} - b_i{}_t u_{x_i} - c_t u$, а $u(x, t)$ – решение (1.12), (1.2), (1.14) с заданными f из указанного класса и $u_0(x) \in W_{2,0}^2(\Omega)$. Поскольку $u(x, t)$ – сильное решение и имеет все производные, входящие в уравнение, суммируемые с квадратом, то $F(x, t) \in L_2(Q)$.

Решение $v \in \dot{V}_2^{1,0}(Q)$ задачи (2.2)–(2.4) понимается в смысле выполнения интегрального тождества (см., например, [9])

$$\begin{aligned} & \int_Q (v\rho\mu_t - a_{ij}v_{x_i}\mu_{x_j} - b_i\mu v_{x_i} - c\mu v + F\mu) dx dt \\ & + \int_\Omega (f(x, 0) + L(x, 0)u_0)\mu(x, 0) dx = 0 \end{aligned}$$

при всех $\mu \in W_{2,0}^{2,1}(Q)$ таких, что $\mu(x, T) = 0$.

При выполнении условий (1.6)–(1.8) и $f, f_t \in L_2(Q)$ задача (2.2)–(2.4) однозначно разрешима в $\dot{V}_2^{1,0}(Q)$ (см. [9, гл. 3, § 4]).

ЛЕММА 1. Пусть выполнены условия (1.6), (1.8), (2.1), $f, f_t \in L_2(Q)$, $u_0 \in W_{2,0}^2(\Omega)$. Тогда решение $v \in \dot{V}_2^{1,0}(Q)$ задачи (2.2)–(2.4) и решение $u \in W_{2,0}^{2,1}(Q)$ прямой задачи (1.12), (1.2), (1.14) при $\lambda = 0$ связаны соотношением $u_t = v$. При этом

$v \in V_2^{1,0}(Q) \cap W_{2,0}^{2,1}(Q_{\varepsilon,T})$, где $Q_{\varepsilon,T} = \Omega \times (\varepsilon, T)$ при каждом $\varepsilon \in (0, T)$, а при любом $t_1 \in (0, T]$ существуют следы $u(x, t_1) \in W_{2,0}^2(\Omega)$, $v(x, t_1) \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ и верны оценки

$$\|v\| \leq c_1 (\|f\|_{2,Q} + \|f_t\|_{2,Q} + \|f(\cdot, 0)\|_{2,\Omega} + \|u_0\|_{2,\Omega}^{(2)}), \quad (2.5)$$

$$\|v(\cdot, t_1)\|_{2,\Omega}^{(1)} \leq c_2 (\|f\|_{2,Q} + \|f_t\|_{2,Q} + \|f(\cdot, 0)\|_{2,\Omega} + \|u_0\|_{2,\Omega}^{(2)}), \quad (2.6)$$

где $c_1 = c_1(n, \rho, L)$, $c_2 = c_2(n, \rho, L, \varepsilon)$, $t_1 \in (\varepsilon, T]$.

Лемма 1 доказывается аналогично подобным утверждениям работ [10]–[12], а также лемме 1.1.2 работы [1, гл. 1]. Подробное же ее доказательство для нашего случая приводится в совместной работе автора с проф. А. И. Прилепко, которая сдана в печать.

Теперь выведем оценку, аналогичную неравенству (6.3) работы [9, гл. 3].

ЛЕММА 2. Пусть выполнены условия (1.6), (1.8), (2.1), $f, f_t \in L_2(Q)$, $u_0 \in W_{2,0}^2(\Omega)$. Тогда для решения $u(x, t)$ задачи (1.12), (1.2), (1.14) при $u_0 \in W_{2,0}^2(\Omega)$, $\lambda = 0$ справедливы неравенства

$$2\nu_1 \|u_x\|_{2,Q_t}^2 + \rho_0 \|u(\cdot, t)\|_{2,\Omega}^2 \leq \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \|f\|_{2,Q_t}^2 + \rho_1 \|u_0\|_{2,\Omega}^2 \right) \chi_1(t), \quad (2.7)$$

$$\text{где } \chi_1(t) = 1 + \frac{1}{\rho_0} \int_0^t \mu_3(\tau) d\tau \exp\left(\frac{1}{\rho_0} \int_0^t \mu_3(\tau) d\tau\right). \quad (2.8)$$

Здесь $Q_t = \Omega \times (0, t)$, $\varepsilon_0 > 0$ – любое положительное число. Остальные обозначения в (2.7)–(2.8) взяты аналогично [9]:

$$\mu_2(t) = |\max_{\Omega} \rho_t|; \quad (2.9)$$

$$\mu_3(t) \geq 0 \quad \text{такое, что} \quad \mu_3(t) \geq \mu_2(t) + \varepsilon_0 + \max_{\Omega} (b_{ix_i} - 2c). \quad (2.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для вывода оценки (2.7) аналогично [9] рассмотрим тождество, которому должно удовлетворять решение (1.12), (1.2), (1.14) в цилиндре $Q_t = \Omega \times (0, t)$:

$$\int_{Q_t} (\rho u_\tau - Lu) u \, dx \, d\tau = \int_{Q_t} f u \, dx \, d\tau.$$

Так как $u(x, t)$ – сильное решение, оно удовлетворяет (1.13) п.в. в Q , и все используемые интегралы имеют смысл. Это тождество можно переписать в виде

$$\int_{Q_t} \left(\frac{1}{2} \cdot (\rho u^2)_\tau - \frac{1}{2} \cdot \rho_\tau u^2 + a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + b_i u_{x_i} u + c u^2 \right) dx \, d\tau = \int_{Q_t} f u \, dx \, d\tau.$$

Правую часть оценим по “неравенству Коши с эпсилон” [9, гл. 2, § 1], а левую с использованием (1.8), (2.9) и граничных условий:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho u^2 dx \Big|_0^t - \frac{1}{2} \int_0^t \mu_2(\tau) \|u(\cdot, \tau)\|_{2,\Omega}^2 d\tau + \nu_1 \|u_x\|_{2,Q_t}^2 \\ & - \frac{1}{2} \int_{Q_t} b_{ix_i} u^2 dx \, d\tau + \int_{Q_t} c u^2 dx \, d\tau \leq \frac{1}{2\varepsilon_0} \|f\|_{2,Q_t}^2 + \frac{\varepsilon_0}{2} \|u\|_{2,Q_t}^2, \end{aligned}$$

или, по-другому:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho u^2(x, t) dx + 2\nu_1 \|u_x\|_{2, Q_t}^2 &\leq \int_0^t \mu_2(\tau) \|u(\cdot, \tau)\|_{2, \Omega}^2 d\tau + \int_{Q_t} (b_i x_i - 2c) u^2 dx d\tau \\ &+ \int_{\Omega} \rho u_0^2(x) dx + \frac{1}{\varepsilon_0} \|f\|_{2, Q_t}^2 + \varepsilon_0 \|u\|_{2, Q_t}^2. \end{aligned}$$

Далее, с учетом (1.6) и (2.10)

$$\rho_0 \|u\|_{2, \Omega}^2 + 2\nu_1 \|u_x\|_{2, Q_t}^2 \leq \int_0^t \mu_3(\tau) \|u(\cdot, \tau)\|_{2, \Omega}^2 d\tau + \rho_1 \|u_0\|_{2, \Omega}^2 + \frac{1}{\varepsilon_0} \|f\|_{2, Q_t}^2. \quad (2.11)$$

Введя функции

$$y(t) = \rho_0 \int_0^t \mu_3(\tau) \|u(\cdot, \tau)\|_{2, \Omega}^2 d\tau \quad \text{и} \quad G(t) = \rho_1 \|u_0\|_{2, \Omega}^2 + \frac{1}{\varepsilon_0} \|f\|_{2, Q_t}^2,$$

из последнего неравенства для $y(t)$ получим

$$y'(t) \leq \frac{\mu_3(t)}{\rho_0} y(t) + \mu_3(t) G(t),$$

откуда по лемме 5.5 [9, гл. 2, § 5]

$$y(t) \leq \int_0^t \mu_3(\tau) G(\tau) d\tau \cdot \exp \left(\frac{1}{\rho_0} \int_0^t \mu_3(\tau) d\tau \right),$$

а поскольку $G(t)$ монотонно неубывающая неотрицательная функция, то

$$y(t) \leq G(t) \int_0^t \mu_3(\tau) d\tau \cdot \exp \left(\frac{1}{\rho_0} \int_0^t \mu_3(\tau) d\tau \right).$$

Подставив эту оценку в неравенство (2.11), имеем (2.7). Лемма 2 доказана.

2.2. “Фредгольмовость” задачи (1.12)–(1.15). Обозначим через L_0 стационарную часть оператора L , т.е.

$$L_0 u = (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} - b_i(x) u_{x_i}. \quad (2.12)$$

Выполнение условий (1.6)–(1.9) гарантирует нам при каждом фиксированном $\varphi \in L_2(\Omega)$ существование единственного решения $u(x, t; \varphi) \in W_{2,0}^{2,1}(Q)$ задачи (1.12)–(1.14) [9, гл. 3, § 6; гл. 4, § 9]. Поэтому выражение

$$A\varphi \equiv \int_0^T \omega(t) \rho(x, t) u_t(x, t; \varphi) dt + \int_0^T \omega(t) (c(x, t) + \lambda \rho(x, t)) u(x, t; \varphi) dt \quad (2.13)$$

задает в силу леммы 1 линейный оператор $A: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$. Повышение гладкости решения $u(x, t)$ (лемма 1) позволяет нам действовать оператором переопределения l на равенство (1.12). Заметим, что $l(L_0 u) = L_0(lu) = L_0 \chi$. Учитывая, что в силу (1.11) $l(\Phi) \equiv 1$, а также определение (2.13) оператора A , получим из (1.12) следующее операторное уравнение второго рода:

$$A\varphi - \varphi = \psi, \quad \text{где} \quad \psi = L_0 \chi, \quad (2.14)$$

$$\text{при этом} \quad \chi|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.15)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что задача нахождения пары $u \in W_{2,0}^{2,1}(Q)$, $\varphi \in L_2(\Omega)$ из условий (1.12)–(1.15) эквивалентна задаче нахождения $\varphi \in L_2(\Omega)$ из (2.14), (2.15) с оператором A , если при произвольной фиксированной $\chi(x) \in W_{2,0}^2(\Omega)$ выполнены следующие условия:

- 1) если (u, φ) – решение (1.12)–(1.15), то φ – решение (2.14), (2.15);
- 2) если φ – решение (2.14), (2.15), то пара (u, φ) , (где $u(x, t)$ – решение (1.12)–(1.14) с данной φ) является решением (1.12)–(1.15);
- 3) если не может быть двух разных решений (1.12)–(1.15), то не может быть двух разных решений (2.14), (2.15);
- 4) если не может быть двух разных решений (2.14), (2.15), то не может быть двух разных решений (1.12)–(1.15).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 разбивается на два этапа: сначала докажем, что задача (1.12)–(1.15) эквивалентна задаче (2.14), (2.15), а затем убедимся, что оператор A , как оператор, действующий из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, является вполне непрерывным.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть выполнены условия (1.6)–(1.11). Тогда задача (1.12)–(1.15) эквивалентна задаче (2.14), (2.15).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполнение условия 1) следует из алгоритма вывода уравнений (2.14), (2.15).

Условие 2). Пусть $\varphi_1 \in L_2(\Omega)$ есть решение (2.14), (2.15) с заданной $\chi(x)$. Решим задачу (1.12)–(1.14) с $\varphi_1(x)$ вместо $\varphi(x)$ и обозначим решение через u_1 . Повторим рассуждения по выводу (2.14), (2.15) и получим

$$A\varphi_1 - \varphi_1 = \int_0^T \omega L_0 u_1 dt = L_0 \chi_1.$$

Но так как φ_1 – решение (2.14), (2.15), то $L_0 \chi_1 = L_0 \chi$, при этом $\chi_1, \chi \in W_{2,0}^2(\Omega)$. Отсюда в силу определения L_0 (2.12) $\chi_1 \equiv \chi$ и, наконец, пара (u_1, φ_1) – решение (1.12)–(1.15).

Условие 3). Пусть при некотором $\chi \in W_{2,0}^2(\Omega)$ найдется пара функций $\varphi_{1,2} \in L_2(\Omega)$ таких, что $A\varphi_{1,2} - \varphi_{1,2} = L\chi$. Обозначим решения задачи (1.12)–(1.14) с этими $\varphi_{1,2}$ через $u_{1,2}$ соответственно. Рассуждая, как при доказательстве условия 2), получим $lu_{1,2} = \chi$. Но тогда имеются две различные пары $(u_{1,2}, \varphi_{1,2})$ решений задачи (1.12)–(1.15), что противоречит предположению в условии 3).

Условие 4). Пусть $\exists(u_{1,2}, \varphi_{1,2})$ – пара решений (1.12)–(1.15). В силу выполнения условия 1) $\varphi_{1,2}$ – пара решений (2.14), (2.15). Полученное противоречие с предположением в условии 4) и завершает доказательство утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть выполнены условия (1.6)–(1.9). Тогда оператор $A: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ вполне непрерывен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала неравенство

$$\|A\varphi\|_{2,\Omega}^{(1)} \leq c\|\varphi\|_{2,\Omega}. \quad (2.16)$$

По лемме 1 функция $v = u_t$ является слабым решением следующей прямой задачи:

$$\begin{cases} \rho(x, t)v_t - L(x, t)v + (\rho_t + \lambda\rho)v = F(x, t), & v|_S = 0, \\ v|_{t=0} = v_0 \equiv \frac{f(x, 0)}{\rho(x, 0)}, & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.17)$$

где $F(x, t) = f_t(x, t) - (c_t(x, t) + \lambda\rho_t(x, t))u$. При этом $v(\cdot, t_1) \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ при произвольном $t_1 \in (0, T]$, и выполнены оценки (2.5), (2.6).

Напомним, что оператор A определен в (2.13), где $u(x, t) = u(x, t; \varphi)$ – сильное решение прямой задачи (1.12)–(1.14) при заданной $\varphi \in L_2(\Omega)$.

Чтобы получить оценку нормы $\|A\varphi\|_{2,\Omega}^{(1)}$, оценим сначала квадрат нормы первого слагаемого (2.13):

$$\left(\left\| \int_0^T \omega(t)\rho(x, t)u_t(x, t; \varphi) dt \right\|_{2,\Omega}^{(1)} \right)^2 \equiv \int_{\Omega} ((l(\rho u_t))^2 + (l(\rho u_t))_x^2) dx.$$

По неравенству Коши–Буняковского получим

$$\begin{aligned} & \left(\left\| \int_0^T \omega(t)\rho(x, t)u_t(x, t; \varphi) dt \right\|_{2,\Omega}^{(1)} \right)^2 \\ & \leq \|\omega\|_{2,(0,T)}^2 \left(\int_{\Omega} ((\rho^2 + \rho_x^2)u_t + \rho^2(u_t)_x^2) dx dt \right) \leq c(\|u_t\|_{2,Q}^{(1,0)})^2. \end{aligned}$$

Далее, в силу оценки (2.5) леммы 1 при $u_0(x) = 0$ имеем

$$\|u_t\|_{2,Q}^{(1,0)} \leq \|u_t\| \leq c(\|f\|_{2,Q} + \|f(x, 0)\|_{2,\Omega} + \|f_t\|_{2,Q}).$$

Поскольку при $f(x, t) = \Phi(x, t)\varphi(x)$ очевидно неравенство

$$\|f\|_{2,Q} + \|f_t\|_{2,Q} + \|f(x, 0)\|_{2,\Omega} \leq c\|\varphi\|_{2,\Omega}, \quad (2.18)$$

для первого слагаемого (2.13) имеем

$$\left\| \int_0^T \omega(t)\rho(x, t)u_t(x, t; \varphi) dt \right\|_{2,\Omega}^{(1)} \leq c\|\varphi\|_{2,\Omega}. \quad (2.19)$$

Аналогично для нормы второго слагаемого в (2.13) в силу гладкости $\rho(x, t)$ (1.6) и коэффициентов оператора L (1.7), а также неравенства Коши–Буняковского, имеем

$$\left\| \int_0^T \omega(t)(c(x, t) + \lambda\rho(x, t))u(x, t; \varphi) dt \right\|_{2,\Omega}^{(1)} \leq c\|u\|_{2,Q}^{(1,0)}. \quad (2.20)$$

Заметим, что $\|u\|_{2,Q}^{(1,0)} \leq \|u\|_{2,Q}^{(2,1)}$, воспользуемся неравенством (9.3) работы [9, гл. 4]: $\|u\|_{2,Q}^{(2,1)} \leq c\|f\|_{2,Q}$ и (2.18). С учетом (2.19) получим неравенство (2.16): $\|A\varphi\|_{2,\Omega}^{(1)} \leq c\|\varphi\|_{2,\Omega}$. Оно означает, что оператор A переводит множество, ограниченное в норме $L_2(\Omega)$, во множество, ограниченное по норме $W_2^1(\Omega)$, которое компактно в $L_2(\Omega)$ по теореме Реллиха [13, гл. 1, теорема 6.1].

Таким образом, оператор A компактен. Утверждение 2, а вместе с ним и теорема 1 доказаны.

2.3. Существование и единственность “в малом”.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Чтобы оценить норму

$$\|A\varphi\|_{2,\Omega}^2 \leq 2 \int_{\Omega} \left(\left(\int_0^T \omega \rho v dt \right)^2 + \left(\int_0^T \omega (c + \lambda \rho) u dt \right)^2 \right) dx,$$

сначала заметим, что

$$\left(\int_0^T \omega \rho v dt \right)^2 + \left(\int_0^T \omega c u dt \right)^2 \leq \|\omega\|_{2,(0,T)}^2 \left(\int_0^T \rho^2 v^2 dt + \int_0^T (c + \lambda \rho)^2 u^2 dt \right).$$

Далее, поскольку

$$\begin{aligned} \|u\|_{2,Q}^2 &= \int_Q \left(\int_0^t 1 \cdot u_{\tau} d\tau \right)^2 dx dt \leq \int_Q t \cdot \int_0^t u_{\tau}^2 d\tau dx dt \\ &\leq \int_0^T t \cdot \|u_t\|_{2,Q}^2 dt = \frac{T^2}{2} \cdot \|u_t\|_{2,Q}^2, \end{aligned}$$

и

$$\int_Q (c + \lambda \rho)^2 u^2 dx dt \leq c_{\lambda}^2 \frac{T^2}{2} \int_Q v^2 dx dt \leq \frac{c_{\lambda}^2 T^2}{2\rho_0} \int_Q \rho v^2 dx dt,$$

для нормы $\|A\varphi\|_{2,\Omega}^2$ имеем

$$\|A\varphi\|_{2,\Omega}^2 \leq 2\|\omega\|_{2,(0,T)}^2 \cdot \left(\rho_1 + \frac{c_{\lambda}^2 T^2}{2\rho_0} \right) \cdot \int_Q \rho v^2 dx dt. \quad (2.21)$$

Осталось оценить $\int_Q \rho v^2 dx dt$. Пусть $\{f_k(x, t)\} \in C^{\infty}(\overline{Q})$ – последовательность функций, сходящаяся в $L_2(Q)$ к $f(x, t)$ при $k \rightarrow \infty$, такая, что $f_k(x, 0)|_{\partial\Omega} = 0$, $k = 1, \dots, \infty$. Обозначим через u_k решения задач

$$\begin{cases} \rho u_{k,t} - Lu_k + \lambda \rho u_k = f_k(x, t), & (x, t) \in Q, \\ u_k|_{t=0} = 0, & x \in \Omega, \\ u_k|_S = 0, & (x, t) \in S. \end{cases} \quad (2.22)$$

Тогда по лемме 1 функции $v_k \equiv u_{k,t}$ являются решениями задач

$$\begin{cases} \rho v_{k,t} - Lv_k + (\lambda \rho + \rho_t) v_k = F_k(x, t) \equiv f_{k,t} - (c_t + \lambda \rho_t) u_k, & (x, t) \in Q, \\ v_k|_{t=0} = \frac{f_k(x, 0)}{\rho(x, 0)}, & x \in \Omega, \\ v_k|_S = 0, & (x, t) \in S. \end{cases} \quad (2.23)$$

В силу выбора последовательности f_k решения задач (2.22), (2.23) – сильные (и даже классические [14, гл. 3, § 4]), поэтому имеет смысл следующая операция: домножим уравнение в (2.23) на $v_k(x, t)$ и проинтегрируем по $Q_t = \Omega \times (0, t)$. Получим

$$\int_{Q_t} (\rho v_{k,t} - Lv_k + (\lambda \rho + \rho_t) v_k) v_k dx dt = \int_{Q_t} F_k(x, t) v_k(x, t) dx dt.$$

Так как $2\rho v_{k,t} v_k = (\rho v_k^2)_t - \rho_t v_k^2$, а $2 \int_{\Omega} b_i v_{k,x_i} v_k dx = - \int_{\Omega} b_i v_k^2 dx$ при $v_k|_{\partial\Omega} = 0$, продифференцировав данное равенство по t , получим

$$\left(\int_{\Omega} \rho v_k^2 dx \right)_t + \int_{\Omega} (2a_{ij} v_{k,x_i} v_{k,x_j} + (-b_i v_{k,x_i} + 2c + \rho_t + 2\lambda\rho) v_k^2) dx = 2 \int_{\Omega} F_k v_k dx.$$

Пренебрежем неотрицательным слагаемым $a_{ij} v_{k,x_i} v_{k,x_j} \geq \nu_1 v_{k,x}^2 \geq 0$ в левой части, а правую оценим по неравенству Коши с эpsilon:

$$\left(\int_{\Omega} \rho v_k^2 dx \right)_t + \int_{\Omega} (-b_i v_{k,x_i} + 2c + \rho_t + 2\lambda\rho) v_k^2 dx \leq \varepsilon \|F_k(\cdot, t)\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|v_k(\cdot, t)\|_{2,\Omega}^2,$$

или

$$\left(\int_{\Omega} \rho v_k^2 dx \right)_t + \int_{\Omega} (-b_i v_{k,x_i} + 2c + \rho_t + \lambda\rho - \frac{1}{\varepsilon}) v_k^2 dx \leq -\lambda \int_{\Omega} \rho v_k^2 dx + \varepsilon \|F_k(\cdot, t)\|_{2,\Omega}^2.$$

В силу произвольности $\lambda > 0$ и условий (1.6), (1.7) λ может быть выбрано настолько большим, чтобы выполнялось (1.17). При таком выборе λ имеем неравенство

$$\left(\int_{\Omega} \rho v_k^2 dx \right)_t \leq -\lambda \int_{\Omega} \rho v_k^2 dx + \varepsilon \|F_k(\cdot, t)\|_{2,\Omega}^2.$$

Обозначив $y(t) = \int_{\Omega} \rho v_k^2 dx$, для функции $y(t)$ имеем неравенство

$$y'(t) \leq -\lambda y(t) + \varepsilon \|F_k(\cdot, t)\|_{2,\Omega}^2 \quad \text{или} \quad (y(t)e^{\lambda t})_t \leq e^{\lambda t} \varepsilon \|F_k(\cdot, t)\|_{2,\Omega}^2.$$

Проинтегрируем это неравенство от 0 до t и учтем начальные данные:

$$y(t) \leq \left(\int_{\Omega} \frac{f_k^2(x, 0)}{\rho(x, 0)} dx + \varepsilon \int_0^t e^{\lambda\tau} \|F_k(\cdot, \tau)\|_{2,\Omega}^2 d\tau \right) \cdot e^{-\lambda t}.$$

Перейдем теперь к пределу при $k \rightarrow \infty$ и используем определение функции $y(t)$:

$$\int_{\Omega} \rho(x, t) v^2(x, t) dx \leq \left(\int_{\Omega} \frac{f^2(x, 0)}{\rho(x, 0)} dx + \varepsilon \int_0^t e^{\lambda\tau} \|F(\cdot, \tau)\|_{2,\Omega}^2 d\tau \right) \cdot e^{-\lambda t}. \quad (2.24)$$

Учтем теперь вид функции $F \equiv f_t - c_t u - \lambda \rho_t u$ и условие (1.16). Получим

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{\lambda\tau} \|F(\cdot, \tau)\|_{2,\Omega}^2 d\tau &\leq 2 \int_0^T e^{\lambda\tau} \left(\|f_{\tau}(\cdot, \tau)\|_{2,\Omega}^2 + \alpha(\tau; \lambda) \|f\|_{2,Q_{\tau}}^2 \right) dt \\ &\leq 2 \int_0^t e^{\lambda\tau} (\|\Phi_{\tau}^2(\cdot, \tau)\|_{\infty} + \alpha(\tau; \lambda) \|\Phi^2\|_{\infty, Q_{\tau} \cdot \tau}) d\tau \cdot \|\varphi\|_{2,\Omega}^2. \end{aligned}$$

Подставим в (2,24):

$$\int_{\Omega} \rho(x, t) v^2(x, t) dx \leq e^{-\lambda t} \cdot \left(\left\| \frac{\Phi^2(\cdot, 0)}{\rho(\cdot, 0)} \right\|_{\infty, \Omega} + 2\varepsilon \int_0^t e^{\lambda \tau} (\|\Phi_t^2(\cdot, \tau)\|_{\infty, \Omega} + \alpha(\tau; \lambda) \|\Phi^2\|_{\infty, Q_\tau} \cdot \tau) d\tau \right) \cdot \|\varphi\|_{2, \Omega}^2.$$

Наконец, оценим норму оператора A . В силу (2.21) имеем

$$\|A\varphi\|_{2, \Omega}^2 \leq 2\|\omega\|_{2, (0, T)}^2 \cdot \left(\rho_1 + \frac{c_\lambda^2 T^2}{2\rho_0} \right) \int_0^T e^{-\lambda t} \left(\left\| \frac{\Phi^2(\cdot, 0)}{\rho(\cdot, 0)} \right\|_{\infty, \Omega} + 2\varepsilon \int_0^t e^{\lambda \tau} \left(\|\Phi_t^2(\cdot, \tau)\|_{\infty, \Omega} + \alpha(\tau; \lambda) \|\Phi^2\|_{\infty, Q_\tau} \cdot \tau \right) d\tau \right) dt \cdot \|\varphi\|_{2, \Omega}^2.$$

Поэтому, если имеет место (1.18), то выполняется неравенство $\|A\| \leq \sqrt{m} < 1$. Таким образом, оператор A является сжимающим; следовательно, $A - I$ обратим, и при каждом $\chi \in W_{2,0}^2(\Omega)$ задача (2.14), (2.15) имеет единственное решение $\varphi(x) \in L_2(\Omega)$. Следовательно, по утверждению 1 имеет единственное решение (u, φ) задача (1.12)–(1.15).

При этом, так как $\|\varphi\|_{2, \Omega} \leq \|A\varphi\|_{2, \Omega} + \|L\chi\|_{2, \Omega}$, то $\|\varphi\|_{2, \Omega} \leq \|L\chi\|_{2, \Omega} / (1 - \sqrt{m})$, а поскольку $\|u\|_{2, Q}^{(2,1)} \leq c\|\varphi\|_{2, \Omega}$ в силу [9, гл. 4, § 9], для решения (1.12)–(1.15) имеем оценку устойчивости:

$$\|u\|_{2, Q}^{(2,1)} + \|\varphi\|_{2, \Omega} \leq c\|L\chi\|_{2, \Omega}.$$

Теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. В данном, более простом, случае обратную задачу (1.12)–(1.15) удобнее свести к эквивалентному операторному уравнению с несколько отличным оператором:

$$A_1\varphi = \int_0^T \omega(t) \rho(x, t) u_t(x, t; \varphi) dt. \quad (2.25)$$

Эквивалентность (1.12)–(1.15) и уравнения

$$A_1\varphi - \varphi = \psi, \quad (2.26)$$

$$\text{где } \psi = (L - \lambda\rho)(x)\chi, \quad (2.27)$$

доказывается полностью аналогично утверждению 1, учитывая те факты, что, во-первых, оператор $L - \lambda\rho$ является стационарным и, следовательно, перестановочным с оператором переопределения I и, во-вторых, что при выполнении неравенства (1.19) задача $(L - \lambda\rho)\chi = \psi$, $\chi|_{\partial\Omega} = 0$ будет однозначно разрешима при любой $\psi \in L_2(\Omega)$.

Норма $\|A_1\varphi\|_{2, \Omega}^{(1)}$ оценивается в точности так же, как норма первого слагаемого при доказательстве утверждения 2.

Таким образом, задача (1.12)–(1.15) в частном случае, соответствующем условиям следствия 1, сводится к (2.26)–(2.27). Поэтому, если будет доказано неравенство $\|A_1\| < 1$ при выполнении условий следствия 1, то мы сразу получаем все утверждения теоремы для этого случая.

Сопоставляя (2.25) и (2.13), видим, что норма $\|A_1\varphi\|_{2,\Omega}^2$ оценивается через норму первого слагаемого в выражении (2.13), определяющем оператор A , откуда вместо (2.21) имеем

$$\|A_1\varphi\|_{2,\Omega}^2 \leq \rho_1 \|\omega\|_{2,(0,T)}^2 \cdot \int_Q \rho v^2 dx dt.$$

Оценка $\int_Q \rho v^2 dx dt$ проводится так же, как в доказательстве теоремы 2. В результате мы получаем оценку (1.20) вместо (1.18). Следствие 1 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2 сводится к повторению рассуждений п. 1.2 о сведении задачи (1.1)–(1.4) к задаче (1.12)–(1.15) и применению к (1.12)–(1.15) теоремы 2 и очевидного в силу (1.7) неравенства $\|L\chi\|_{2,\Omega} \leq c\|\chi\|_{2,\Omega}^{(2)}$.

2.4. Примеры использования теоремы 2.

ПРИМЕР 1. Пусть $Lu = (a_{ij}(x)u_{x_j})_{x_j} - b_i u_{x_i}$ при $b_i = \text{const}$, а $\rho = \rho(x)$. Тогда $L_t u \equiv 0$, $\rho_t \equiv 0$ и, следовательно, $\alpha(t; \lambda) \equiv 0$. Пусть $\omega(t) \equiv 1$ и $\Phi_1(x, t) = \Phi_2(x) e^{\delta t}$ при некотором $\delta > 0$. При таких условиях, выбрав сразу $\lambda = \delta$, мы получим

$$\Phi = 1 / \int_0^T \omega(t) dt = \frac{1}{T},$$

и (1.20) переписывается в виде

$$m = \rho_1 \cdot T^2 \int_0^T e^{-\delta t} \left(\frac{1}{T^2 \rho_0} + 2\varepsilon \cdot 0 \right) dt < 1.$$

Выбрав ε произвольным образом так, чтобы выполнялось условие (1.17), и вычислив интеграл, получим

$$m = \frac{\rho_1}{\rho_0} \cdot \int_0^T e^{-\delta t} dt = \frac{\rho_1}{\rho_0} \cdot \frac{1 - e^{-\delta T}}{\delta} < 1.$$

Отсюда имеем, что

- 1) при $\delta \geq \rho_1/\rho_0$ неравенство $m < 1$ выполнено при любых $T > 0$ и по следствию 1 задача (1.12)–(1.15) является корректно разрешимой при всех $T > 0$;
- 2) при $\delta < \rho_1/\rho_0$ неравенство (1.20) будет верно при достаточно малых T , а именно, при $T < \frac{1}{\delta} \ln(\rho_1/(\rho_1 - \delta\rho_0))$, и тогда же будет корректно разрешима задача (1.12)–(1.15).

ПРИМЕР 2. Пусть, как и в примере 1, $\Phi_1(x, t) = \Phi_2(x) e^{\delta t}$ при некотором $\delta > 0$. При таких условиях, выбрав сразу $\lambda = \delta$, мы получим $\Phi = 1/T$. Пусть также выполняются все остальные условия примера 1, но $c = c(x, t)$. Тогда число ε можно подобрать из условия (1.17) по данным c , ρ и $\lambda = \delta$. Функцию $\alpha(t; \lambda) \neq 0$ можно найти из неравенства

$$\|L_t u\|_{2,\Omega}^2 \leq \max_{\Omega} (c_t^2(x, t)) \cdot \|u\|_{2,\Omega}^2$$

и оценки (2.7):

$$\|u\|_{2,\Omega}^2 \leq \frac{\varkappa(t)}{\rho_0 \varepsilon_0} \|f\|_{2,Q_t}^2,$$

где ε_0 – любое положительное число, а

$$\varkappa(t) = 1 + \frac{1}{\rho_0} \int_0^t \max_{\Omega} \{0, \varepsilon_0 - 2c - 2\lambda\rho\} d\tau \cdot e^{\frac{1}{\rho_0} \int_0^t \max_{\Omega} \{0, \varepsilon_0 - 2c - 2\lambda\rho\} d\tau}.$$

Заметим, что вместо $c(x, t)$ в данной оценке мы подставили $c(x, t) + \lambda\rho$, в соответствии с видом левой части уравнения в задаче (1.12).

Если $c(x, t) \geq 0$, то ε_0 можно выбрать так, чтобы $\varkappa(t) \equiv 1$, положив $\varepsilon_0 = \min_Q (2c + 2\lambda\rho)$. Обозначим

$$\tilde{\alpha} = \max_Q (c_t^2(x, t)) \cdot \frac{1}{\varepsilon_0}.$$

Тогда $\alpha(t; \lambda) \leq \tilde{\alpha}/\rho_0$ и (1.18) приобретет вид

$$m \leq 2T^2 \left(\rho_1 + \frac{c_\delta^2 T^2}{2\rho_0} \right) \cdot \int_0^T e^{-\delta t} \left(\frac{1}{T^2 \rho_0} + 2\varepsilon \int_0^t e^{\delta \tau} \tau \cdot \frac{\tilde{\alpha}}{T^2 \rho_0} d\tau \right) dt.$$

Отсюда

$$m \leq \frac{2}{\rho_0} \left(\rho_1 + \frac{c_\delta^2 T^2}{2\rho_0} \right) \cdot \left[\frac{1 - e^{-\delta T}}{\delta} + \frac{2\tilde{\alpha}\varepsilon}{\delta^2} \left(\frac{\delta T^2}{2} - T + \frac{1 - e^{-\delta T}}{\delta} \right) \right].$$

Таким образом, $m = O(T)$ при $T \rightarrow +0$, поэтому при $c(x, t) \geq 0$ и достаточно малых T неравенство $m < 1$ будет выполнено, и обратная задача (1.12)–(1.15) будет корректно разрешима.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. 1) Оценка (1.20) дает для случая $\rho(x, t) \equiv 1$, $c(x, t) \equiv c(x)$ результат, близкий к установленному в [2].

2) Теоремы 1, 2, а также следствия 1, 2 можно обобщить на случай, когда требования на гладкость коэффициентов $\rho(x, t)$, $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x, t)$ являются минимальными, необходимыми для корректности прямой задачи (1.12)–(1.14).

3) Теорему 2 и следствия 1 и 2 можно эквивалентно сформулировать следующим способом: поскольку ε и λ в определениях (1.18) и (1.20) числа m могут быть выбраны произвольно, при единственном условии (1.17) (и (1.19) в случае следствия 1), то m в (1.18) и (1.20), фактически, является функцией от ε и λ : $m = m(\varepsilon, \lambda)$. Поэтому вместо неравенства $m < 1$ можно требовать выполнения условия

$$\tilde{m} \equiv \inf_{\varepsilon, \lambda} \{m(\varepsilon, \lambda)\} < 1,$$

где $\inf$ берется по всем ε и λ , удовлетворяющим условию (1.17) (а для следствия 1 еще и (1.19)). Заметим, что в примерах 1 и 2 мы выбирали λ не из соображений оптимальности, а для упрощения вычислений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York–Basel: Marcel Dekker inc., 2000.
- [2] Прилепко А. И., Костин А. Б. О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 4. С. 49–68.
- [3] Прилепко А. И., Соловьев В. В. Теоремы разрешимости и метод Ротэ в обратных задачах для уравнений параболического типа // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 11. С. 1971–1980.

- [4] Прилепко А. И., Тихонов И. В. Единственность решения обратной задачи для эволюционного уравнения и приложения к уравнению переноса // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 2. С. 77–87.
- [5] Прилепко А. И., Костин А. Б. Оценка спектрального радиуса одного оператора и разрешимость обратных задач для эволюционного уравнения // Матем. заметки. 1993. Т. 53. № 1. С. 89–94.
- [6] Прилепко А. И., Васин И. А. Некоторые обратные начально-краевые задачи для нестационарных линеаризованных уравнений Навье–Стокса // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 1. С. 106–117.
- [7] Прилепко А. И., Орловский Д. Г. О полугрупповом подходе к задаче определения неоднородного члена в эволюционных уравнениях // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305. № 5. С. 1045–1049.
- [8] Isakov V. Inverse parabolic problems with the final overdetermination // Commun. on Pure and Appl. Math. 1991. V. 44. P. 185–209.
- [9] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
- [10] Ладыженская О. А. О решении нестационарных операторных уравнений // Матем. сб. 1956. Т. 39 (81). № 4. С. 491–524.
- [11] Вишик М. И., Ладыженская О. А. Краевые задачи для уравнений в частных производных и некоторых классов операторных уравнений // УМН. 1956. Т. 11. № 6 (72). С. 41–97.
- [12] Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. 2-е издание. М.: Наука, 1970.
- [13] Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
- [14] Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.