Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Беляев, В. К. Булитко, m -сводимость с верхними и нижними границами для сводящих функций, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 1, 12–21

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm713>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 16:31:57

УДК 517.1

***m*-СВОДИМОСТЬ С ВЕРХНИМИ И НИЖНИМИ ГРАНИЦАМИ ДЛЯ СВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ**

В. Н. Беляев, В. К. Булитко

Изучаются такие пары $(\mathfrak{T}^1, \mathfrak{T}^0)$ классов неубывающих тотальных одноместных арифметических функций, которые определяют рефлексивные и транзитивные бинарные отношения $\{(A, B) \mid A, B \subseteq N \ \& \ (\exists \text{ о.р.ф. } h) (\exists f_1 \in \mathfrak{T}^0)[A \leq_m^h B \ \& \ f_0 \leq h \leq f_1]\}$. (Здесь $k \leq l$ означает, что функция l почти всюду мажорирует функцию k .) Установлены критерии рефлексивности и транзитивности таких отношений. Получены свидетельства высокой разветвленности возникающей системы ограниченных сводимостей m -типа. Построены примеры таких сводимостей, существенно отличающиеся от стандартной m -сводимости в отношении структуры порождаемых ими систем степеней неразрешимости и в вопросе полноты множеств.

Библиография: 4 названия.

m -сводимость является одной из основных сводимостей в теории рекурсии и достаточно хорошо изучена. Однако в прикладных вопросах часто она является все же слишком идеализированной из-за ничем, кроме рекурсивности сводящей функции, не ограниченного доступа к оракулу. Мы видим, что в теории сложности прикладных комбинаторных задач центральное место занимают ограничения вычислительной сложности сводящей функции. Целью настоящей заметки является рассмотрение последствий для m -сводимости, наступающих из-за ограничения доступа к оракулу в m -редукциях. Эти ограничения играют роль некоторой “дескриптивной сложности” m -редукций. Аналогичные ограничения (но только сверху) изучались ранее в [1], [2] для тьюринговых сводимостей.

Основные понятия и обозначения определены в [3]. Напомним, что сокращения р.м., р.п.м., о.р.ф. обозначают соответственно “рекурсивное(ые) множество(а)”, “рекурсивно перечислимое множество(а)”, “общерекурсивная(ые) функция(ии)”.

Будем говорить, что $f \leq g$, если $\exists x_0 \forall y[y > x_0 \implies f(y) < g(y)]$; функцию g будем называть *мажорантой* п.в. (почти всюду) функции f , а f — *минорантой* п.в. для g .

Пусть $\mathfrak{T}$ — класс всех тотальных функций. Обозначим через $\mathfrak{T}^+$ подкласс $\mathfrak{T}$, состоящий из всех неубывающих функций, и пусть $\mathfrak{R}^i \subseteq \mathfrak{T}^+$, $i = 0, 1$. С каждой тотальной функцией f можно связать две функции

$$e_f^1(x) = \max\{f(y) \mid y \leq x\}, \quad e_f^0(x) = \min\{f(y) \mid x \leq y\}.$$

ЛЕММА 1. *Если f о.р.ф., то e_f^1 неубывающая о.р.ф., а e_f^0 предельно рекурсивная неубывающая функция.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим второе предложение. Справедливо, очевидно, представление $e_f^0(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(x, t)$, если положить $h(x, t) = \min\{f(x') \mid x \leq x' \leq t\}$.

Введем основное определение:

$$\leq_m [\mathfrak{R}^1_{\mathfrak{R}^0}] = \{(A, B) \in 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \mid \\ \exists \text{ о.р.ф. } f \exists h^1 \in \mathfrak{R}^1 \exists h^0 \in \mathfrak{R}^0 [A \leq_m^f B \ \& \ h^0 \leq e_f^0 \ \& \ e_f^1 \leq h^1]\}.$$

Очевидно, $\leq_m [\mathfrak{R}^1_{\mathfrak{R}^0}] \subseteq \leq_m$. Будем называть отношение $\leq_m [\mathfrak{R}^1_{\mathfrak{R}^0}]$ *ограниченной m -сводимостью* (или просто *сводимостью*), если это отношение рефлексивно и транзитивно.

Наложение ограничений снизу на доступ к оракулу мотивируется тем, что редукции (сведения) с ограничениями такого типа не только позволяют оценить сложность сводимого множества по сложности оракула, но и в определенной мере переносят строение сводимого множества на оракул. Например, ясно, что невозможна редукция рекурсивного бесконечного множества к иммунному, если только нижняя граница этого сведения есть бесконечнозначная неубывающая функция. Эти связи демонстрируют также некоторые из результатов настоящей заметки.

Первой целью заметки является установление условий рефлексивности и транзитивности отношений рассматриваемого в работе типа. Затем будут указаны некоторые структурные свойства семейства найденных сводимостей, а также определенные особенности, не имеющие места для классической m -сводимости.

Если $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}^+$ и $(\forall f \in \mathfrak{A})(\exists g \in \mathfrak{B})[f \leq g]$, то пишем $\mathfrak{A} \leq^1 \mathfrak{B}$, а если $(\forall g \in \mathfrak{B})(\exists f \in \mathfrak{A})[f \leq g]$, то пишем $\mathfrak{A} \leq^0 \mathfrak{B}$.

ЛЕММА 2. 1) Пусть даны произвольные $\mathfrak{B}^i \subseteq \mathfrak{T}^+$, $i = 0, 1$, и такие $\mathfrak{A}^i \subseteq \mathfrak{T}^+$, $i = 0, 1$, что $\mathfrak{B}^1 \leq^1 \mathfrak{A}^1 \ \& \ \mathfrak{A}^0 \leq^0 \mathfrak{B}^0$. Тогда $\leq_m [\mathfrak{B}^1_{\mathfrak{B}^0}] \subseteq \leq_m [\mathfrak{A}^1_{\mathfrak{A}^0}]$.

2) Всякое отношение вида $\leq_m [\mathfrak{R}^1_{\mathfrak{R}^0}]$ можно задать счетными подклассами $\mathfrak{T}^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Действительно, пусть $C \leq_m [\mathfrak{B}^1_{\mathfrak{B}^0}] D$. Это по определению значит, что $(\exists h^1 \in \mathfrak{B}^1)(\exists h^0 \in \mathfrak{B}^0)[C \leq_m^f D \ \& \ h^0 \leq e_f^0 \ \& \ h^1 \geq e_f^1]$. Из условия леммы следует, что $(\exists g^0 \in \mathfrak{A}^0)(\exists g^1 \in \mathfrak{A}^1)[g^0 \leq h^0 \ \& \ g^1 \geq h^1]$.

Далее, из транзитивности отношения $\leq$ следует, что $[C \leq_m^f D \ \& \ (g^0 \leq e_f^0) \ \& \ (e_f^1 \leq g^1)]$, т.е. $C \leq_m [\mathfrak{A}^1_{\mathfrak{A}^0}] D$.

Второе предложение леммы следует из того факта, что множество $\{e_f^i \mid f \text{ о.р.ф., } i = 0, 1\}$ очевидно счетно.

Далее, если не указано обратное, будем в отношениях $\leq_m [\mathfrak{R}^1_{\mathfrak{R}^0}]$ считать $\mathfrak{R}^0, \mathfrak{R}^1$ счетными.

СЛЕДСТВИЕ 1. Существуют такие $h^*, l^* \in \mathfrak{T}^+$, что $\leq_m \leq_m [h^*_{l^*}]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве l^* можно взять $\lambda x[0 \cdot x]$.

Что касается h^* , то подходит любая неубывающая тотальная мажоранта п.в. класса всех о.р.ф. Если положить $h(x, t) = \max\{\varphi_i(y) \mid i \leq x, y \leq x, \varphi_i(y) \downarrow \text{ за не более чем } t \text{ шагов}\}$, то ясно, что $h^*(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(x, t)$ определена для всех $x \in \mathbb{N}$ и мажорирует п.в. все о.р.ф.

Положим $\mathfrak{T}^{+, \infty} = \{f \mid f \in \mathfrak{T}^+ \ \& \ |V \text{ al } f| = \infty\}$.

Следующая лемма показывает, что характеристика классов нижних границ, определяющих сводимости, является более сложной задачей по сравнению с такой же проблемой для классов верхних границ. Далее будет еще несколько иных подтверждений сказанного.

ЛЕММА 3. *Для любой рекурсивной функции f с условием $\exists y[|f^{-1}(y)| = \infty]$ можно построить $A, B \subseteq \mathbb{N}$ так, что $A \leq_m^f B$ и $A \not\leq_m^f [\mathfrak{T}_{+, \infty}^+] B$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем в качестве B иммунное множество, включающее некоторое $y \in V$ ал f с бесконечным прообразом H . Положим $A = f^{-1}(B)$. Ясно, что $H \subseteq A$.

Предположим теперь, что для некоторой о.р.ф. g верно $A \leq_m^g [\mathfrak{T}_{+, \infty}^+] B$. Тогда $g(H) \subseteq B$ и в силу иммунности B множество $g(H)$, будучи рекурсивно перечислимым, должно быть конечным. Однако тогда тотальная функция g имела бы конечный образ на некотором бесконечном множестве. Это невозможно, очевидно, совместить с наличием для g неубывающей тотальной нижней границы п.в., у которой множество значений бесконечно.

ЛЕММА 4. *Пусть $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{T}^+$.*

- (а) *Если для о.р.ф. f верно $|V \text{ ал } f| = \infty$, $\{f\} \not\leq^1 \mathfrak{R}$, то существуют такие $A, B \subseteq \mathbb{N}$, что $A \leq_m^f B$ & $A \not\leq_m^f [\mathfrak{R}_{+}^+] B$.*
- (б) *Если для о.р.ф. f верно, что $e_f^0 \in \mathfrak{T}^{+, \infty}$, $\mathfrak{R} \not\leq^0 \{e_f^0\}$, то существуют такие $A, B \subseteq \mathbb{N}$, что $A \leq_m^f B$ & $A \not\leq_m^f [\mathfrak{R}_{+}^+] B$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Пусть $f_0, f_1, \dots$ список тех о.р.ф., у которых $e_{f_0}^1, e_{f_1}^1, \dots$ имеют мажоранты п.в. в $\mathfrak{R}^1$. Пусть для $g_n \in \mathfrak{R}^1$ верно $g_n \supseteq e_{f_n}^1, n \in \mathbb{N}$. Так как $\{f\} \not\leq^1 \mathfrak{R}^1$, то $\forall n \in \mathbb{N} [f \not\leq g_n]$. Для каждого n введем в рассмотрение последовательность чисел $x_0^n < x_1^n < x_2^n < \dots$, выполняющую условия

$$e_{f_n}^1(x_k^n) \leq g_n(x_k^n) < f(x_k^n) < f(x_{k+1}^n), \quad k \in \mathbb{N}$$

(последнее неравенство достижимо из-за $|V \text{ ал } f| = \infty$), и

$$\forall y[e_{f_n}^1(y + x_0^n) \leq g_n(y + x_0^n)].$$

Построим $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ так, что

$$\forall n[f(x_{\sigma(n)}^n) > g_n(x_{\sigma(n)}^n) \& x_{\sigma(n)}^n < x_{\sigma(n+1)}^{n+1}].$$

Положим $B = f(A)$, $A \subset \{x_{\sigma(n)}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Пусть далее $\mathcal{C}_A$ определена уже на $[0, x_{\sigma(n-1)}^{n-1}]$. Определим

$$\mathcal{C}_A(x_{\sigma(n)}^n) = 1 \iff f_n(x_{\sigma(n)}^n) \notin B.$$

Это возможно, так как $f(x_{\sigma(n)}^n) > e_{f_n}^1(x_{\sigma(n)}^n)$ и определение положения $x_{\sigma(n)}^n$ относительно A не отражается на принадлежности $f_n(x_{\sigma(n)}^n)$ к B . Ясно, что $A \leq_m^f B$, но $A \not\leq_m^f B$, так как иначе на $x_{\sigma(n)}^n$ было бы противоречие.

(б) Пусть $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ список о.р.ф., удовлетворяющих условию $\mathfrak{R} \not\leq^0 \{e_{r_i}^0 \mid i \in \mathbb{N}\}$. Если этот список пуст, то доказывать нечего. Из условия следует $\forall i [e_{r_i}^0 \not\leq_f^0]$. А значит, $\forall i$

$[r_i \not\leq f]$. Поэтому для всякого натурального i существует бесконечно много чисел z_k^i , $k = 0, 1, \dots$ таких, что $\forall k [r_i(z_k^i) > f(z_k^i)]$.

Из последовательности $(z_k^i)_{k \in \mathbb{N}}$ можно выбрать подпоследовательность $(y_s^i)_{s \in \mathbb{N}}$ так, чтобы $\forall s [r_i(y_s^i) > f(y_s^i)] \& \forall s [r_i(y_s^i) < f(y_{s+1}^i)]$. То есть выполнена следующая система неравенств:

$$\dots < f(y_s^i) < r_i(y_s^i) < f(y_{s+1}^i) < r_i(y_{s+1}^i) < \dots$$

Теперь остается только с помощью подходящей функции $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ построить диагональную последовательность чисел $y_{\sigma(i)}^i$ так, чтобы для любого i выполнялись неравенства

$$f(y_{\sigma(i)}^i) < r_i(y_{\sigma(i)}^i) < f(y_{\sigma(i+1)}^{i+1}) < r_{i+1}(y_{\sigma(i+1)}^{i+1}).$$

Построим множество B путем выбора для каждого $i \in \mathbb{N}$ одного и только одного элемента из пары чисел $\{f(y_{\sigma(i)}^i), r_i(y_{\sigma(i)}^i)\}$. А затем определим множество A условием $A = f^{-1}(B)$. Это обеспечивает $A \leq_m^f B$. Нетрудно убедиться, однако, что $\forall i [A \not\leq_m^{r_i} B]$. Поэтому $A \leq_m^f B \& A \not\leq_m [\mathfrak{R}^+] B$.

ТЕОРЕМА 1. Для любых $\mathfrak{R}^1, \mathfrak{R}^0 \in \mathfrak{T}^+$ отношение $\leq_m [\mathfrak{R}^1_{\mathfrak{R}^0}]$ рефлексивно тогда и только тогда, когда $\mathfrak{R}^0 \leq^0 \{\mathcal{J}\} \leq \mathfrak{R}^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность очевидна, ибо $A \leq_m [\mathfrak{R}^1_{\mathfrak{R}^0}] A$ со сводящей функцией $\mathcal{J}$.

Необходимость. Если для $\mathcal{J}$ нет миноранты п.в. в $\mathfrak{R}^0$, то по лемме 4 найдутся такие $A, B \in \mathbb{N}$, что $A \leq_m^{\mathcal{J}} B$, т.е. $A = B$, но $A \not\leq_m [\mathfrak{R}^+] A$. То же можно сказать и в случае, когда для $\mathcal{J}$ нет мажоранты п.в. в $\mathfrak{R}^1$.

На основе леммы 4 можно доказать следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Отношение $\leq_m [\mathfrak{R}^1_{\mathfrak{R}^0}]$ транзитивно тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} & (\forall o.p.f. f, g) [\{e_f^1, e_g^1\} \leq^1 \mathfrak{R}^1 \& \mathfrak{R}^0 \leq^0 \{e_f^0, e_g^0\}] \\ & \implies \{e_f^1, e_g^1\} \in \mathfrak{T}^{+, \infty} \implies (\exists H^1 \in \mathfrak{R}^1) [e_{f \circ g}^1 \leq H^1] \& \{e_f^0, e_g^0\} \in \mathfrak{T}^{+, \infty} \\ & \implies (\exists H^0 \in \mathfrak{R}^0) [H^0 \leq e_{f \circ g}^0] \& \{(\exists d \in \mathbb{N}) [\mathfrak{R}^0 \leq^0 \{d\}] \leq^1 \mathfrak{R}^1 \\ & \implies (\forall d \in \mathbb{N}) [\mathfrak{R}^0 \leq^0 \{d\}] \leq^1 \mathfrak{R}^1\}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Правая часть эквивалентности есть конъюнкция двух условий, второе из которых будем называть условием констант. Следствие первого условия правой части эквивалентности есть конъюнкция двух условий-импликаций, заключенных в фигурные скобки, которые обозначим для краткости $\{1 \dots\}_1$ и $\{2 \dots\}_2$ соответственно.

Предположим дано $A \leq_m^g [\mathfrak{R}^1_{\mathfrak{R}^0}] B \leq_m^f [\mathfrak{R}^1_{\mathfrak{R}^0}] C$.

Если $e_f^0, e_g^0 \in \mathfrak{T}^{+, \infty}$, то условия в скобках $\{1 \dots\}_1$ и $\{2 \dots\}_2$ выполнены для данных о.р.ф. f, g , т.е. посылки импликаций истинны. Тогда, очевидно, из $A \leq_m^g B \& B \leq_m^f C$ следует $A \leq_m^{f \circ g} [\mathfrak{R}^1_{\mathfrak{R}^0}] C$, соответствующее условию транзитивности потому, что в данном случае поведение функций (и множеств) на начальных сегментах натурального ряда не имеет значения.

Если неверно, что $e_f^0, e_g^0 \in \mathfrak{T}^{+, \infty}$, то по условию констант из $\{3 \dots\}_3$ должно быть $\mathfrak{R}^0 \leq^0 \{0\}$. Фактически можно полагать $0 \in \mathfrak{R}^0$. В таком случае нет никаких проблем

с нижними границами при построении сведения $A \leq_m^{[\mathfrak{R}^1_0]} C$. И если $e_f^1, e_g^1 \in \mathfrak{T}^{+, \infty}$, то по условию $\{1 \dots\}_1$ в качестве сводящей функции можно взять $f \circ g$.

Если, наконец, неверно $e_f^1, e_g^1 \in \mathfrak{T}^{+, \infty}$, то пусть, например, $e_g^1 \notin \mathfrak{T}^{+, \infty}$. Тогда по условию констант можно считать $0 \in \mathfrak{R}^0$ и $\mathfrak{R}^1$ мажорирует любую константу. Потому легко построить требуемое сведение рекурсивного множества A к C .

Необходимость. Лемма 4 решает вопрос от противного в случае $e_f^0, e_g^0 \in \mathfrak{T}^{+, \infty}$.

Предположим, отношение $\leq_m^{[\mathfrak{R}^1_0]}$ транзитивно, но условие констант не выполнено. Это значит, что существует такое $d \in \mathbb{N}$, что $\mathfrak{R}^0 \leq^0 \{d\} \leq^1 \mathfrak{R}^1$, но также существует и такое $b \in \mathbb{N}$, для которого неверно $\mathfrak{R}^0 \leq^0 \{b\} \leq^1 \mathfrak{R}^1$.

Рассмотрим сначала случай, когда в качестве b подходит любое натуральное число, отличное от d (т.е. $\exists! d[\mathfrak{R}^0 \leq^0 \{d\} \leq^1 \mathfrak{R}^1]$). Зафиксируем $b, b \neq d$, и построим множества A, B, C , а также цепочку сведений: $A \leq_m^g B \leq_m^f C$ в качестве контрпримера к транзитивности $\leq_m^{[\mathfrak{R}^1_0]}$. Положим $A = \mathbb{N} \setminus \{b\}, B = \{d\}, C = \{b\}$. Далее

$$g(x) = \begin{cases} b, & \text{если } x = b, \\ d & \text{иначе,} \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} b, & \text{если } x = d, \\ d & \text{иначе.} \end{cases}$$

Из построения следует, что если $A \leq_m^q C$, то $|q^{-1}(b)| = \infty$. Это означает невозможность $A \leq_m^{[\mathfrak{R}^1_0]} C$ в рассматриваемом случае.

Предположим теперь $d \neq b, d, b \in P$, где $P = \{a \mid \mathfrak{R}^0 \leq^0 \{a\} \leq^1 \mathfrak{R}^1\}$. Покажем, что $a \in P$ для любого натурального a . Можно, очевидно, считать $a \notin \{b, d\}$. Определим множества $A = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}, B = \{b\}, C = \{a\}$ и сводящие функции

$$g(x) = \begin{cases} b, & \text{если } x \in A, \\ d & \text{иначе,} \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} a, & \text{если } x = b, \\ d & \text{иначе.} \end{cases}$$

Снова $A \leq_m^q C$ влечет, что q бесконечно много раз принимает значение a . Следовательно по транзитивности должно быть $a \in P$. Таким образом, условие констант вытекает из транзитивности, и теорема доказана.

Полученные результаты показывают, что для задания рассматриваемого типа сводимостей в качестве классов верхних границ (будем говорить короче – верхних классов) можно выбирать не более чем счетные системы неубывающих общерекурсивных функций, мажорирующих п.в. тождественную функцию $\mathcal{I}$, а в качестве классов нижних границ (нижних классов) – не более чем счетные системы предельно рекурсивных функций из $\mathfrak{T}^+$ вида e_f^0 , где f – о.р.ф., минорирующих почти всюду $\mathcal{I}$. Такие классы будем называть *приведенными*.

Приведенные классы, задающие сводимости, будем называть *транзитивными*.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Всякий приведенный верхний класс транзитивен тогда и только тогда, когда для всякой суперпозиции своих элементов он включает мажоранту п.в. А чтобы приведенный нижний класс был транзитивным, достаточно, чтобы для всякой суперпозиции своих элементов он включал миноранту п.в.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО первого утверждения (критерия) непосредственно следует из теоремы 2.

Переходя к достаточному условию, заметим, что для любой тотальной функции t верно $t \geq e_t^0$, а если $t \in \mathfrak{T}^+$, то $t = e_t^0$. Поэтому $e_f^0 \circ e_g^0 \leq f \circ g$. Теперь из $t \leq h$ следует

$e_i^0 \leq e_h^0$. Поэтому $e_f^0 \circ e_g^0 \leq e_{f \circ g}^0$ верно для любых тотальных f, g . Следовательно, если $e_f^0 \circ e_g^0$ имеет миноранту, то это верно и для $e_{f \circ g}^0$.

Это следствие полезно для построения конкретных сводимостей рассматриваемого в работе типа.

Пусть дана система подмножеств $\mathfrak{s} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$, замкнутая относительно объединения и включающая пустое множество. Будем говорить, что функции $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ совпадают с точностью до $\mathfrak{s}$, обозначая $f =_{\mathfrak{s}} g$, если $\{x \mid f(x) \neq g(x)\} \in \mathfrak{s}$. Ясно, что $=_{\mathfrak{s}}$ является отношением эквивалентности. В частности, $f \leq g \& g \leq f$ эквивалентно $f =_{\mathfrak{s}} g$, где $\mathfrak{s}$ обозначает класс всех конечных подмножеств $\mathbb{N}$.

Важную роль далее играют сингулярные (одноэлементные) классы функций, способные задавать сводимость. Сначала опишем некоторый способ порождать такие классы.

Пусть $f, g \in \mathfrak{T}^+$, $f \geq g$. Определим $\widehat{fg}(0) = f(0)$ и

$$\widehat{fg}(x+1) = \begin{cases} \widehat{fg}(x), & \widehat{fg}(x) \geq g(x+1), \\ f(x+1), & \widehat{fg}(x) < g(x+1). \end{cases}$$

Назовем h -гибридной функцию g , если она совпадает почти всюду с функцией $\widehat{hg}$ или с функцией $\widehat{gh}$.

Минимальной точкой одноместной функции $t: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ будем называть всякое такое значение ее аргумента x , что $(\forall y > x)[t(y) > t(x)]$. Обозначим через M_t множество минимальных точек функции t .

ЛЕММА 5. Пусть $\widehat{fg}$ определено. Тогда

- 1) $\widehat{fg} \in \mathfrak{T}^+$;
- 2) $g \leq \widehat{fg} \leq f$;
- 3) если $g \trianglelefteq \mathcal{J} \trianglelefteq f$, то $\widehat{fg} \circ \widehat{fg} =_{\mathfrak{s}} \widehat{fg}$;
- 4) $(\forall h \in \mathfrak{T}^+)[h = \widehat{h\widehat{fg}}]$;
- 5) для любых $h, g \in \mathfrak{T}^+$ если $h \trianglelefteq g$ и $g \circ g \trianglelefteq h \circ g$ или $g \trianglelefteq h$ и $h \circ g \trianglelefteq g \circ g$, то существует такая h -гибридная функция f , что $h \trianglelefteq g \trianglelefteq f$ или $f \trianglelefteq g \trianglelefteq h$ соответственно. Если еще $h =_{\mathfrak{s}} \mathcal{J}$, то g является $\mathcal{J}$ -гибридной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если $\widehat{fg}(x) \geq g(x+1)$, то $\widehat{fg}(x+1) \geq \widehat{fg}(x)$. Иначе $\widehat{fg}(x+1) = f(x+1)$. Но $f(x+1) \geq g(x+1)$, а $\widehat{fg}(x) < g(x+1)$. Поэтому снова $\widehat{fg}(x+1) \geq \widehat{fg}(x)$.

2) Для $x = 0$ утверждение вытекает из условия $\widehat{fg}(0) = f(0)$. Пусть 2) доказано для $x \leq n$. Имеем $\widehat{fg}(n+1) = \widehat{fg}(n)$, если $\widehat{fg}(n) \geq g(n+1)$. Но $\widehat{fg}(n) \leq f(n)$ по индукции, а $f \in \mathfrak{T}^+$. Поэтому $g(n+1) \leq \widehat{fg}(n+1) \leq f(n+1)$. Если $\widehat{fg}(n) < g(n+1)$, то $\widehat{fg}(n+1) = f(n+1)$. Но по условию $f \geq g$.

3) Из определения следует, что $\widehat{fg}$ является ступенчатой неубывающей функцией. Рассмотрим отношение эквивалентности $x \equiv_{\widehat{fg}} y \iff \widehat{fg}(x) = \widehat{fg}(y)$. Непосредственно из определения вытекает, что каждый класс эквивалентности $\equiv_{\widehat{fg}}$ является отрезком натурального ряда и, начиная с некоторого достаточно удаленного от начала, включает (ввиду условия $g \trianglelefteq \mathcal{J} \trianglelefteq f$) значение функции $\widehat{fg}$ на своих элементах. Это и означает требуемое равенство почти всюду суперпозиции $\widehat{fg} \circ \widehat{fg}$ самой функции $\widehat{fg}$.

4) Очевидно.

5) Рассмотрим один из указанных в условии случаев: $g \trianglelefteq h \& h \circ g \trianglelefteq g \circ g$. Тогда $h \circ g =_{\mathfrak{s}} g \circ g$ ввиду неубывания g, h . Следовательно, можно считать, что h и g совпадают

почти всюду на M_g . Случай заключительной постоянности g очевиден. Поэтому можно считать, что $|M_g| = \infty$. Пусть $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ – пересчет M_g в порядке возрастания элементов. Тогда $\mathbb{N}$ разбивается в сумму отрезков $\mathbb{N}_k = \{y \mid x_k \leq y < x_{k+1}\}, k \in \mathbb{N}$. Определим $f(x) = g(x_k), x \in \mathbb{N}_k, k \in \mathbb{N}$. Теперь утверждение очевидно.

Наконец, пусть дополнительно $h =_f \mathcal{J}$. Тогда сразу же получаем $g =_f g \circ g$. Рассмотрим произвольный достаточно большой (так чтобы выполнялось равенство $g = g \circ g$) элемент x из M_g . Имеем $x + 1 \geq g(x + 1) > g(x)$. Далее, если $x + 1 > g(x + 1)$, то $g(x + 1) \leq x$ и, значит, $g(x + 1) > g(g(x + 1))$. Это противоречие приводит к равенству $g = \mathcal{J}$ на всех достаточно больших числах вида $x + 1, x \in M_g$. Поэтому g является $\mathcal{J}$ -гибридной.

ТЕОРЕМА 3. Для любых классов $\mathfrak{R}^1, \mathfrak{R}^0 \subseteq \mathfrak{T}^+$, удовлетворяющих условиям теорем 1 и 2, и любых $f, g \in \mathfrak{T}^+$ таких, что $f \geq \mathcal{J} \geq g$, следующие бинарные отношения являются сводимостями

$$\leq_m [\widehat{f\mathcal{J}}]_{\mathfrak{R}^0}, \quad \leq_m [\mathfrak{R}^1_{\mathcal{J}g}].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как f, g лежат в $\mathfrak{T}^+$, то по предыдущей лемме $\widehat{f\mathcal{J}}, \widehat{\mathcal{J}g} \in \mathfrak{T}^+$, $\widehat{f\mathcal{J}} \geq \mathcal{J} \geq \widehat{\mathcal{J}g}$. А учитывая 3) предыдущей леммы, убеждаемся, что классы $\{\widehat{f\mathcal{J}}\}, \{\widehat{\mathcal{J}g}\}$ можно считать замкнутыми относительно суперпозиции. Поэтому утверждение теоремы вытекает из теорем 1, 2.

ТЕОРЕМА 4. 1) Верхний сингулярный приведенный класс транзитивен $\iff$ он состоит из гибридной функции вида $\widehat{h\mathcal{J}}$ для некоторой общерекурсивной h .

2) Если нижний транзитивный сингулярный приведенный класс состоит из функции e_h^0 , где h – о.р.ф., то $e_{tot}^0 =_f e_h^0 =_f e_t^0$, где $t = \min(h, \mathcal{J})$. Если для тотальной $h, h \leq \mathcal{J}$, выполняется условие, что e_h^0 является I -гибридной, то $\{e_h^0\}$ является сингулярным транзитивным нижним классом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Сначала рассмотрим верхний класс $\{f\}$. Так как в этом случае речь идет о неубывающей о.р.ф., для которой дополнительно по следствию теоремы 2 выполняется условие $\mathcal{J} \leq f, f \circ f \leq f$, то по лемме 5, 5) f – $\mathcal{J}$ -гибридная.

2) Рассмотрим случай нижнего транзитивного класса. Предположим дан сингулярный приведенный транзитивный класс $\{e_h^0\}$. Имеем по условию рефлексивности $e_h^0 \leq \mathcal{J}$. Теперь если $t = \min(h, \mathcal{J})$, то из $e_h^0 \leq \mathcal{J}$ следует $e_t^0 =_f e_h^0$. Действительно, на достаточно больших $x \in M_h$ значения h, e_h^0 совпадают и не превосходят x . А для таких x и функция t принимает те же значения, что и h . Ясно, что можно считать выполненным дополнительно условие $e_t^0 \in \mathfrak{T}^{+, \infty}$ (потому что если это неверно, то e_h^0 заключительно постоянна и гибридность e_h^0 вместе с утверждением теоремы очевидны).

Далее, из условия транзитивности имеем $e_t^0 \leq e_{tot}^0$. Пусть вновь x – достаточно большое число из M_h . Из $t(x) = h(x) = e_h^0(x) = e_t^0(x)$ вытекает $t(t(x)) \leq e_t^0(x)$. Если бы последнее неравенство было строгим на бесконечно многих элементах M_h , то это давало бы противоречие с $e_t^0 \leq e_{tot}^0$. Отсюда почти всюду на $M_h (= M_t)$ функции e_t^0 и e_{tot}^0 должны совпадать. Однако это и означает $e_t^0 =_f e_{tot}^0$.

Как известно, множество минимальных элементов общерекурсивной функции иммунно или рекурсивно. В случае рекурсивности e_h^0 тоже рекурсивна. Но тогда по условию транзитивности должно быть $e_h^0 \leq e_h^0 \circ e_h^0$, учитывая еще, что e_h^0 не убывает. Теперь по лемме 5, 5) e_h^0 является $\mathcal{J}$ -гибридной.

Достаточность условия, что e_h^0 $\mathcal{S}$ -гибридная, рассмотрена в теореме 3.

Некоторые функции могут составлять сингулярные классы, не будучи гибридными. Например, тотальная мажоранта всех о.р.ф. составляет верхний транзитивный сингулярный класс. Аналогично тотальная миноранта $h \in \mathfrak{T}^{+, \infty}$ всех функций $e_f^0 \in \mathfrak{T}^{+, \infty}$ для общерекурсивных f составляет транзитивный нижний сингулярный класс.

Перейдем к результатам, относящимся к частичному упорядочению сводимостей $\leq_m [\mathfrak{A}_0^1]$ относительно включения. Обозначим это частично упорядоченное множество через $\mathfrak{M}$.

ТЕОРЕМА 5. *Любой счетный частичный порядок изоморфно вкладывается в $\mathfrak{M}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что всякий частичный порядок $(M, \leq_l)$ изоморфно вкладывается в частично упорядоченное множество $(\{\mathfrak{S}_i \mid i \in M\}, \subset)$, где $\mathfrak{S}_i = \{t \in M \mid t \leq_l i\}$. Пусть ψ – взаимно однозначное отображение множества M на множество всех простых чисел, больших 2. Определим $\mathfrak{S}_i^\psi = \bigcup_{p \in \psi(\mathfrak{S}_i)} \{p^t \mid t \geq 1\}$. Ясно, что $(M, \leq_l)$ изоморфно вкладывается в $(\{\mathfrak{S}_i^\psi \mid i \in M\}, \subset)$. Теперь если $\mathfrak{S}_i^\psi \not\subset \mathfrak{S}_j^\psi$, то $|\mathfrak{S}_i^\psi \setminus \mathfrak{S}_j^\psi| = \infty$ и $\mathfrak{S}_i^\psi \setminus \mathfrak{S}_j^\psi$ включает бесконечное рекурсивное множество.

По каждому $\mathfrak{S}_i^\psi$ определим функцию $f_i: f_i(x) = x + C_{\mathfrak{S}_i^\psi}(x)$. Существенно, что для любых ненулевых $t, t' \in \mathbb{N}$ и различных простых $p, p' \in \psi(M)$ справедливо неравенство $|p^t - (p')^{t'}| \geq 2$. Поэтому функции $f_i(x)$ являются $\mathcal{S}$ -гибридными.

Теперь положим $\mathfrak{R}_i^1 = \{f_i\}$. Тогда отношения $\leq_m [\mathfrak{R}_+^1]$ определяют сводимости. Пусть $i, k \in M$ и $i <_l k$. Тогда $\mathfrak{S}_i^\psi \subset \mathfrak{S}_k^\psi$ и $|\mathfrak{S}_k^\psi \setminus \mathfrak{S}_i^\psi| = \infty$. Откуда $f_i \leq f_k$ и по лемме 2 $\leq_m [\mathfrak{R}_+^1] \subset \leq_m [\mathfrak{R}_+^1]$. Однако $f_k > f_i$ на некотором бесконечном рекурсивном множестве $\mathfrak{R}$ чисел x . По построению существует о.р.ф. $h \leq f_k$ такая, что $h(x) = x + C_{\mathfrak{R}}(x)$ и $h \not\leq f_i$. Поэтому, используя лемму 4, получаем $\leq_m [\mathfrak{R}_+^1] \neq \leq_m [\mathfrak{R}_+^1]$.

Если $i ||_l k$ в $(M, \leq_l)$, то $|\mathfrak{S}_i^\psi \setminus \mathfrak{S}_k^\psi| = \infty$ и $|\mathfrak{S}_k^\psi \setminus \mathfrak{S}_i^\psi| = \infty$, а поэтому $f_i \not\leq f_k$ и $f_k \not\leq f_i$. Это означает, что есть такие о.р.ф. h_i, h_k , что $h_i \leq f_i$, $h_k \leq f_k$ и $h_i \not\leq f_k$, а $h_k \not\leq f_i$. Следовательно, $\leq_m [\mathfrak{R}_+^1]$ и $\leq_m [\mathfrak{R}_+^1]$ несравнимы по включению. Это и доказывает, что построено изоморфное вложение $(M, \leq_l)$ в $(\mathfrak{M}, \subseteq)$.

Перейдем к результатам относительно частичных порядков степеней неразрешимости некоторых из построенных сводимостей. Мы отобрали утверждения, демонстрирующие существенные отличия стандартной m -сводимости от ряда построенных нами ограниченных сводимостей.

Обозначим через $d_{\mathfrak{R}_0^1}^{\mathfrak{R}_1}(A)$ степень неразрешимости множества A относительно сводимости $\leq_m [\mathfrak{R}_0^1]$. Стандартно определяемое частично упорядоченное множество $(\{d_{\mathfrak{R}_0^1}^{\mathfrak{R}_1}(A) \mid A \subseteq \mathbb{N}\}, \leq)$ будем обозначать через $L_{\mathfrak{R}_0^1}^{\mathfrak{R}_1}$.

Следующая теорема показывает, что взаимодействие верхних и нижних ограничений может порождать разветвленную систему степеней даже в классе рекурсивных множеств.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть $\mathfrak{P}$ обозначает класс одноместных полиномов с натуральными коэффициентами. Тогда $L_{\{\mathcal{S}\}}^{\mathfrak{P}}$ включает бесконечные убывающие и возрастающие цепи рекурсивных степеней и бесконечные совокупности попарно несравнимых рекурсивных степеней.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что используемые классы, очевидно, образуют сводимость. Для доказательства построим конкретные множества. Пусть $A = \{y(i) \mid y(0) = 0, y(1) = 2, y(i+1) = 2y(i), i \in \mathbb{N}\}$.

Теперь рассмотрим множества $B_i = \{x \mid x = p_i^j, j \in \mathbb{N}\}$, где p_i — i -е простое число. Это бесконечные рекурсивные множества. Пусть $C_0 = A = \{y(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$, а $C_{n+1} = C_n \setminus \{y(k) \mid k \in B_{n+1}\}$, т.е. каждое следующее множество мы получаем, выбрасывая из предыдущего бесконечное рекурсивное подмножество. Далее положим $D_0 = \{y(k) \mid k \in B_1\}$, $D_{n+1} = D_n \cup \{y(k) \mid k \in B_{n+2}\}$. (Здесь на каждом шаге добавляем бесконечное рекурсивное множество.) Ясно, что $C_{n+1} \leq_m^{\mathfrak{P}} [\mathfrak{P}_{\mathcal{J}}] C_n$, где

$$g_n(x) = \begin{cases} x+1, & \text{если } x \in C_n \setminus C_{n+1}, \\ x & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажем, что $C_n \not\leq_m^{\mathfrak{P}} [\mathfrak{P}_{\mathcal{J}}] C_{n+1}$. Действительно, в противном случае существует $k \in \mathbb{N}$ и $f(x)$ — сводящая функция такая, что $\mathcal{J}(x) \trianglelefteq f(x) \trianglelefteq x^k$. Найдется такое $x_0 \in \mathbb{N}$, зависящее от k , что $\forall x: x > x_0 [y(x), (y(x))^k] \subset [y(x), y(x+1)]$. Тогда образ любого элемента из $\{y(k) \mid k \in B_{n+1}, k > x_0\}$ не может принадлежать C_{n+1} . А это противоречит сводимости.

Совершенно аналогично $D_n \leq_m^{\mathfrak{P}} [\mathfrak{P}_{\mathcal{J}}] D_{n+1}$ и $D_{n+1} \not\leq_m^{\mathfrak{P}} [\mathfrak{P}_{\mathcal{J}}] D_n$.

Рассмотрим вторую часть утверждения теоремы. Пусть $F_n = \{y(i) \mid i = 2^n \cdot q, q - \text{нечетное}\}$. Тогда если $k \neq j$, то, как и раньше, $F_k \not\leq_m^{\mathfrak{P}} [\mathfrak{P}_{\mathcal{J}}] F_j$ и $F_j \not\leq_m^{\mathfrak{P}} [\mathfrak{P}_{\mathcal{J}}] F_k$.

Достаточно низкие верхние границы могут привести к такой патологии, как отсутствие точной верхней грани для системы соответствующих степеней.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\leq_m^{\mathfrak{R}^1} [\mathfrak{R}_0^1]$ — сводимость. Если $\forall c \in \mathbb{N}$ в $\mathfrak{R}^1$ нет функции, мажорирующей п.в. функцию $2\mathcal{J} \dot{\div} c$, то $L_{\mathfrak{R}_0^1}^{\mathfrak{R}^1}$ не является верхней полурешеткой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства будем использовать понятие $\mathfrak{I}^+$ — несжимаемого множества, рассмотренного в [4]. Возьмем рекурсивно несжимаемое множество A и рассмотрим его как сочленение $B \oplus C$. Тогда $B = \{a \mid 2a \in A\}$, $C = \{a \mid 2a+1 \in A\}$. Они тоже рекурсивно несжимаемы в силу леммы 2 из [4]. Пусть S — наименьшая верхняя грань в $L_{\mathfrak{R}_0^1}^{\mathfrak{R}^1}$ для B и C . По условию для любого $c \in \mathbb{N}$ множество A не может быть сведено данной сводимостью к S с границей, мажорирующей $2\mathcal{J} \dot{\div} c$. Поэтому $A \leq_{\mathfrak{R}_0^1}^{\mathfrak{R}^1} S$ с верхней границей из $\mathfrak{I}^+$, почти всюду мажорируемой $2\mathcal{J} \dot{\div} t_A$, где $t_A \in \mathfrak{I}^{+, \infty}$. То же верно и для множества B и некоторой $t_B \in \mathfrak{I}^{+, \infty}$.

Но тогда $A \leq_{(\mathcal{J} \dot{\div} h)} S$, где $h \in \mathfrak{I}^{+, \infty}$, и следовательно, A рекурсивно сжимаемо. Это противоречие и доказывает теорему.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для любой сводимости типа $\leq_m^{\widehat{f\mathcal{J}}} [\widehat{f\mathcal{J}}]$ система ее степеней неразрешимости не является верхней полурешеткой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из теоремы 7.

В заключение коснемся темы полноты для вновь введенных сводимостей. Как видно из дальнейшего, здесь также ситуация осложняется.

Пусть $\leq_m^{\mathfrak{R}^1} [\mathfrak{R}_0^1]$ — сводимость. По аналогии с классическими сводимостями будем говорить, что множество A полно относительно $\leq_m^{\mathfrak{R}^1} [\mathfrak{R}_0^1]$, если

- 1) A — р.п.м.;
- 2) $(\forall B)[B \text{ — р.п.м.} \implies B \leq_m^{\mathfrak{R}^1} [\mathfrak{R}_0^1] A]$.

Например, рассмотрим множество $K_0 = \{\langle x, y \rangle \mid x \in W_y\}$. Ясно, что если р.п.м. $B = W_{y_0}$, то $B \leq_m^{\langle x, y_0 \rangle} K_0$. Теперь если зафиксировать некоторую нумерацию, например, $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}((x+y)^2 + 3x+y)$, то получим, что K_0 является $\leq_m [\mathfrak{P}_{\mathfrak{N}^0}^{\mathfrak{P}}]$ -полным, если $\mathfrak{P}$ – класс всех одноместных полиномов с натуральными коэффициентами. Это так, потому что $(\exists p \in \mathfrak{P})(\forall z)[p(x) \supseteq \langle x, z \rangle]$.

Введем теперь следующее определение. Совокупность множеств $\mathfrak{K}$ ($\mathfrak{K} \subset 2^{\mathbb{N}}$) будем называть *полной системой множеств для сводимости* $\leq_m [\mathfrak{N}_0^1]$, если

- 1) $(\forall A \in \mathfrak{K}) [A \text{ – р.п.м.}]$;
- 2) $(\forall \text{ р.п.м. } B) \exists A [A \in \mathfrak{K} \ \& \ B \leq_m [\mathfrak{N}_0^1] A]$.

Полные системы множеств (далее п.с.м.) всегда существуют. Действительно, множество всех р.п.м. образует п.с.м. Для классической $\leq_m$ -сводимости п.с.м. состоит из одного множества – множества K .

П.с.м. для данной сводимости назовем нетривиальной, если она не включает никакого полного для данной сводимости множества.

Обозначим через $\mathfrak{T}^+$ класс $\{\mathcal{I} + c \mid c \in \mathbb{N}\}$.

ТЕОРЕМА 8. *Для сводимости $\leq [\mathfrak{T}_+^+]$ не существует полных множеств. (Это означает, что все п.с.м. для $\leq [\mathfrak{T}_+^+]$ нетривиальны.)*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, напротив, р.п.м. $A \leq [\mathfrak{T}_+^+]$ – полно. Ввиду рекурсивной перечислимости A оно рекурсивно сжимаемо (см. [4]), т.е. $\exists A', A' \text{ р.п.м., } A' \leq_T A$ и $A \leq_{\mathcal{I} \div h} A'$ для некоторой $h \in \mathfrak{T}^{+, \infty}$.

Теперь если $A' \leq [\mathfrak{T}_+^+] A$, то $\exists c \in \mathbb{N}$ такое, что $A' \leq_m^{\mathcal{I}+c} A$. Но из $A \leq_{\mathcal{I} \div h} A'$ по транзитивности $\leq_T$ вытекает, что $A \leq_{(\mathcal{I} \div h)+c} A$. Это означает, однако, что $A \leq_{\mathcal{I} \div h'} A$, где $h' = h \div c \ \& \ h' \in \mathfrak{T}^{+, \infty}$. Это в свою очередь влечет рекурсивность A . Но рекурсивное множество вообще не может быть полным.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Булитко В. К. Субтьюринговы сводимости ограниченной сложности // Изв. вузов. Матем. 1992. Т. 1. С. 7–17.
- [2] Булитко В. К. About Segment Complexity of Turing Reductions // Math. Log. Quart. 1999. Т. 45. № 4. С. 561–571.
- [3] Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
- [4] Булитко В. К. О рекурсивно сжимаемых множествах // Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 1. С. 9–16.