Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Г. Григорьев, Оценки норм случайных полиномов и их приложение, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 6, 950–954

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm710>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 18:09:15

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ОЦЕНКИ НОРМ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛИНОМОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ

П. Г. Григорьев

1. Введение. Настоящая работа посвящена оценкам математического ожидания норм случайных полиномов вида

$$\sum_{i=1}^n a_i \xi_i(\omega) f_i(x), \quad (1)$$

где $\{\xi_i\}_1^n$ – набор независимых случайных величин на (Ω, P) , а $\{f_i\}_1^n$ – система функций на другом пространстве с мерой (X, μ) , норма здесь берется в пространстве функций, зависящих от x , при фиксированном ω .

Подобные оценки для различных наборов функций $\{f_i\}_1^n$ и случайных величин $\{\xi_i\}_1^n$ широко применяются в теории функций начиная с тридцатых годов. В 1954 г. Салем и Зигмунд [1] установили серию оценок равномерной нормы случайных тригонометрических полиномов; в частности, было показано, что

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{k=-n}^n r_k(\omega) e^{ikt} \right\|_{\infty} \asymp (n \log n)^{1/2},$$

где $r_k(\cdot)$ – функции Радемахера.

К настоящему моменту разработаны различные методы оценки равномерных норм случайных полиномов (1) (см., например, [2]–[4]). Оценка снизу равномерной нормы случайных полиномов (1) для ортогональных наборов функций общего вида впервые была получена Кашиным и Цафрири в работах [2], [5], [6]; этот результат будет сформулирован в разделе 2.

В работе [5] Кашин и Цафрири ввели следующую норму:

$$\|f\|_{m, \infty} := \int_X \cdots \int_X \max\{|f(x_1)|, \dots, |f(x_m)|\} d\mu(x_1) \cdots d\mu(x_m), \quad (2)$$

где f – функция, определенная на пространстве с мерой (X, μ) , $\mu(X) = 1$. Эта норма является естественным обобщением $\|\cdot\|_{\infty}$ -нормы, взятой по сетке; мы будем называть ее *интегрально-равномерной нормой*. В [6] была фактически получена нижняя оценка для нормы (2) случайного полинома (1) с некоторым специально выбранным параметром m . В п. 2 данной работы получены обобщения результатов из [2], [5], [6] как на случай произвольного параметра m , так и для более широкого класса функций $\{f_i\}_1^n$. Также показывается, что при некоторых дополнительных ограничениях на $\{f_i\}_1^n$, $\{\xi_i\}_1^n$ и m установленная оценка точна по порядку. В п. 3 приведены некоторые элементарные свойства интегрально-равномерной нормы, также там приведен ряд неравенств для интегрально-равномерной нормы тригонометрических полиномов. Кроме того, в п. 3 дано приложение полученных оценок.

2. Оценки интегрально-равномерной нормы случайных полиномов. Кашиным и Цафрири было установлено (см. [5], [6]), что для систем функций $\{f_i\}_{i=1}^n, \{\xi_i\}_{i=1}^n$ на вероятностных пространствах (X, μ) и (Ω, P) соответственно, удовлетворяющих условиям

- (а) $\|f_i\|_2 = 1$ и $\|f_i\|_3 \leq M$ для всех i ;
- (б) $\|\sum_{i=1}^n c_i f_i\|_2 \leq M \left(\sum_{i=1}^n |c_i|^2\right)^{1/2}$ для всех наборов коэффициентов $\{c_i\}_1^n$;
- (с) $\{\xi_i\}_1^n$ – независимые случайные величины такие, что $E\xi_i = 0, E|\xi_i|^2 = 1$ и $(E|\xi_i|^3)^{1/3} \leq M$;

существуют положительные константы $q = q(M), C_j = C_j(M), j = 1, 2, 3$, такие, что выполнена следующая оценка:

$$P\left\{\omega \in \Omega: \left\|\sum_{i=1}^n a_i \xi_i(\omega) f_i\right\|_{L_\infty(X)} \leq C_1 \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)^{1/2} (1 + \log R)^{1/2}\right\} \leq \frac{C_2}{R^q}, \quad (3)$$

где

$$R = R(\{a_i\}_1^n) := \frac{(\sum_{i=1}^n |a_i|^2)^2}{\sum_{i=1}^n |a_i|^4}, \quad (4)$$

и, следовательно,

$$E\left\|\sum_{i=1}^n a_i \xi_i f_i\right\|_{L_\infty(X)} \geq C_3 \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)^{1/2} (1 + \log R)^{1/2}. \quad (5)$$

При доказательстве этих оценок была фактически оценена величина $\|\sum_{i=1}^n a_i \xi_i f_i\|_{m, \infty}$ с некоторым специально выбранным параметром m , точнее $m \asymp (1 + \log R)^2 R^{1/2+\varepsilon}$.

В настоящей работе установлена теорема, обобщающая неравенства (3), (5) на случай интегрально-равномерной нормы и некоторого более широкого класса случайных полиномов. В частности, показано, что при $R(\{a_i\}_1^n) \asymp n$ оценки (3), (5) остаются верными, если функции $\{f_i\}_1^n$ удовлетворяют вместо условия (б) условию

- (б') $\|\sum_{i=1}^n c_i f_i\|_2 \leq M n^p \left(\sum_{i=1}^n |c_i|^2\right)^{1/2}$ для всех наборов коэффициентов $\{c_i\}_1^n$ с некоторыми константами $M > 0$ и $p \in [0, 1/2)$.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть наборы функций $\{f_i\}_{i=1}^n$ и $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ определены на вероятностных пространствах (X, μ) и (Ω, P) соответственно и удовлетворяют условиям (а) и (с). Пусть также задан некоторый набор коэффициентов $\{a_i\}_1^n$ и для всех наборов коэффициентов $\{c_i\}_1^n$ выполнено неравенство

$$\left\|\sum_{i=1}^n c_i f_i\right\|_2 \leq M(R(\{a_i\}))^p \left(\sum_{i=1}^n |c_i|^2\right)^{1/2},$$

где $R = R(\{a_i\}_1^n)$ определено в (4), а $M > 0$ и $p \in [0, 1/2)$ – некоторые постоянные. Тогда существуют положительные постоянные $q' = q'(p, M), C'_j = C'_j(p, M), j = 1, 2, 3$, такие, что выполнены следующие оценки:

$$P\left\{\omega \in \Omega: \left\|\sum_{i=1}^n a_i \xi_i(\omega) f_i\right\|_{m, \infty} \leq C'_1 \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \log P\right)^{1/2}\right\} \leq \frac{C'_2}{P^{q'}}, \quad (6)$$

$$E\left\|\sum_{i=1}^n a_i \xi_i f_i\right\|_{m, \infty} \geq C'_3 \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \log P\right)^{1/2}, \quad (7)$$

где $P := \min(m, R) + 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из теоремы 1 легко следует, что при $R = R(\{a_i\}_1^n) \asymp n$ для функций $\{f_i\}_{i=1}^n$ и $\{\xi_i\}_{i=1}^n$, удовлетворяющих условиям (а), (b'), (с), выполнены оценки (6), (7). Более того, при $R \asymp n$ с помощью простой геометрической леммы можно установить (6) и (7) для функций $\{f_i\}_1^n$, удовлетворяющих вместо (b') следующему неравенству:

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_i \right\|_2 \leq M n^{1/2+p}$$

для всех наборов знаков $\varepsilon_i = \pm 1$ и некоторого $p \in [0, 1/2)$.

Для равномерно ограниченных в L_∞ наборов функций $\{f_k\}_1^n$ при некоторых дополнительных ограничениях на $\{\xi_k\}_1^n$ и $m \leq n$ оценка (7) точна по порядку. Точнее, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть ξ_k – независимые случайные величины, для которых имеет место следующая экспоненциальная оценка:

$$\mathbb{P} \left\{ \left| \sum_{k=1}^n c_k \xi_k \right| > t \left(\sum_{k=1}^n c_k^2 \right)^{1/2} \right\} \leq C_4 e^{-t^2 C_5} \quad (8)$$

для всех наборов коэффициентов $\{c_k\}_1^n$ с некоторыми положительными постоянными C_4, C_5 . Тогда для любого набора функций $\{f_k\}_1^n \subset L_\infty(X)$ выполнено следующее неравенство:

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k f_k \right\|_{m,\infty} \leq C_6 \left(\sum_{k=1}^n \|f_k\|_\infty^2 (1 + \log m) \right)^{1/2}, \quad (9)$$

где $C_6 > 0$ – некоторая абсолютная постоянная.

СЛЕДСТВИЕ. Если для независимых случайных величин $\{\xi_k\}_1^n$ выполнена экспоненциальная оценка (8) и $m \leq n$, то установленное в теореме 1 неравенство (7) для интегрально-равномерной нормы тригонометрических случайных полиномов $\sum_{k=-n}^n \xi_k e^{ikt}$ точно по порядку.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если применить теорему 2 к последовательности тригонометрических полиномов нескольких переменных порядка не выше n с параметром $m = n$, то вместе с соотношением (11) (см. ниже) мы получим оценку сверху для математического ожидания равномерной нормы случайного тригонометрического полинома, приведенную в [7, гл. 6, теорема 3].

3. Некоторые свойства интегрально-равномерной нормы. Отметим некоторые очевидные свойства $\|\cdot\|_{m,\infty}$ -нормы. Нетрудно видеть, что для любой интегрируемой функции f выполнено $\|f\|_1 = \|f\|_{1,\infty}$ и

$$\|f\|_{m,\infty} = \int_0^\infty (1 - (1 - \lambda_f(t))^m) dt,$$

где

$$\lambda_f(t) := \mu\{\tau : |f(\tau)| > t\}.$$

Из последнего тождества легко следует, что норма индикатора множества $E \subset X$, $\mu E = c$, равна

$$\|\chi_E\|_{m,\infty} = 1 - (1 - c)^m. \quad (10)$$

То есть, если взять m порядка $1/c$, то $\|\chi_E\|_{m,\infty}$ будет порядка единицы. Как следствие получаем для тригонометрических полиномов порядка не выше n оценку

$$\|P_n\|_{n,\infty} \asymp \|P_n\|_\infty. \quad (11)$$

В самом деле, из неравенства Бернштейна следует, что для множества $E := \{x \in [0, 2\pi] : |P_n(x)| \geq \|P_n\|_\infty / 2\}$ выполнено $\mu E \geq 1/n$, вычисляя норму $\|\chi_E\|_{n,\infty}$ с помощью (10), получим (11).

Нетрудно также заметить, что для $f \in L_\infty(X)$ имеет место оценка

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_{m,\infty} \leq \|f\|_\infty,$$

причем $\|f\|_{m,\infty} \rightarrow \|f\|_\infty$ при $m \rightarrow \infty$. Пользуясь числовым неравенством $\max(|a|, |b|) \leq |a| + |b|$ и определением интегрально-равномерной нормы (2), для любой $f \in L_1(X)$ имеем

$$\|f\|_{n,\infty} \leq \left(\frac{n}{m} + 1\right) \|f\|_{m,\infty}, \quad m < n.$$

Для тригонометрических полиномов порядка не выше n последнее неравенство вместе с соотношением (11) влечет при $n \geq m$ оценку

$$\|P_n\|_\infty \leq C \frac{n}{m} \|P_n\|_{m,\infty},$$

где $C > 0$ – некоторая абсолютная постоянная. Для ядер Фейера это неравенство точно по порядку. Можно показать, что нормы ядер Фейера и Дирихле при $n \geq m$ удовлетворяют следующим соотношениям

$$\begin{aligned} \|K_n\|_{m,\infty} &\asymp m; \\ \|D_n\|_{m,\infty} &\asymp m \left(1 + \log \frac{n}{m}\right), \end{aligned}$$

где K_n – ядро Фейера, D_n – ядро Дирихле.

Для интегрально-равномерной нормы, как, впрочем, и для всякой нормы, инвариантной относительно сдвигов (см., например, [8]), имеет место аналог неравенства Бернштейна.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Для интегрально-равномерной нормы производной тригонометрического полинома P_n порядка не выше n выполнена следующая оценка:

$$\|P_n^{(r)}\|_{m,\infty} \leq n^r \|P_n\|_{m,\infty}, \quad r = 1, 2, \dots$$

Используя понятие интегрально-равномерной нормы и теорему 1, удалось частично разрешить следующую задачу, поставленную Семеновым.

ЗАДАЧА. Пусть $\{f_i\}_{i=1}^n$ – система функций на пространстве с мерой (X, μ) , $\mu X = 1$, причем $\|f_i\|_1 = 1$. Спрашивается, существует ли набор знаков $\{\theta_i\}_{i=1}^n$, $\theta_i = \pm 1$, такой, что для любого $k = 1, \dots, n$ имеет место оценка

$$\sup_{\substack{e \subset X \\ \mu e = 2^{-k}}} 2^k \left| \sum_{i=1}^n \theta_i f_i(x) \right| d\mu(x) \geq c_0 \sqrt{nk}, \quad (12)$$

где c_0 – некоторая абсолютная положительная постоянная.

Используя сформулированную в п. 2 теорему 1, можно показать, что справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3. Для любого набора функций $\{f_i\}_{i=1}^n$ на (X, μ) , $\mu X = 1$, такого, что $\|f_i\|_1 = 1$ и $\|f_i\|_3 \leq M$, существует набор знаков $\{\theta_i\}_{i=1}^n$, $\theta_i = \pm 1$, такой, что при любом $k = 1, \dots, \log n$ выполнено неравенство (12) с некоторой абсолютной константой $c_0 > 0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Salem R., Zygmund A. // Acta Math. 1954. V. 91. P. 245–301. 2. Kashin B., Tzafriri L. // East J. Approximation. 1995. V. 1. № 1. P. 125–139. 3. Ledoux M., Talagrand M. Probability in Banach Spaces. Berlin: Springer Verlag, 1991. 4. Marcus M., Pisier G. Random Fourier Series with Applications to Harmonic Analysis. Princeton: Princeton Univ. Press, 1981. 5. Kashin B., Tzafriri L. // East J. Approximation. 1995. V. 1. № 3. P. 373–377. 6. Kashin B., Tzafriri L. Lower Estimates for the Supremum of Some Random Processes. II. Preprint MPIM № 95-85. Bonn: Max-Planck Institut für Mathematik, 1995. 7. Кахан Ж.-П. Случайные функциональные ряды. М.: Мир, 1973. 8. DeVore R., Lorentz G. Constructive Approximation. Berlin: Springer Verlag, 1993.