Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Болотов, Гипотеза Коэна–Ласка, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 1, 22–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm714>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 15:12:00

УДК 515.763.23

ГИПОТЕЗА КОЭНА–ЛАСКА

Д. В. Болотов

Дается частичный ответ на вопрос, поставленный Коэном и Ласком о частичной склейке орбиты при отображении свободного Z_p -пространства в $\mathbb{R}^n$.

Библиография: 3 названия.

В [1] авторы доказывают следующую теорему, являющуюся естественным обобщением теоремы Улама–Борсука.

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – паракомпактное хаусдорфово пространство, на котором действует группа Z_p , p – простое число. Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ – произвольное непрерывное отображение X в некоторое n -мерное векторное пространство. Определим множество $A(f, q) = \{x \in X \mid \text{существуют такие } i_1, i_2, \dots, i_q \ (0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_q < p), \text{ что } f(\sigma^{i_1} x) = f(\sigma^{i_2} x) = \dots = f(\sigma^{i_q} x)\}$. Здесь через σ обозначена образующая в Z_p . Тогда если $H^i(X) = 0$ для $0 < i < (n-1)(p-1) + q - 1$ и $q \geq (p+1)/2$ или $q = 2$, то $A(f, q) \neq \emptyset$.

Высказывается гипотеза [1], что теорема верна без ограничений на q .

Цель этой работы доказать истинность гипотезы при $q = (p-1)/2 = [p/2]$. Именно этот случай является первым, когда рассуждения, приведенные в [1], неприменимы.

Первоначально доказательство гипотезы было приведено в случае, когда $n = 1$, $q = [p/2]$; однако после беседы с С. А. Богатым автору стало известно доказательство для произвольного n .

Приведем доказательство гипотезы в случае, когда $n = 1$, $q = (p-1)/2$. Потребуем также, чтобы было $p \geq 11$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим эквивариантное отображение $\psi: X \rightarrow \mathbb{R}^p$, равное $\psi(x) = (f(x), f(\sigma x), \dots, f(\sigma^{p-1} x))$; Z_p действует на $\mathbb{R}^p$ циклической перестановкой координат.

Обозначим через $G(R, p, q)$ следующее подмножество $\mathbb{R}^p$:

$$G(\mathbb{R}, p, q) = \{(x_1, \dots, x_p) \mid \forall \{x_{i_1}, \dots, x_{i_q}\}, 0 < i_1 < \dots < i_q \leq p, \text{ минимум 2 точки различны}\}.$$

Ясно, что если гипотеза не верна, то существует такое f , что $\psi(X) \subset G(\mathbb{R}, p, q)$.

Напомним следующее определение.

Индексом $N(Y)$ произвольного пространства Y со свободным действием группы Z_p на нем называется число $\max_n \{\Psi^*(H^n(BZ_p))\} \neq 0$ в $H^n(Y)$ при эквивариантном отображении $\Psi: Y \rightarrow BZ_p$ в классифицирующее пространство (имеются в виду когомологии Александрова–Чеха с коэффициентами в Z_p). Напомним, что когомологические

классы, являющиеся образами классов BZ_p при индуцированном отображении Ψ^* , называются *характеристическими*. Из свойств характеристических классов следует, что если $\Psi: X \rightarrow Y$ – эквивариантное отображение, то $N(X) \leq N(Y)$. Таким образом, наша задача – оценить индекс $G(\mathbb{R}, p, q)$, т.е. доказать, что $N(G(\mathbb{R}, p, [p/2])) = [p/2] - 2$. Прежде всего заметим, что существует естественное эквивариантное вложение $\Psi_q: G(\mathbb{R}, p, q) \hookrightarrow G(\mathbb{R}, p, q+1)$, поэтому $N(G(\mathbb{R}, p, q)) \leq N(G(\mathbb{R}, p, q+1)) = q - 1$ (по теореме 1). В итоге задача сводится к тому, чтобы показать, что $N(G(\mathbb{R}, p, q))$ не может быть равен $q - 1$. Наше доказательство опирается на рассуждения, приведенные в [1].

Пусть $r: \mathbb{R}^p \setminus \{0\} \rightarrow S^{p-1}$ – стандартная деформационная ретракция. Рассмотрим ограничение r на $\mathbb{R}^p \setminus G(\mathbb{R}, p, q)$ и обозначим полученный образ через $K(p, q)$. Ясно, что пространство $K(p, q) \subset S^{p-1}$ гомотопически эквивалентно $\mathbb{R}^p \setminus G(\mathbb{R}, p, q)$. Теперь, чтобы оценить индекс $G(\mathbb{R}, p, q)$, нам достаточно вычислить гомологии $K(p, q)$ и воспользоваться двойственностью Александера в сфере S^{p-1} . Аналогично [1] опишем пространство $K(p, q)$ через пространства $W(I, k, m)$, которые определим следующим образом. Пусть $I = (i_1, \dots, i_j)$, $j \leq k$, $0 < i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq p$. Длину слова I , которая равна j , будем обозначать $l(I)$. Если $I = \emptyset$, то $l(I) \equiv 0$. Пусть m – положительное целое число и $m \leq p - k$. Положим

$$W(I, k, m) = \{(x, x, \dots, y_1, x, x, \dots, y_2, x, x, \dots, y_k, x, x, \dots, x) \mid x \in \mathbb{R}, \\ y_s \text{ стоит на } i_s \text{ месте, } s = 1, \dots, j, \text{ и между } y_j \text{ и } y_{j+1} \text{ стоит ровно } m \text{ штук } x\}.$$

Другими словами, координаты, которые не обязательно равны другим координатам (y_i), стоят на местах $i_1, i_2, \dots, i_{j+m+1}$, а дальше могут стоять на произвольном (из оставшихся) месте. Ясно, что $K(p, q) = \bigcup_{t=0}^q W(\emptyset, p - q, t)$. Вычислим гомологии $K(p, q)$, используя последовательность Майера–Вьеториса. Далее считаем $q = (p - 1)/2$.

ЛЕММА 1. Для любого допустимого r имеем

$$\left[\bigcup_{m=r+1}^{m_{\max}} W(I, k, m) \right] \cap W(I, k, r) = \left[\bigcup_{m=r+1}^{m_{\max}} W(I, k - 1, m) \right] \cup B,$$

где $\dim B \leq 2$ и $m_{\max} = p - i_j - k + j$.

Доказательство очевидно. Заметим, что B состоит из слов, у которых одна координата (z) принимает произвольное значение, а из оставшихся $p - 1$ координат какие то $\frac{1}{2}(p - 1)$ совпадают, принимая произвольное значение (x), а остальные совпадают и принимают произвольное значение (y).

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $k < p - q$, то $B = \emptyset$ [1].

ЛЕММА 2. Для любого допустимого r имеем

- 1) $H_i(W(I, k, m)) = 0$, $1 \leq i < k$, если $k < p - q$;
- 2) $H_i(\bigcup_{m=r}^{m_{\max}} W(I, k, m)) = 0$, $1 \leq i < k$, если $k < p - q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по k . При $k = 0$ имеем 0-мерную сферу, поэтому в этом случае лемма 2 верна. Пусть лемма верна для $k = s - 1$. Докажем ее справедливость при $k = s$.

При фиксированном k доказательство проведем индукцией вниз по $l(I)$.

В случае, когда $l(I) = s$, лемма верна. В этом случае $W(I, s, m)$ – s -сфера. Пусть лемма верна для всех J таких, что $l(J) \geq \rho$, и в нашем случае $l(I) = \rho - 1$.

Нетрудно видеть, что $W(I, k, m) = \bigcup_t W(\mathcal{J}, k, t)$, где $l(\mathcal{J}) = l(I) + 1$. По предположению индукции имеем, что $H_i(W(\mathcal{J}, k, t))$ удовлетворяет лемме 2 для всех допустимых t .

Далее опять применим индукцию “вниз” по r .

Ясно, что при $r = r_{\max}$ ($r_{\max} = p - i_\rho - k + \rho$) имеем

$$\bigcup_{t=r}^{r_{\max}} W(\mathcal{J}, k, t) = W(\mathcal{J}, k, r_{\max}) = S^k.$$

В этом случае лемма 2, очевидно, верна.

Допустим, что $H_i(\bigcup_{t=r+1}^{r_{\max}} W(\mathcal{J}, k, t)) = 0$ для $1 \leq i < k$. Покажем, что

$$H_i\left(\bigcup_{t=r}^{r_{\max}} W(\mathcal{J}, k, t)\right) = 0$$

для $1 \leq i < k$. Выпишем три члена последовательности Майера–Виеториса (обозначим их последовательно a , b и c). Используя лемму 1 и замечание к ней, имеем

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_i\left(\bigcup_{t=r+1}^{r_{\max}} W(\mathcal{J}, k, t)\right) \oplus H_i(W(\mathcal{J}, k, r)) &\rightarrow H_i\left(\bigcup_{t=r}^{r_{\max}} W(\mathcal{J}, k, t)\right) \\ &\rightarrow H_{i-1}\left(\bigcup_{t=r+1}^{r_{\max}} W(\mathcal{J}, k-1, t)\right) \rightarrow \cdots; \end{aligned}$$

$a = 0$ по индукции, $c = 0$ также по индукции, если $i > 1$. А в случае $i = 1$ последний гомоморфизм (отвечающий последней стрелке в последовательности), индуцированный вложением, как нетрудно видеть, есть мономорфизм.

Таким образом, доказан пункт 1) леммы 2. Для доказательства пункта 2) леммы 2 надо выписать ту же часть последовательности Майера–Виеториса, заменив $\mathcal{J}$ на I . Тогда $a = 0$ по индукции и согласно доказанному пункту 1) леммы 2; $c = 0$ по тем же соображениям, что и раньше.

ЛЕММА 3. *Для любого r имеем*

- 1) $H_i(W(I, p - q, m)) = 0$, $4 \leq i < p - q$;
- 2) $H_i(\bigcup_{m=r}^{m_{\max}} W(I, p - q, m)) = 0$, $4 \leq i < p - q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией вниз по $l(I)$.

В случае, когда $l(I) = p - q$, лемма верна. В этом случае $W(I, s, m) - s$ -сфера. Пусть лемма верна для всех J таких, что $l(J) \geq \rho$, и в нашем случае $l(I) = \rho - 1$.

Нетрудно видеть, что $W(I, p - q, m) = \bigcup_t W(\mathcal{J}, p - q, t)$, где $l(\mathcal{J}) = l(I) + 1$. По предположению индукции имеем, что $H_i(W(\mathcal{J}, p - q, t))$ удовлетворяет пункту 1) леммы 3 для всех допустимых t .

Далее опять применим индукцию “вниз” по r .

Ясно, что при $r = r_{\max}$ ($r_{\max} = p - i_\rho - p - q + \rho$) имеем

$$\bigcup_{t=r}^{r_{\max}} W(\mathcal{J}, p - q, t) = W(\mathcal{J}, p - q, r_{\max}) = S^{p-q}.$$

В этом случае лемма 3, очевидно, верна.

Допустим, что $H_i(\bigcup_{t=r+1}^{r_{\max}} W(\mathcal{J}, p-q, t)) = 0$ для $4 \leq i < p-q$. Покажем, что $H_i(\bigcup_{t=r}^{r_{\max}} W(\mathcal{J}, p-q, t)) = 0$ для $4 \leq i < p-q$. Выпишем три члена последовательности Майера–Виеториса (как и ранее, обозначая их a, b, c). Используя лемму 1, имеем

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_i\left(\bigcup_{t=r+1}^{r_{\max}} W(\mathcal{J}, p-q, t)\right) \oplus H_i\left(W(\mathcal{J}, p-q, r)\right) &\rightarrow H_i\left(\bigcup_{t=r}^{r_{\max}} W(\mathcal{J}, p-q, t)\right) \\ \rightarrow H_{i-1}\left(\bigcup_{t=r+1}^{r_{\max}} W(\mathcal{J}, p-q-1, t) \cup B\right) &\rightarrow \cdots; \end{aligned}$$

$a = 0$ по индукции, для c элемента последовательности используем снова последовательность Майера–Виеториса (в которой три последовательных члена обозначаем через d, e и f):

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_{i-1}\left(\bigcup_{t=r+1}^{r_{\max}} W(\mathcal{J}, p-q-1, t)\right) \oplus H_{i-1}B \\ \rightarrow H_{i-1}\left(\bigcup_{t=r+1}^{r_{\max}} W(\mathcal{J}, p-q-1, t) \cup B\right) \\ \rightarrow H_{i-2}\left(\bigcup_{t=r+1}^{r_{\max}} W(\mathcal{J}, p-q-1, t) \cap B\right) \rightarrow \cdots; \end{aligned}$$

d равен 0 по лемме 2 и так как $\dim B \leq 2$; f равен 0, так как

$$\dim \left[\bigcup_{t=r+1}^{r_{\max}} W(\mathcal{J}, p-q-1, t) \right] \cap B \leq 1.$$

Следовательно, e равен 0, тогда и c равен 0, что и требовалось.

Пункт 2) леммы 3 верен по тем же соображениям, что и пункт 2) леммы 2.

СЛЕДСТВИЕ. Имеем $H_i(K(p, q)) = 0$ для $4 \leq i < p-q$.

Теперь воспользуемся двойственностью Александера. Имеем

$$H^i G(\mathbb{R}, p, q) \simeq H^i(S^{p-1} - K(p, q)) \simeq H_{p-i-1}(S^{p-1}, K(p, q)).$$

Из точной последовательности пары

$$\cdots \rightarrow H_{p-i-1}(S^{p-1}) \rightarrow H_{p-i-1}(S^{p-1}, K(p, q)) \rightarrow H_{p-i-2}(K(p, q)) \rightarrow \cdots$$

видно, что $H^i G(\mathbb{R}, p, q) = 0$, $0 < i < q-2$, так как размерность $K(p, q) = p-q$, и $H^i G(\mathbb{R}, p, q) = 0$, $q-2 < i < p-5$ (согласно двойственности Александера и следствию).

Чтобы оценить индекс, воспользуемся идеями, развитыми в [2]. Рассмотрим спектральную последовательность накрытия $G(\mathbb{R}, p, q) \rightarrow G(\mathbb{R}, p, q)/\mathbb{Z}_p$. Член $E_2^{k,l}(k, l \geq 0)$ спектральной последовательности равен $H^k(Z_p, H^l(G(\mathbb{R}, p, q)))$. Ясно, что в нижней строке стоят когомологии BZ_p .

Предположим, что $N(G(\mathbb{R}, p, q)) = q - 1$. Из сделанных выше оценок групп когомологий пространства $(G(\mathbb{R}, p, q))$ и ограничений на p следует, что ниже строки, состоящей из элементов $E_2^{*, q-2}$, стоят нули и выше, как минимум, две строчки нулевые. Из леммы 2 [2] следует, что для каждого $r \geq 2$ существует элемент $u_r \in E_r^{2,0}$ такой, что частичное умножение на u_r есть эпиморфизм групп $E_r^{k,l} \rightarrow E_r^{k+2,l}$ для $k, l \geq 0$. Нетрудно видеть, что $E_{q-1}^{q-1,0} \simeq Z_p$. Предположим, что для любых $t \in E_{q-1}^{0, q-2}$ $d_{q-1}t = 0$; тогда имеем $d_{q-1}(t \smile u_{q-1}) = d_{q-1}t \smile u_{q-1} \pm t \smile d_{q-1}u_{q-1} = 0$. Действительно, первое слагаемое равно нулю по предположению, а второе – так как u_{q-1} стоит в нижней строке и поэтому принадлежит ядру дифференциала d_{q-1} . Так как $\bigcup_t t \smile u_{q-1} = E_{q-1}^{2, q-2}$ (из эпиморфности умножения), то если некоторый элемент τ из $E_{q-1}^{q-1,0}$ “не убивается”, то и элемент $\tau \smile u_{q-1} \in E_{q-1}^{q+1,0}$ “не убивается”. Все остальные дифференциалы d_r , $r > q - 2$, действуют на $E_r^{q-1,0}$ и $E_r^{q+1,0}$ тривиально, поэтому если $E_{\infty}^{q-1,0} \neq \emptyset$, то и $E_{\infty}^{q+1,0} \neq \emptyset$. А так как элементы из $E_{\infty}^{k,0}$ суть характеристические классы, из того, что $N(G(\mathbb{R}, p, q)) = q - 1$, следовало бы, что $N(G(\mathbb{R}, p, q)) \geq q + 1$, что невозможно.

Таким образом, $N(G(\mathbb{R}, p, [p/2])) = [p/2] - 2$. Это завершает доказательство в случае, когда $n = 1$. Чтобы избавиться от ограничения на n , приведем слабый вариант одной из теорем, доказанных в [3].

ТЕОРЕМА 2. Пусть на паракомпактном пространстве X свободно действует группа Z_p и $N(X) \geq (p - 1)n$. Тогда для всякого непрерывного отображения $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ множество точек, орбиты которых отображаются в одну точку, имеет индекс $\geq N(X) - (p - 1)n$.

Предположим, что $H^i(X) = 0$ для $0 < i < (n - 1)(p - 1) + q - 1$. Рассмотрим сквозное отображение $h = p \circ f: X \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$, где $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ – стандартная проекция на первые $n - 1$ координат. Из теоремы 2 немедленно следует, что множество точек, которые отображаются в одну точку при отображении h , имеет как минимум индекс $q - 1$. Действительно, равенство нулю первых $(n - 1)(p - 1) + q - 2$ (начиная с первой) групп гомологий означает, что $N(X) \geq (n - 1)(p - 1) + q - 1$ (достаточно рассмотреть спектральную последовательность накрытия). Это означает, что f отображает множество индекса $\geq q - 1$ в прямую, которая является прообразом некоторой точки при проекции p . Таким образом, задача сводится к одномерному случаю, который уже нами доказан.

Автор выражает благодарность С. А. Богатому за постановку задачи и проявленное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Cohen F, Lusk E. L. Configuration-like spaces and the Borsuk–Ulam Theorem // Proc. Amer. Math. Soc. 1976. V. 56. P. 313–317.
- [2] Cohen F, Lusk E. L. Coincidence point result for spaces with free Z_p -action // Proc. Amer. Math. Soc. 1975. V. 49. № 1. P. 313–317.
- [3] Воловиков А. Ю. Отображения свободных Z_p -пространств в многообразия // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. № 1. С. 36–55.

Харьковский государственный университет
E-mail: bolotov@univer.kharkov.ua

Поступило
09.10.1998
Исправленный вариант
14.02.2001