Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Алимов, Геометрическая характеристика строгих солнц в пространстве $\ell^\infty(n)$, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 1, 3–11

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm712>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 08:13:23

УДК 517.982.256

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ СТРОГИХ СОЛНЦ В ПРОСТРАНСТВЕ $\ell^\infty(n)$

А. Р. Алимов

Подмножество M линейного нормированного пространства X называется *строгим солнцем*, если для каждой точки $x \in X \setminus M$ множество ее ближайших точек из M непусто и для каждой точки $y \in M$, ближайшей к x , точка y является ближайшей точкой из M для всех точек луча $\{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid \lambda > 0\}$. В статье получена геометрическая характеристика строгих солнц в пространстве $\ell^\infty(n)$.

Библиография: 17 названий.

Подмножество M линейного нормированного пространства X называется *строгим солнцем*, если для каждой точки $x \in X \setminus M$ множество ее ближайших точек из M непусто и для каждой точки $y \in M$, ближайшей к x , точка y является ближайшей точкой из M для всех точек луча, начинающегося в y и проходящего через x . Строгое солнце всегда непусто и замкнуто (о строгих солнцах см. [1]–[3]).

Для точки $x \in X$ посредством $P_M x$ обозначается множество ее ближайших элементов из M , т.е.

$$P_M x = \left\{ y \in M \mid \|x - y\| = \rho(x, M) := \inf_{z \in M} \|x - z\| \right\}.$$

В данной работе получена внутренняя геометрическая характеристика строгих солнц в пространстве $\ell^\infty(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется ℓ^1 -*выпуклым*, если для всех $x, y \in M$, $x \neq y$, найдется точка $z \in M$, $z \neq x$, $z \neq y$, такая, что $\|x - y\|_{\ell^1} = \|x - z\|_{\ell^1} + \|z - y\|_{\ell^1}$ (здесь $\|\cdot\|_{\ell^1}$ – стандартная ℓ^1 -норма на $\mathbb{R}^n$). Слово “выпукло” в данном контексте было впервые использовано Менгером [4] (см. [5]). Так как ℓ^1 -норма не строго выпукла, то векторы $x - y$ и $x - z$ не обязаны быть коллинеарными.

Для множества $M \subset \mathbb{R}^n$ определим

$$\text{eqc}(M) = \text{eqc}_{\mathbb{R}^n}(M) := \{j \in \{1, \dots, n\} \mid x_j = y_j \text{ для всех } x, y \in M\},$$

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n);$$

“eqc” – аббревиатура выражения “equal coordinates” – равные координаты.

Для $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $M \subset \mathbb{R}^n$ мы пишем, что

$$x \not\equiv_M y, \text{ если } x_j \neq y_j \text{ для всех } j \notin \text{eqc}(M);$$

$$x \not\equiv y, \text{ если } x_i \neq y_i \text{ для всех } i = 1, \dots, n.$$

Работа выполнена при поддержке программ “Ведущие научные школы”, грант № 96-15-96102, и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00357.

Мы называем множество M *строго ℓ^1 -выпуклым*, если

- 1) оно ℓ^1 -выпукло и
- 2) для всех $x, y \in M, x \neq_M y$, найдется ℓ^1 -геодезический сегмент $k(t) \subset M, 0 \leq t \leq 1$, соединяющий x и y , такой, что его координатные функции $[0, 1] \ni t \mapsto k_j(t)$ монотонны для $j = 1, 2, \dots, n$ и строго монотонны для $j \notin \text{eqs}(M)$.

(Под ℓ^1 -геодезическим сегментом мы подразумеваем дугу длины $\|x - y\|_{\ell^1}$, начинающуюся в x и заканчивающуюся в y .) В данных терминах ℓ^1 -выпуклость множества M означает [6], что любые две точки $x, y \in M$ могут быть соединены ℓ^1 -геодезическим сегментом $k(\cdot) \subset M$, координатные функции $k_i(t)$ которого монотонны по t (но не обязательно строго монотонны).

На рис. 1 даны примеры ℓ^1 -выпуклых множеств из $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. Строго ℓ^1 -выпуклыми из них являются лишь множества во второй и четвертой системе координат.

Рис. 1

Свойство строгой ℓ^1 -выпуклости (как и свойство ℓ^1 -выпуклости) является наследственным. Именно, непосредственно из определения следует, что если $M \subset \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^m$ — строго ℓ^1 -выпуклое множество в $\mathbb{R}^k$, то оно строго ℓ^1 -выпукло и в $\mathbb{R}^m$. Если множество M ℓ^1 -выпукло в $\mathbb{R}^m$ и $k \leq m$, то $M \subset \mathbb{R}^k$ ℓ^1 -выпукло в $\mathbb{R}^k$.

Однако при переходе к меньшей размерности свойство строгой ℓ^1 -выпуклости может теряться, хотя ℓ^1 -выпуклость сохраняется всегда. Действительно, пусть $A = (2, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$. Для $0 \leq t \leq 1$ определим точку $C_t = (t, t, 0)$ и построим семейство однозвенных ломаных в плоскости $\mathbb{R}^2 = \{z = 0\}$:

$$M_t = [A, C_t] \cup [C_t, B], \quad 0 \leq t < 1, \quad M_1 = [A, B].$$

Тогда множество

$$M = \bigcup_{0 \leq t \leq 1} (M_t + (0, 0, t))$$

строго ℓ^1 -выпукло в $\mathbb{R}^3$, но его сечение плоскостью $\mathbb{R}^2 = \{z = 0\}$ представляет собой объединение отрезков $[A, 0]$ и $[0, B]$ и не является строго ℓ^1 -выпуклым множеством в $\mathbb{R}^2$. Однако, по основной теореме (ниже) будет следовать, что M — строгое солнце в $\ell^\infty(3)$.

Под *основным кокрестом* в $\mathbb{R}^n$ мы будем понимать любое из множеств вида

$$c(\mathbb{R}^n) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_j = \text{const}(j) \text{ для некоторого } j \in \{1, \dots, n\}\}, \quad \text{eqc}(c(\mathbb{R}^n)) = \emptyset,$$

(здесь $\text{const}(j)$ – константа, зависящая только от координаты j); а под *кокрестом* $c_{\mathbb{R}^n}(J)$ по набору координат $J = \{j_1, \dots, j_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ мы будем понимать множество

$$c_{\mathbb{R}^n}(J) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_j = \text{const}(j) \text{ для некоторого } j \in J, x_i = \text{const}(i) \text{ для всех } i \notin J\},$$

при этом, чтобы исключить вырожденные случаи, мы *всегда* предполагаем, что $k \geq 2$, т.е. $\text{card } J \geq 2$ в определении $c_{\mathbb{R}^n}(J)$. Наконец, под *кокрестом* будем понимать любое множество $C \subset \mathbb{R}^n$ такое, что $C \subset c_{\mathbb{R}^n}(\{1, \dots, n\} \setminus \text{eqc}(C))$. (При этом всегда $\text{card eqc}(C) < n - 1$.) На рис. 2 даны примеры кокрестов в $\mathbb{R}^3$.

Рис. 2

Любое из множеств M , изображенных на рис. 2, является кокрестом, равно как и подмножество $N \subset M$ с $\text{eqc}(N) = \text{eqc}(M)$. Отметим, что первый и третий кокресты на рис. 2 не являются строго ℓ^1 -выпуклыми множествами (хотя они ℓ^1 -выпуклы), а второй кокрест, определяемый формулой $\{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_i = x_j = 0 \text{ для некоторых } i \neq j\}$, является строго ℓ^1 -выпуклым множеством.

Кокресты будут играть в некотором смысле исключительную роль в наших рассуждениях. Как мы увидим ниже (предложение 1), кокрест никогда не является строгим солнцем в $\ell^\infty(n)$.

В следующей основной теореме дается характеристика строгих солнц в $\ell^\infty(n)$.

ТЕОРЕМА. Пусть $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто. Для того чтобы M было строгим солнцем в $\ell^\infty(n)$, необходимо и достаточно, чтобы оно было строго ℓ^1 -выпукло и не являлось кокрестом.

1. Исторические замечания. Здесь и ниже X – конечномерное нормированное пространство над $\mathbb{R}$.

Множество $M \subset X$ называется *чебышёвским множеством*, если для каждой точки $x \in X$ множество $P_M x$ одноточечно. Множество M называется *солнцем*, если для каждой точки $x \in X \setminus M$ существует точка $y \in P_M x$ такая, что $y \in P_M[(1 - \lambda)y + \lambda x]$ для всех $\lambda \geq 0$. Ясно, что каждое строгое солнце является солнцем (обратное, вообще говоря, неверно, см. [1]; к примеру, любое множество (кокрест) на рис. 2 является солнцем в $\ell^\infty(n)$, но не является строгим солнцем). В конечномерном пространстве каждое чебышёвское множество является солнцем [1].

Вопрос о характеристике солнц, строгих солнц и чебышёвских множеств рассматривался многими авторами (см. [5]–[10]). Этот вопрос тривиален для солнц и строгих

солнц, если пространство X гладко (т.е. в каждой точке единичной сферы пространства X опорная гиперплоскость единственна): в гладких X всякое солнце (и, следовательно, всякое строгое солнце и всякое чебышёвское множество в конечномерном случае) выпукло (см. [1]).

Пространство $\ell^\infty(n)$ негладко; его единичный шар — n -мерный куб.

Структура чебышёвских множеств и солнц на плоскости $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ с произвольной нормой хорошо изучена: чебышёвские множества были охарактеризованы П. Грубером [11], а солнца — Х. Беренсом, Л. Хетцельтом [12] и Хетцельтом [13]. Геометрическая характеристика строгих солнц на плоскости через опорные прямые, данная в [13], является ошибочной. Топологическая характеристика компактных чебышёвских множеств и компактных солнц на нормированной и несимметрично нормированной плоскости получена в [14].

В 1968 году в докторской диссертации [9] Б. Брозовский ввел понятие регулярного множества $M \subset C(Q)$, Q — компакт: M *регулярно*, если для любых $x, x_0 \in M$ и замкнутого множества $A \subset Q$ такого, что

$$\inf_{q \in A} |x(q) - x_0(q)| > 0,$$

элемент x_0 содержится в замыкании множества

$$\{v \in M \mid (v(q) - x_0(q)) \cdot (x(q) - x_0(q)) > 0 \text{ для всех } q \in A\}.$$

В этом случае пишем $(x, x_0) \in \text{Reg}(M)$.

Это понятие было независимо введено Ч. Данемом (см. [8], где данное понятие детально исследуется и используется, а также обзор Браесса [7]).

Следующая теорема описывает строгие солнца в $\ell^\infty(n)$.

ТЕОРЕМА А (Б. Брозовский [9], [10], [7], Ч. Данем [8]). *Для непустого замкнутого подмножества $M \subset \ell^\infty(n)$ следующие условия эквивалентны:*

- а) M — строгое солнце;
- б) M регулярно.

Браесс [7] (см. лемму В ниже) установил свойство строгих солнц в $\ell^\infty(n)$, в некоторых случаях более сильное, чем ℓ^1 -выпуклость, но более слабое, чем строгая ℓ^1 -выпуклость (здесь мы пользуемся нашей терминологией).

ЛЕММА В (Д. Браесс [7]). *Пусть M — строгое солнце в $\ell^\infty(n)$. Если $u, w \in M$, то существует непрерывная дуга $k(t) \subset M$, $0 \leq t \leq 1$, соединяющая u с w , такая, что ее координатные функции $k_i(t)$ монотонны по t , $i = 1, \dots, n$. Функции $k_i(t)$ строго монотонны при условии, что $u \neq w$.*

Чебышёвские множества в $\ell^\infty(n)$ охарактеризованы Ч. Данемом [8] (см. также [7]).

Для солнц в $\ell^\infty(n)$ элегантная характеристика была получена Х. Беренсом и Л. Хетцельтом в [6] (см. также [5]).

ТЕОРЕМА С (Х. Беренс, Л. Хетцельт [6]). *Замкнутое непустое множество $M \subset \mathbb{R}^n$ является солнцем в $\ell^\infty(n)$, если и только если оно ℓ^1 -выпукло.*

Как следствие из теоремы С в [6] получен важный результат, что *солнце в $\ell^\infty(n)$ V -ациклично* (т.е. его пересечение с любым замкнутым шаром ациклично и, следовательно, связно). Для произвольных негладких пространств V -связность и V -ацикличность солнц до сих пор не полностью исследованы (см. [5], [15]; к примеру, в конечномерном пространстве V -ацикличное множество является солнцем, но неизвестно, верно ли обратное). (Множество V -связно, если его пересечение с любым замкнутым шаром связно.) Солнца являются линейно связными и локально линейно связными [2], [3], [5]. В. А. Кошечев [2] доказал, что в конечномерном линейном нормированном пространстве строгое солнце V -связно. Вопрос о V -связности солнц в таких пространствах размерности ≥ 3 открыт. Также не известно, является ли строгое солнце в произвольном конечномерном пространстве V -ацикличным.

2. Вспомогательные результаты. Напомним несколько нужных определений и результатов.

Если X – линейное нормированное пространство и $x \in X$, $r > 0$, то $B(x, r)$ и $\mathring{B}(x, r)$ – замкнутый и соответственно открытый шар с центром x и радиусом r . Для x, y , $x \neq y$, опорный конус к шару $B(x, \|x - y\|)$ в точке y определяется как

$$\mathring{K}(y, x) = \bigcup_{r \geq 0} \mathring{B}(-ry + (r+1)x, (r+1)\|x - y\|)$$

(другие эквивалентные определения могут быть найдены в [1, гл. 3]).

Следующая лемма (см., например, [16], [17], [1, гл. 3]) является аналогом известного критерия Колмогорова. В [16] лемма доказана также для α -солнц.

ЛЕММА D (А. Брондстед [17], Е. В. Ошман [16]). 1. *Множество $M \subset X$ является солнцем в X тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \notin M$ найдется точка $y \in P_M x$ такая, что $\mathring{K}(y, x) \cap M = \emptyset$.*

2. *Множество $M \subset X$ является строгим солнцем в X тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \notin M$ и для любой точки $y \in P_M x \neq \emptyset$ выполнено $\mathring{K}(y, x) \cap M = \emptyset$.*

Из теоремы А следует важное следствие. Прежде чем его сформулировать, дадим два определения. Собственное аффинное подпространство H в $\mathbb{R}^n$ назовем *координатным*, если найдутся точка $x \in \mathbb{R}^n$ и число $r > 0$ такие, что $H = \text{aff } E$, где E – некоторая грань шара $B(x, r)$ в пространстве $\ell^\infty(n)$. Иными словами, $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_j = \text{const}(j) \text{ для любого } j \in \text{eqc}(H) \neq \emptyset\}$.

Если H – координатное аффинное подпространство в $\mathbb{R}^n$ и $M \subset \mathbb{R}^n$, то определим

$$M_H = \text{rg}_H M \text{ – координатная проекция } M \text{ на } H,$$

т.е. для $x \in M$ $\text{rg}_H(x) = (x'_1, \dots, x'_n)$, где $x'_i = x_i$ при $i \notin \text{eqc}(H)$ и $x_i = h_i$ для $i \in \text{eqc}(H)$ и любого $h \in H$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть M – строгое солнце в $\ell^\infty(n)$, H – координатное аффинное подпространство в $\mathbb{R}^n$. Тогда M_H – регулярное множество в $(H, \|\cdot\|_\infty)$.*

Здесь норма $\|\cdot\|_\infty$ на H индуцирована ℓ^∞ -нормой на $\mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x, y \in M_H, x \neq y$, и пусть $\xi, \eta \in M$ таковы, что $\text{pr}_H \xi = x, \text{pr}_H \eta = y$. По теореме А $(\xi, \eta) \in \text{Reg}(M)$. Это означает, что для любого набора индексов $I \subset \{1, \dots, n\} \setminus \text{eqc}(\xi, \eta)$ выполнено

$$\eta \in \text{cl}\{\zeta \in M \mid (\zeta_i - \eta_i)(\xi_i - \eta_i) > 0 \text{ для всех } i \in I\}.$$

Докажем, что $(x, y) \in \text{Reg } M_H$. Пусть $J \subset \{1, \dots, n\} \setminus \text{eqc}(x, y)$. Ясно, что $J \subset I$. Отсюда

$$y = \text{pr}_H \eta \in \text{cl}\{z \in M_H \mid (z_i - y_i)(x_i - y_i) > 0 \text{ для всех } i \in J\},$$

т.е. $(x, y) \in \text{Reg } M_H$, откуда по определению M_H регулярно в $(H, \|\cdot\|_\infty)$.

Отметим, что если M_H замкнуто, то по теореме А оно является строгим солнцем в $(H, \|\cdot\|_\infty)$.

Построим пример строгого солнца M в $\ell^1(3)$ такого, что замыкание его проекции на $H = \mathbb{R}^2$ не будет являться строгим солнцем в $\ell^\infty(2)$ (хотя сама проекция M_H будет регулярным множеством). На плоскости $\mathbb{R}^2$ для каждого $t \in \mathbb{R}$ зададим ломаную M_t следующим уравнением в полярной системе координат (r, φ) :

$$M_t = \left\{ r \geq 0, \varphi = -\frac{1}{4} \arctg t \right\} \cup \left\{ r \geq 0, \varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \arctg t \right\}.$$

По теореме А множество $M = \bigcup \{(M_t + (0, 0, t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$ является строгим солнцем в $\ell^\infty(3)$, однако его проекция на $\mathbb{R}^2$ представляет собой регулярное множество

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \cdot x_2 < 0\} \cup \{(0, 0)\},$$

замыкание которого не является строгим солнцем в $\ell^1(2)$.

Используя следствие 1, мы докажем следующее интуитивно ясное полезное в дальнейшем утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Никакой кокрест не является строгим солнцем в $\ell^\infty(n)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть C – кокрест в $\mathbb{R}^n$. Без ограничения общности считаем, что $\text{eqc}(C) = \emptyset$.

Предположим, что C – строгое солнце в $\ell^\infty(n)$.

Не ограничивая общности, будем считать, что $\text{const}(j) = 0$ для любого j в определении $c(\mathbb{R}^n) \supset C$, т.е. для любой точки $x \in C$ найдется индекс $i \in \{1, \dots, n\}$ такой, что $x_i = 0$.

1. Предположим, что C содержит точку $c = (c_1, \dots, c_n)$, у которой лишь одна координата c_{i_0} равна нулю. Поскольку $C \subset c(\mathbb{R}^n)$, то несложно видеть, что

$$c \in P_C e_k, \quad \text{где } k = \pm 1, \quad e_k = (\varepsilon_1 R, \dots, \varepsilon_n R), \quad R = \max_{i=1, \dots, n} \{|c_i|\},$$

$$\varepsilon_i = \text{sign } c_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad i \neq i_0, \quad \varepsilon_{i_0} = k.$$

По предположению C – строгое солнце. Однако здесь для удобства дальнейших рассуждений мы воспользуемся более слабым, нежели строгая солнечность, свойством множества C – регулярностью, которой обладает множество C по теореме А. В [10] доказано, что

$$\text{если } M \text{ – регулярное множество в } \ell^\infty(n), x \notin M, y \in P_M x, \text{ то } \overset{\circ}{K}(y, x) \cap M = \emptyset. \quad (1)$$

В нашей ситуации $c \in P_C e_k$, $k = \pm 1$, поэтому согласно (1) $\mathring{K}(c, e_k) \cap C = \emptyset$, $k = \pm 1$. По построению размерность грани шара $B(e_k, R)$, содержащей точку c в своей относительной внутренности, равна $n - 1$, $k = \pm 1$. Из этого следует, что конусы $\mathring{K}(c, e_k)$, $k = \pm 1$, являются взаимно дополняющими друг друга открытыми полупространствами с общей границей G , являющейся аффинным координатным подпространством. Так как $\mathring{K}(c, e_k) \cap C = \emptyset$, $k = \pm 1$, то $C \subset G$ и $\text{eqs}(C) \subsetneq \text{eqs}(G)$. Но G – координатное подпространство, т.е. $\text{eqs}(G) \neq \emptyset$, что противоречит предположению $\text{eqs}(C) = \emptyset$. Случай 1 невозможен.

2. Предположим, что $n \geq 3$. Предположим также, что, в отличие от п. 1, каждая точка из C имеет не менее двух нулевых координат.

Спроектируем C на координатное подпространство $\mathbb{R}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$:

$$C_{n-1} = \text{pr}_{\mathbb{R}^{n-1}} C.$$

Так как $\text{eqs}_{\mathbb{R}^n} C = \emptyset$, то $\text{eqs}_{\mathbb{R}^{n-1}}(C_{n-1}) = \emptyset$. Согласно следствию 1 C_{n-1} – регулярное множество в пространстве $\ell^\infty(n-1)$. По предположению каждая точка из C имеет не менее двух нулевых координат, поэтому $C_{n-1} \subset c(\mathbb{R}^{n-1})$, а поскольку $\text{eqs}_{\mathbb{R}^{n-1}}(C_{n-1}) = \emptyset$, то C_{n-1} – кокрест в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$.

3. Далее рассуждаем аналогично предыдущему. Если найдется точка $c \in C_{n-1}$ с только одной ненулевой координатой (в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$), то мы оказываемся в ситуации п. 1 с $\mathbb{R}^n$, замененным на $\mathbb{R}^{n-1}$, и рассуждая аналогично, приходим к противоречию. Если же $n - 1 \geq 3$ и все точки из C_{n-1} имеют не менее двух нулевых координат, то, действуя как в п. 2, уменьшаем размерность на единицу. В результате мы или придем к противоречию, или к ситуации $n = 2$, $C_2 \subset c(\mathbb{R}^2)$ – кокрест в $\mathbb{R}^2$ и C_2 регулярно в $\ell^\infty(2)$.

Тогда в C_2 в силу условия $\text{eqs}_{\mathbb{R}^2}(C_2) \neq \emptyset$ найдется точка с координатами $(\alpha, 0)$, $\alpha \neq 0$, а в силу п. 1 такая ситуация невозможна. Предложение доказано.

3. Основная теорема. В этом пункте мы доказываем основную теорему, которая усиливает лемму В и характеризует строгие солнца в $\ell^\infty(n)$. В сравнении с теоремой А здесь мы получаем чисто геометрическую характеристику.

ТЕОРЕМА. Пусть $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто. Для того чтобы M было строгим солнцем в $\ell^\infty(n)$, необходимо и достаточно, чтобы оно было строго ℓ^1 -выпукло и не являлось кокрестом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Предположим, что M – строгое солнце в $\ell^\infty(n)$. По предположению 1 множество M не является кокрестом.

Если $\text{eqs}(M) = \emptyset$, то отношение $\nmid_M$ совпадает с $\nmid$ и строгая ℓ^1 -выпуклость M немедленно следует из леммы В и теоремы С.

Предположим, что $\text{eqs}(M) \neq \emptyset$; без ограничения общности предположим, что $\text{eqs}(M) = \{1, \dots, m\}$, $1 \leq m < n$. Тогда M содержится в аффинном координатном подпространстве H_{n-m} размерности $n - m$. Следовательно, H_{n-m} можно отождествить с пространством $\ell^\infty(n - m)$ (здесь мы без ограничения общности предполагаем, что $0 \in M$). Ясно, что M – строгое солнце в $\ell^\infty(n - m)$. Теперь строгая ℓ^1 -выпуклость M следует из леммы В и теоремы С, примененных к $\ell^\infty(n - m)$.

Достаточность. Достаточно считать, что $\text{eqs}(M) = \emptyset$. Тогда случай $\text{eqs}(M) \neq \emptyset$ будет следовать из случая $\text{eqs}(M) = \emptyset$, поскольку если $\text{eqs}(M) \neq \emptyset$ и H – координатное

аффинное подпространство в $\mathbb{R}^n$, содержащее M , и M – строгое солнце в $(H, \|\cdot\|_\infty)$, то M – строгое солнце в $\ell^\infty(n)$. Этот факт просто следует из теоремы А.

Итак, $\text{eqs}(M) = \emptyset$. По теореме С множество M является солнцем. Докажем, что M является строгим солнцем, для чего воспользуемся леммой D и докажем, что для любой точки $x \notin M$ и любой точки $y \in P_M x$ выполнено $\dot{K}(y, x) \cap M = \emptyset$. Без ограничения общности считаем $x = 0$, $\rho(0, M) = \|y\| = 1$, а также $y_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$. Обозначим $J = \{j \mid y_j = 1\}$. Так как $\|y\| = 1$ и $y_i \geq 0$, то $J \neq \emptyset$.

Предположим, что $\dot{K}(y, 0) \cap M \neq \emptyset$.

Для точки $v \in \mathbb{R}^n$ определим

$$\mathcal{E}(v) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_m = v_m \text{ для некоторого } m = m(x) \in \{1, \dots, n\}\}.$$

В наших терминах $\mathcal{E}(v)$ – основной кокрест в $\mathbb{R}^n$. Определим $H = \mathcal{E}(y) \cap \dot{K}(y, 0)$.

1. Пусть $w \in \dot{K}(y, 0) \cap M$ и $w \notin H$. Тогда $w \notin \mathcal{E}(y)$. Поэтому $w \neq y$ и по строгой ℓ^1 -выпуклости M это влечет, что w и y могут быть соединены строго монотонным ℓ^1 -геодезическим сегментом $k(t) \subset M$, $k(0) = y$, $k(1) = w$.

Докажем, что $k(t) \subset \dot{B}(0, 1)$ при всех достаточно малых t . В нашей ситуации $\dot{K}(y, 0) = \{z \mid z_j < 1 \text{ при } j \in J\}$. Так как $w \in \dot{K}(y, 0)$ и координатные функции кривой $k(t)$ строго монотонны, то $w_j < k_j(t) < 1$ при $j \in J$ и всех $0 < t < 1$. Поскольку $k_j(t) \rightarrow y_j = 1$ при $t \rightarrow 0$, $j \in J$, то для некоторого $\varepsilon > 0$

$$0 < k_j(t) < 1 \quad \text{при } j \in J \text{ и } t \in (0, \varepsilon). \quad (2)$$

Далее, $k_m(t) \rightarrow y_m$ при $t \rightarrow 0$, $1 \leq m \leq n$, и $0 \leq y_i < 1$ при $i \notin J$. Поэтому при некотором $\varepsilon_1 > 0$

$$|k_i(t) - y_i| < 1 - y_i \quad \text{при } i \notin J, 0 < t < \varepsilon_1.$$

Отсюда и из (2) имеем

$$-1 < k_m(t) < 1 \quad \text{при } t \in (0, \min\{\varepsilon, \varepsilon_1\}), m = 1, \dots, n.$$

Следовательно, $k(t) \subset \dot{B}(0, 1)$ при $t \in (0, \min\{\varepsilon, \varepsilon_1\})$. Однако это невозможно, так как по условию $y \in P_M 0$, т.е. $\dot{B}(0, 1) \cap M = \emptyset$.

2. Предположим теперь, что $M \cap \dot{K}(y, 0) \subset H$. Пусть $u \in H \cap M$. Так как M не кокрест и $\text{eqs}(M) = \emptyset$, то $M \not\subset \mathcal{E}(u)$. Следовательно, найдется точка $v \in M$, $v \notin \mathcal{E}(u)$, т.е. $v \neq u$. В этом случае по строгой ℓ^1 -выпуклости M точки u и v соединены строго монотонным ℓ^1 -геодезическим сегментом $k(t) \subset M$, $0 \leq t \leq 1$, $k(0) = u$, $k(1) = v$. Так как $u \in \dot{K}(y, 0)$, то $u_j < 1$ при $j \in J$ и, следовательно, $k_j(t) < 1$ при $j \in J$ и $0 < t < \varepsilon_2$ при некотором ε_2 , т.е. $k(t) \in \dot{K}(y, 0)$ при $0 < t < \varepsilon_2$. Из строгой монотонности $k(t)$ следует, что $k(t) \neq y$ при всех $t \in (0, \varepsilon_3)$ при некотором ε_3 . Итак, при $0 < t < \min\{\varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ кривая $k(t) \subset M$ содержится в $\dot{K}(y, 0)$ и не содержится в H , что противоречит предположению $M \cap \dot{K}(y, 0) = H$.

Итак, предположение $\dot{K}(y, 0) \cap M \neq \emptyset$ неверно и M – строгое солнце по лемме D. Теорема доказана.

Автор благодарит рецензента за полезные замечания. Автор также благодарит Математический институт университета Эрланген–Нюрнберг и профессора Х. Беренса за гостеприимство в Эрлангене.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Власов Л. П. Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // УМН. 1973. Т. 28. № 6. С. 1–66.
- [2] Кошечев В. А. Связность и аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Матем. заметки. 1975. Т. 17. № 2. С. 193–204.
- [3] Кошечев В. А. Связность и солнечные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Матем. заметки. 1976. Т. 19. № 2. С. 267–278.
- [4] Menger K. Untersuchungen über allgemeine Metrik // Math. Ann. 1928. V. 100. P. 75–163.
- [5] Brown A. L. Suns in normed linear spaces which are finite-dimensional // Math. Ann. 1987. V. 279. P. 81–101.
- [6] Berens H., Hetzelt L. Die Metrische Struktur der Sonnen in $\ell^\infty(n)$ // Aequat. Math. 1984. V. 27. P. 274–287.
- [7] Braess D. Geometrical characterizations for nonlinear uniform approximation // J. Approximation Theory. 1974. V. 11. P. 260–274.
- [8] Dunham Ch. B. Characterizability and uniqueness in real Chebyshev approximation // J. Approximation Theory. 1969. V. 2. P. 374–383.
- [9] Brosowski B. Nicht-Lineare Tschebyscheff-Approximation. B. I. Hochschulschriften. V. 808/808a. Bibliographisches Institut, Mannheim: Hochschultaschenbücher Verlag, 1968.
- [10] Brosowski B., Wegmann R. Charakterisierung bester Approximationen in normierten Räumen // J. Approximation Theory. 1970. V. 3. P. 369–397.
- [11] Gruber P. M. Planar Chebyshev sets // Mathem. Structure – Computational Math. – Math. Modelling. V. 2. Sofia: Bulgar. Acad. Sci., 1984. P. 184–191.
- [12] Berens H., Hetzelt L. Suns and contractive retracts in the plane // Теория приближений функций / ред. Н. П. Корнечук и др. Труды международной конференции (Киев, 31 мая–5 июня 1983 г.). М.: Наука, 1987. С. 483–487.
- [13] Hetzelt L. On suns and cosuns in finite-dimensional normed linear spaces // Acta Math. Hung. 1985. V. 45. P. 53–68.
- [14] Алимов А. Р. Чебышёвские компакты на плоскости // Тр. МИАН. 1997. Т. 219. С. 8–26.
- [15] Карлов М. И., Царьков И. Г. Выпуклость и связность чебышёвских множеств и солнц // Фундамент. и прикл. матем. 1997. Т. 3. № 4. С. 967–978.
- [16] Ошман Е. В. Чебышёвские множества и непрерывность метрической проекции // Изв. вузов. Матем. 1970. Т. 9. С. 78–82.
- [17] Brøndsted A. Chebyshev sets and convexity of Chebyshev sets. II // Math. Scand. 1966. V. 18. P. 5–15.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило

05.12.1999

Исправленный вариант

21.12.2000