Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Галкин, Н. В. Мохнина, О некоторых автоморфизмах на ортогональных группах в нечетной характеристике, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 1, 27–37

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm715>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 13:52:08

УДК 512.54

О НЕКОТОРЫХ АВТОМОРФИЗМАХ НА ОРТОГОНАЛЬНЫХ ГРУППАХ В НЕЧЕТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ

В. М. Галкин, Н. В. Мохнина

В статье доказывается, что простые ортогональные группы $O_{2n+1}(q)$, $O_{2n}^{\pm}(q)$ (q нечетно) не могут быть группами автоморфизмов конечных леводистрибутивных квазигрупп. Это частный случай гипотезы, по которой группа автоморфизмов леводистрибутивной квазигруппы разрешима. Для полного доказательства гипотезы необходимо проверить все простые группы.

Библиография: 11 названий.

1. В статье доказывается отсутствие на простых ортогональных группах $O_{2n+1}(q)$, $O_{2n}^{\pm}(q)$ (q нечетно) нетождественного автоморфизма φ со свойством

$$x\varphi(x^{-1}) \in sTs^{-1} \implies x \in T,$$

где T – подгруппа φ -неподвижных элементов.

Это очередной шаг в реализации программы доказательства гипотезы о разрешимости групп трансляций $Z(G)$ конечных леводистрибутивных квазигрупп $G(\cdot)$, сводящейся к φ -гипотезе: проверке отсутствия нетождественного автоморфизма φ с указанным свойством у конечной простой группы Π . Группа левых трансляций $Z(G)$ по определению порождена левыми трансляциями $L_a = (x \rightarrow a \cdot x)$. Группы, для которых существует нетривиальный автоморфизм φ , называются далее φ -группами. Сведения о них можно найти в [1]–[3]. Отметим следующие из свойств: φ -структура наследуется при переходе к φ -инвариантным подгруппам и факторгруппам по φ -инвариантным нормальным делителям; на смежных классах Π/T , где Π – рассматриваемая простая группа, можно ввести структуру леводистрибутивной квазигруппы, если положить $x \cdot y = x\varphi(x^{-1}y)$. Каждая квазигруппа может быть получена таким образом (хотя и с неоднозначно определенной группой Π). Однако каждое представление можно редуцировать к минимальному, уже однозначно определенному квазигруппой. Для этого от Π переходим к главной подгруппе $\Pi_1 = \langle x\varphi(x^{-1}), x \in \Pi \rangle$, порожденной каноническими элементами, а затем профакторизуем по наибольшему нормальному делителю, содержащемуся в T . Группа Π для минимального представления есть коммутант группы левых трансляций квазигруппы G .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00398.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть Π – конечная φ -группа, $T \subset \Pi$ – подгруппа φ -неподвижных элементов. Индекс $(\Pi : \Pi_1)$ делит $|T|$ – порядок группы T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представления Π/T и $\Pi_1/\Pi_1 \cap T$ приводят к одной и той же квазигруппе. Следовательно, $(\Pi : T) = (\Pi_1 : \Pi_1 \cap T)$, откуда $(\Pi : \Pi_1) = (\Pi_1 : \Pi_1 \cap T)$, что делит $|T|$.

2. Описание ортогональных квазигрупп и их автоморфизмов можно найти в [4]–[6]. Ниже приводятся необходимые для дальнейшего изложения сведения.

Группа $O_{2n+1}(q)$. Пусть (x, y) – невырожденная билинейная симметрическая форма на $(2n + 1)$ -мерном пространстве V над конечным полем F_q из q элементов. В последовательности групп $\Gamma O_{2n+1} \supset GO_{2n+1} \supset SO_{2n+1} \supset \Omega_{2n+1} = O_{2n+1}$ ΓO_{2n+1} – группа полулинейных преобразований [5], GO_{2n+1} – подгруппа изометрий формы (x, y) , SO_{2n+1} – подгруппа преобразований с определителем 1, $\Omega_{2n+1} = O_{2n+1}$ – коммутант группы SO_{2n+1} . Автоморфизмы группы O_{2n+1} в классическом представлении определяются как сопряжение элементами из ΓO_{2n+1} . Группа O_{2n+1} проста при $n \geq 2$. Имеют место следующие изоморфизмы: $O_3(q) \cong L_2(q)$, $O_5(q) \cong Sp_4(q)$.

Группа $O_{2n}^\pm(q)$. В аналогичной последовательности групп $\Gamma O_{2n}^\pm \supset GO_{2n}^\pm \supset SO_{2n}^\pm \supset \Omega_{2n}^\pm \supset Z(\Omega_{2n}^\pm)$ обе группы $O_{2n}^\pm$ возникают как факторгруппы $\Omega_{2n}^\pm/Z(\Omega_{2n}^\pm)$ по центру $Z(\Omega_{2n}^\pm) = 1$ или Z_2 , соответствующие выбору двух видов неэквивалентных билинейных форм (x, y) . Автоморфизмы группы O_{2n}^- определяются так же, как и в группе O_{2n+1} . При $n > 4$ автоморфизмы группы O_{2n}^+ вновь индуцируются сопряжениями элементами из ΓO_{2n}^+ . При $n = 4$ ситуация усложняется в связи с появлением так называемой “тройственности”. Группа O_{2n}^+ является простой при $n \geq 3$, группа O_{2n}^- – при $n \geq 2$; $O_4^+(q) \cong L_2(q) \times L_2(q)$, $O_4^-(q) \cong L_2(q^2)$, $O_6^+(q) \cong L_4(q)$, $O_6^-(q) \cong U_4(q)$.

Ортогональные группы $O_{2n+1}, O_{2n}^+, O_{2n}^-$ можно рассматривать как группы Шевалле типов $B_n, D_n, {}^2D_n$. Они порождаются корневыми группами $\langle x_\alpha(t) \rangle$, где $\alpha \in \Sigma$ – система корней в схеме Дынкина, $t \in F_q$, $x_\alpha(t + s) = x_\alpha(t)x_\alpha(s)$. Для наших целей необходимо выделить в ортогональных группах наличие картановской подгруппы $H = \langle h_\alpha(t) \mid t \in F_q^* \rangle$, образующие которой определенным образом выражаются через элементы корневых подгрупп, причем $h_{-\alpha}(s) = h_\alpha(s^{-1})$, $h_\alpha(t + s) = h_\alpha(t)h_\alpha(s)$. Группа H абелева, а факторгруппа $N(H)/H = W$ может быть отождествлена с группой Вейля системы корней Σ , т.е. группой изометрий Σ , порожденной отражениями $r_\alpha(u \rightarrow u - 2((u, \alpha)/(\alpha, \alpha)) * \alpha)$. При этом $\omega_\alpha h_\beta(t) \omega_\alpha^{-1} = h_{\omega(\beta)}(t)$ для $\omega \in W$.

Аutomорфизмы ортогональных групп классифицируются стандартным образом, если использовать интерпретацию групп как групп Шевалле [6]. Каждый автоморфизм есть композиция полевого, диагонального, внутреннего и графового автоморфизмов. Такое деление автоморфизмов относительно. Оно зависит от выбора базиса в пространстве V .

В группах Шевалле различают унитарные и полупростые элементы. Под последними понимаются элементы, чьи порядки взаимно просты с характеристикой поля q .

ЛЕММА 1. В группах $O_{2n+1}(q), O_{4m}^\pm(q)$ (q нечетно) полупростой элемент нечетного порядка сопряжен со своим обратным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соответствующие алгебраические группы будем рассматривать как группы Шевалле. Сопряжение элементов с помощью элемента $\omega \in W$ из группы Вейля дает $\omega h_\alpha(t) \omega^{-1} = h_{\omega(\alpha)}(t)$, где $h_\alpha(t), h_{\omega(\alpha)}(t)$ – элементы картановской подгруппы H . Из соотношения $h_\alpha(t) x_\beta(u) h_\alpha(t^{-1}) = x_\beta(t^{\langle \beta, \alpha \rangle} u)$ [6] следует $h_{-\alpha}(t) = h_\alpha(t^{-1})$, по крайней мере, с точностью до множителя из центра группы. Существует элемент $\omega \in W$ такой, что $\omega(\alpha) = -\alpha$ при $\forall \alpha$. Таковым является произведение отражений относительно n ортогональных корней, которые в рассматриваемых группах легко выделяются из системы корней Σ . Полупростой элемент можно вложить в картановскую подгруппу. Если $x = \prod_\alpha h_\alpha(t_\alpha)$, то, используя $h_{-\alpha}(t) = h_\alpha(t^{-1})$, получаем

$$\omega x \omega^{-1} = \prod_\alpha h_{\omega(\alpha)}(t_\alpha) = \prod_\alpha h_{-\alpha}(t_\alpha) = \prod_\alpha h_\alpha(t_\alpha^{-1}) = x^{-1},$$

т.е. $x \sim x^{-1}$ в алгебраической группе. Поскольку фундаментальная группа, соответствующая алгебраической группе, есть Z_2 (или $Z_2 \times Z_2$), то сопряженность элемента со своим обратным имеет место и в группах $O_{2n+1}(q), O_{4m}^\pm(q)$ [7].

3. В этом пункте рассматривается φ -гипотеза для группы O_{2n+1} . В рассуждении используется индуктивное предположение, что φ -структура тривиальна для ортогональных групп с размерностью, меньшей $2n + 1$, а для группы O_{2n+1} предполагаем, что она является нетривиальной φ -группой. В наименьшем контрпримере можно считать $n \geq 3$ из-за описанных выше изоморфизмов. Доказательство φ -гипотезы можно разбить на следующие этапы.

3.1. Поскольку известные простые группы не имеют регулярных автоморфизмов [4], то автоморфизм φ нерегулярен. Тогда T либо состоит только из унитарных элементов, либо содержит полупростые элементы.

3.2. Докажем, что T содержит полупростые элементы. Допустим противное. Без ограничения общности можно считать, что $T \subseteq U = \langle x_\alpha(t), \alpha > 0 \rangle$ – φ -инвариантная p -подгруппа (p/q).

Нормализатор $N(T)$ φ -инвариантен, $T \subset N(T)$. Индуцированное действие φ на $N(T)/T$ регулярно. Значит, можно выделить φ -инвариантную p -подгруппу в $N(T)/T$ [8]. Прообраз ее в $N(T)$ дает φ -инвариантную p -подгруппу Γ , строго содержащую T , если $T \neq U$; $N(\Gamma)$ φ -инвариантен. Продолжая рассуждения, устанавливаем существование φ -инвариантной силовой p -подгруппы, в качестве которой берем U .

Нормализатор $N(U)$ φ -инвариантен. Фактор $N(U)/U$ изоморфен картановской подгруппе H , т.е. на H φ действует регулярно.

С другой стороны, в H есть подгруппа $H_0 = \langle h_\alpha(t), t \in F_p \rangle$ ($t \neq 1, F_p$ – простое подполе), элементы которой выдерживают полевую, диагональную, внутреннюю и графовую часть автоморфизма φ , т.е. в H есть φ -неподвижные элементы. Противоречие. Следовательно, T не может состоять только из унитарных элементов.

3.3. На этом этапе докажем, что подгруппа T содержит инволюцию.

Возьмем полупростой элемент $t \in T$. Группа, порожденная элементом t , имеет φ -инвариантный нормализатор $N\langle t \rangle$. Фактор $N\langle t \rangle / \langle t \rangle$ приводит к некоторой квазигруппе G .

Для $x \in N\langle t \rangle$, используя лемму 1, имеем $xtx^{-1} = t^{-1}$ и $\varphi(x)t\varphi(x^{-1}) = t^{-1}$, т.е. $x^{-1}\varphi(x) \in C(t)$, где $C(t)$ – централизатор элемента t . Подгруппа

$$N_1(C(t)) = N_1\langle t \rangle = \langle x\varphi(x^{-1}), x \in N\langle t \rangle \rangle \subset C(t) \neq N\langle t \rangle.$$

В дальнейшем эти рассуждения будем называть *C-N-конструкцией*.

Согласно предложению 1 в $|T|$ входит множитель $(N\langle t \rangle : N_1\langle t \rangle)$. Он четен, так как четен уже $(N\langle t \rangle : C(t))$. В самом деле, в $N\langle t \rangle/C(t)$ есть элемент $u: utu^{-1} = t^{-1}$; повторное сопряжение дает $u^2tu^{-2} = ut^{-1}u^{-1} = (utu^{-1})^{-1} = t$, т.е. $u^2 \in C(t)$, но $u \notin C(t)$. Значит, в $N\langle t \rangle/C(t)$, а следовательно, и в T есть инволюция u .

3.4. Рассмотрим инволюцию $\sigma \in T$. В группе O_{2n+1} в нечетной характеристике $\sigma^2 = 1$ и векторное пространство V разлагается в прямую сумму $V^+ \oplus V^-$, $V^+ \perp V^-$, $\dim V^-$ четно; $\forall x \in V^+ : \sigma(x) = x$; $\forall x \in V^- : \sigma(x) = -x$.

Известно, что $\varphi(x) = uxu^{-1}$ при некотором $u \in GO_{2n+1}$. Пусть $C_{GO}(\sigma)$ – централизатор инволюции в соответствующей группе GO_{2n+1} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. $u \in C_{GO}(\sigma)$ переводит в себя $V^\pm$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как σ – φ -неподвижный элемент, то $u\sigma u^{-1} = \sigma$.

Возьмем $x \in V^+$. Имеем $\sigma u(x) = u\sigma(x) = u(x) \in V^+$. Если $x \in V^-$, то $\sigma u(x) = u\sigma(x) = -u(x) \in V^-$.

Централизатор σ в группе GO_{2n+1} разлагается в произведение φ -инвариантных множителей, $C_{GO}(\sigma) = GO(V^+) \times GO(V^-)$. Поскольку $n \geq 3$, то либо $\dim V^+$, либо $\dim V^-$ не менее 4. Пусть для определенности $\dim V^+ \geq 4$. Тогда факторгруппа $\Omega(V^+)/Z(\Omega(V^+))$ проста при $\dim V^+ < 4$ и полупроста при $\dim V^+ = 4$, так как $\Omega_4(V^+)/Z(\Omega_4(V^+)) \cong O_4^+(q) \cong L_2(q) \times L_2(q)$. При $q = 3$ группа $L_2(q)$ разрешима, поэтому группу $O_7(3)$ как исключение рассмотрим ниже.

Действие автоморфизма φ определено следующим образом: $\varphi(x) = uxu^{-1}$, $u \in GO_{2n+1}$. Группа $\Omega(V^+)$ φ -тривиальна по индукции, так как тривиально действие φ на $\Omega(V^+)/Z(\Omega(V^+))$ и на $Z(\Omega(V^+))$. Следовательно, u – скаляр на V^+ .

В пространстве V^+ выделим подпространство W коразмерности 1, на котором метрика невырождена, и рассмотрим ортогональную группу на пространстве $W \oplus V^-$. Ее можно рассматривать как φ -инвариантную подгруппу в ортогональной группе на V , так как $u(W) = W$. На ней $\varphi = 1$ по индукции, т.е. u – скаляр на $W \oplus V^-$, а потому u – скаляр на V , т.е. $\varphi = 1$ на группе O_{2n+1} .

Рассмотрим автоморфизм φ на группе $O_7(3)$.

Так как полевая часть у φ отсутствует, то $\varphi(x) = uxu^{-1}$, где $u \in SO_7(3)$ является диагональным автоморфизмом. Как известно, квадрат диагонального автоморфизма внутренний, т.е. $\varphi^2(x) = u^2xu^{-2}$, где $u^2 \in O_7(3)$. Элемент u^2 не содержит полупростой части. В противном случае из-за сопряженности полупростой части u_1^2 с обратной следует $C(u_1^2) \neq N\langle u_1^2 \rangle$. По *C-N-конструкции* получаем противоречие. Поэтому u^2 – унитарен. Некоторая степень его $v = u^{2\alpha}$ – элемент порядка 3. Согласно атласу [9] $v \sim v^{-1}$. Далее, *C-N-конструкция*, примененная к $C(v)$, дает противоречие.

4. В этом пункте докажем, что подгруппа T группы $O_{4m+2}^\pm(q)$ содержит инволюцию.

Пусть это не так. Возьмем в T элемент x наименьшего порядка t . Очевидно, что t простое нечетное. Элемент x может быть либо унитарен, либо полупростым.

4.1. Пусть x полупрост, т.е. $(t, q) = 1$.

ЛЕММА 2. Если x — элемент простого порядка t , то x сопряжен с x^q в группе $O_{4m+2}^+(q)$, а в группе $O_{4m+2}^-(q)$ — с x^{q^2} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группу $G = O_{4m+2}^+(q)$ вложим в алгебраическую группу $\overline{G}$, определенную над алгебраическим замыканием $\overline{F}_q$ поля F_q . Полупростой элемент x лежит в некотором максимальном торе. Ввиду того, что все максимальные торы сопряжены, можно считать, что x лежит в картановской подгруппе группы $\overline{G}$. Автоморфизм Фробениуса оставляет x инвариантным и возводит в степень q при переходе x в $y = xsx^{-1}$ ($s \in \overline{G}$) из картановской подгруппы, т.е. $x \sim x^q$ в группе $\overline{G}$. А так как порядок t нечетен, то сопряженность элементов в $\overline{G}$ влечет их сопряженность и в G [7].

Для группы $O_{4m+2}^-(q)$ теорема доказывается аналогично. Отличие составляет основное поле F_{q^2} .

ЛЕММА 3. В T есть либо элемент простого порядка $t \mid q - 1$ в группе $O_{4m+2}^+(q)$ и $t \mid q^2 - 1$ в группе $O_{4m+2}^-(q)$, либо унитарный элемент.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем для группы $O_{4m+2}^+(q)$.

Предположим противное. Пусть для x из T ($x^t = 1$, где t наименьшее) $t \nmid q$ и $t \nmid q - 1$. Тогда t должно делить некоторое число $q^i - 1$ ($i > 1$). (В группе $O_{4m+2}^-(q)$ t должно делить $q^i - (-1)^i$, $i > 2$.) Ясно, что $x \neq x^q$ и $C(x) \neq N\langle x \rangle$. Значит, $i/(N\langle x \rangle : C(x))$ есть делитель $t - 1$. Противоречие с выбором x .

В доказательстве для группы $O_{4m+2}^-(q)$ q заменяется на q^2 .

Итак, x — полупростой элемент в T порядка $t \mid q - 1$ в группе $O_{4m+2}^+(q)$ и $t \mid q^2 - 1$ в группе $O_{4m+2}^-(q)$. Многочлен $f(x) = x^t - 1$ разложим на неприводимые в F_q множители $f_i(x)$. Тогда $V = \Sigma \oplus V_i$, где V_i аннулируется многочленом $f_i(x)$. Каждое слагаемое V_i можно рассматривать как пространство над полем $F_q(x)$. Распределим слагаемые V_i на самосопряженные V_j и пары сопряженных друг с другом $V_k \sim V_{k'}$.

Слагаемое V_j будем называть *самосопряженным*, если оно аннулируется не только $f_j(x)$, но и $f_j(x^{-1})$. Тогда $V = \Sigma \oplus V_j \oplus \Sigma \oplus (V_k + V_{k'})$. Ограничение формы на V_i невырождено. Доказательство не приводится, но понятие об этом можно найти в п. 5.

Рассмотрим структуру централизатора полупростого элемента x .

Если $t \mid q - 1$, то x — картановский элемент с собственными значениями $1, \dots, 1, \lambda_1, \lambda_1^{-1}, \dots$, где $\lambda_i \neq 1$; x^{-1} имеет те же собственные значения, поэтому $x \sim x^{-1}$ в группе $GO_{4m+2}^\pm(q)$ с помощью ортогонального преобразования u . При наличии единиц среди собственных значений x в централизатор $\widehat{C}(x)$ входит множитель $GO(V_j)$. Тогда в $\widehat{C}_{GO}(x)$ входят элементы $GO \setminus SO, SO \setminus \Omega$. Если $u \in \Omega$, то $x \sim x^{-1}$ в Ω . Если $u \in SO \setminus \Omega$, то u заменим на $u_1 = uc \in \Omega$, где $c \in SO \setminus \Omega$, и $x \sim x^{-1}$ в группе Ω_{4m+2} с помощью ортогонального преобразования u_1 . Если $u \in GO \setminus SO$, то u заменим на $u_2 = uc_1 \in SO$, где $c_1 \in GO \setminus SO$. Таким образом, $x \sim x^{-1}$ в группе Ω_{4m+2} и по C - N -конструкции в T имеем инволюцию.

Если среди собственных значений x нет единиц, но, по крайней мере, одно из V_k неодномерно, то в централизаторе $\widehat{C}_{GO}(x)$ появляется множитель $GL(V_k)$. Он неразрешим при $V_k > 2$, что приводит к четности порядка T .

Если $t \nmid q - 1$, а $t \mid q + 1$ (в группе $O_{4m+2}^-(q)$), то $\prod f_i(x)$ имеет квадратичные множители и множитель $x - 1$. Если $\exists V_j$, где $x \equiv 1$, то проходят прежние рассуждения.

Если среди собственных значений нет единиц, то $\widehat{C}_{GO}(x)$ будет содержать нормальным делителем группу $U_n(q)$, а она φ -тривиальна [10], т.е. двойка делит порядок T .

Если среди собственных значений x нет единиц и все V_i одномерны при $t \mid q - 1$ (дву-мерны при $t \mid q^2 - 1$), то справедливы следующие рассуждения. $\widehat{C}(x)$ есть φ -инвариантная подгруппа диагональных матриц, т.е. картановская. Нормализатор $N(\widehat{C}(x))$ φ -инвариантен. Фактор $N(\widehat{C}(x))/\widehat{C}(x)$ — φ -группа, являющаяся группой Вейля W , изоморфной симметрической группе Σ_n . Знакопеременная группа A_n характеристична, поэтому фактор $\Sigma_n/A_n = Z_2$ — тривиальная φ -группа, так как не существует квазигрупп порядка 2 [1]. Отсюда 2 делит $|T|$. (В случае $t \mid q^2 - 1$ группа Вейля есть типа $B_{n-1} = \Sigma_{2m} \cdot 2^m$ [6], но это не меняет суть рассуждений.)

Итак, если в T элемент наименьшего порядка полупрост, то это инволюция.

4.2. Пусть теперь элемент x наименьшего порядка t является унитаром в T .

Базис в пространстве V можно выбрать таким образом, чтобы оно разлагалось в прямую сумму подпространств двух типов: e -пространства и (f, f') -пространства [7]. Базис e -пространства представляют следующие векторы: $e, se, s^2e, \dots, s^{k-1}e$, где $s^k = 0$, k нечетно. На нем задана метрика: $(e, e) = 0$, $(e, s^{k-1}e) = \omega$, $(e, s^2e) = (e, s^4e) = \dots = (e, s^{k-3}e) = 0$ (ω определяется с точностью до квадратного множителя). Остальные произведения определяются однозначно; (f, f') -пространство имеет размерность $2k$ (k четно). Базис $f, sf, s^2f, \dots, s^{k-1}f, f', sf', s^2f', \dots, s^{k-1}f'$ ($s^k f = s^k f' = 0$) с метрикой

$$(f, s^i f) = (f', s^i f') = 0, \quad (f, s^i f') = \begin{cases} 0, & i > k - 1, \\ 1, & i = k - 1. \end{cases}$$

ЛЕММА 4. Если x — унитар, то $x \sim x^{m^2}$ в группе $O_{4m+2}^\pm(q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как унитар x можно представить в виде $x = 1 + s$, $s^k = 0$, то $x^m = 1 + T$, где $T = ms + C_m^2 s^2 + \dots + s^m$. На (e, f, f') -пространстве из-за единственности нормализации базиса $x \sim x^m$ с помощью ортогонального преобразования u : $s^i e \rightarrow T^i e_1$, $s^i f \rightarrow T^i f_1$, $s^i f' \rightarrow T^i f'_1$, где $T e_1, T f_1, T f'_1$ — базисные векторы для x^m ($u \in GO_{4m+2}^\pm(q)$). Значения их скалярных произведений такие же, как для векторов $s^i e, s^i f, s^i f'$. Если $u \in SO_{4m+2}^\pm(q)$, то $u^2 \in O_{4m+2}^\pm(q)$. Откуда $x \sim x^{m^2}$ в группе $O_{4m+2}^\pm(q)$.

Так как пространство V есть прямая сумма e - и (f, f') -подпространств, с одной стороны, и имеет размерность $4m + 2$, с другой, то в V обязательно должно быть e -подпространство нечетной размерности. Поскольку $e \in C(x)$, то и $(-e) \in C(x)$, но $|e| = (-1)^k = -1$. Значит, в $C(x)$ есть элемент из $GO \setminus SO$. Если $u \in GO \setminus SO$, то u заменим на $u_1 = uc$, где $c \in GO \setminus SO$. Тогда x будет сопряжен с x^m с помощью элемента $u_1 \in SO$, т.е. $x \sim x^{m^2}$ в группе $O_{4m+2}^\pm(q)$.

Если $x \neq x^{m^2}$, то $C(x) \neq N\langle x \rangle$ и в T найдутся элементы меньшего порядка, чем t . Противоречие. Поэтому $x = x^{m^2}$. Возьмем $m = 2$. Тогда найдется x такое, что $x^3 = 1$, и q — степень тройки.

Рассмотрим централизатор унитарного элемента x :

$$\widehat{C}_{GO}(x) = R \left(\prod_{i \text{ чет.}} \widehat{S}_{p_{2r_i}}(q) \times \prod_{i \text{ нечет.}} GO_{r_i}(q) \right),$$

где R – унитарный радикал, т.е. наибольший нормальный делитель, состоящий из унитарных элементов

$$|R| = q^{\dim R}, \quad \dim R = \frac{1}{2} \sum_i (r_i + r_{i+1} + \dots)^2 - \sum_i r_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i \text{ чет.}} r_i,$$

где r_i – число подпространств размерности i при i нечетном и размерности $2i$ при i четном [7].

Исключение составляют случаи: $r_1, r_3 \leq 4$; $r_2 \leq 1$ в поле характеристики $q = 3$. Наибольшая при этом размерность векторного пространства V составляет 18 ($\dim V = 1r_1 + 2r_2 + 3r_3 = 18$); e -подпространство выбираем следующим образом: e_1, e_2, e_3, e_4 . Унитар x тождественен на e -подпространстве ($k = 1, s = 0$). Так как e -подпространство обязательно есть в V , то всегда можно выбрать такой базис. Тогда в $\hat{C}_{GO}(x)$ входят элементы $GO \setminus SO, SO \setminus \Omega$. Как отмечалось выше, $x \sim x^m$ в группе GO_{4m+2} с помощью ортогонального преобразования u . Возьмем $m = -1$. Если $u \in \Omega$, то $x \sim x^{-1}$ в Ω . Если $u \in SO \setminus \Omega$, то u заменим на $u_1 = uc \in \Omega$, где $c \in SO \setminus \Omega$, и $x \sim x^{-1}$ в группе Ω_{4m+2} с помощью ортогонального преобразования u_1 . Если $u \in GO \setminus SO$, то u заменим на $u_2 = uc_1 \in SO$, где $c_1 \in GO \setminus SO$. Таким образом, при $r_1, r_3 \leq 4$ $x \sim x^{-1}$ в группе Ω_{4m+2} . Следовательно, C - N -конструкция опять приводит к наличию в T инволюции.

5. Докажем φ -гипотезу для групп $O_{2n}^{\pm}(q)$. (Группа $O_8^+(q)$ рассматривается здесь без наличия в ней тройственности.) Доказательство проведем методом от противного. В наименьшем контрпримере берет $n \geq 4$. В доказательстве используем индуктивное предположение о верности φ -гипотезы для ортогональных групп размерности меньшей $2n$.

Рассмотрим инволюцию $\sigma \in T$. (Наличие в T инволюции для группы $O_{4n}^{\pm}(q)$ описано в п. 3 при рассмотрении группы $O_{2n+1}(q)$, для группы $O_{4n+2}^{\pm}(q)$ – в п. 4.)

При $Z(\Omega) = 1$ доказательство φ -тривиальности группы $O_{2n}^{\pm}$ аналогично доказательству φ -тривиальности группы O_{2n+1} .

При $Z(\Omega) = 2$ в нечетной характеристике два типа инволюций: $\sigma^2 = 1$ – инволюция I типа и $\sigma^2 = -1$ – инволюция II типа. В случае инволюции I типа рассуждения о φ -тривиальности аналогичны описанным в п. 4.3. Инволюции II типа существуют, когда $-1 \in \Omega$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $\text{spin}(-1) = (-1)^n \omega^{\pm}$ являлся квадратом, где $\omega^{\pm}$ – квадрат и неквадрат в поле F_q соответственно [11]. При $q \equiv 1 \pmod{4}$ используется ω^+ , т.е. инволюция II рода может быть лишь в $O_{2n}^+(q)$. Если же $q \equiv -1 \pmod{4}$, то ее существование в $O_{2n}^+(q)$ возможно лишь при четном n , а при n нечетном – только в $O_{2n}^-(q)$.

5.1. $\sigma^2 = -1, q \equiv 1 \pmod{4}$, т.е. $-1 = \lambda^2$, где $\lambda \in F_q$.

Векторное пространство V разлагается в прямую сумму $V^+ \oplus V^-$. При этом $\forall x \in V^+ : \sigma(x) = \lambda x; \forall x \in V^- : \sigma(x) = -\lambda x$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. $V^{\pm}$ самоортогональны, $\dim V^+ = \dim V^-$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для определенности возьмем $x, y \in V^+$ и подействуем на них σ .

Имеем $(x, y) = (\sigma(x), \sigma(y)) = \lambda^2(x, y) = -(x, y)$. Это возможно лишь при $(x, y) = 0$, т.е. $V^+ \perp V^+$ ($V^- \perp V^-$ доказывается аналогично). Из самоортogonalности $V^\pm$ следует сопряженность V^+ и V^- . В противном случае метрика на $V^+ \oplus V^-$ будет вырождена. Таким образом, $\dim V^+ = \dim V^-$.

Выясним структуру централизатора инволюции.

Выберем базис $e_1, e_2, \dots, e_n \in V^+$:

$$e'_1, e'_2, \dots, e'_n \in V^-, \quad (e_i, e'_i) = 1, \quad (e_i, e'_j) = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Выбор осуществляется путем выделения в пространстве V гиперболических плоскостей. При этом пространство V разлагается в виде их прямой суммы [11].

Элемент $u \in \widehat{C}_{GO}(\sigma)$ такой, что $u\sigma u^{-1} = \sigma$, переводит в себя $V^\pm$. (Доказательство аналогично доказательству предложения 2.)

Действие u на V^+ можно задать произвольно матрицей $u_{ij} \in GL_n(q)$. Тогда действие u на V^- определим при помощи матрицы $u_{ji} \in GL_n(q)$: $u(e'_i) = u'_{ji}e_j$. Можно показать, что $(e_i, e'_j) = \delta_{ij} = u^*_{ji}u'_{ji}$, где u^*_{ji} – матрица, транспонированная к u_{ji} . Таким образом, $u'_{ji} = (u^*_{ji})^{-1}$ и элемент $u \in \widehat{C}_{GO}(\sigma)$ представляется матрицей

$$\begin{pmatrix} u_{ij} & \\ & u^*_{ji}{}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\widehat{C}_{GO}(\sigma) \cong GL_n(q) = SL_n \times Z_{q-1} = L_n \times Z(L_n) \times Z_{q-1}$. Заметим, что определители элементов централизатора $|u| = 1$ и $\widehat{C}_{GO}(\sigma) = C_{SO}(\sigma)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Накрытие $\widehat{C}_{GO}(\sigma)$ состоит из элементов $u \in GO_{2n}^\pm(q)$, которые коммутируют с σ точностью до знака: $u\sigma u^{-1} = \pm\sigma$.

$\widehat{C}_{GO}(\sigma)$ выдерживает автоморфизм φ , поскольку $\widehat{C}_{GO}(\sigma)$ получается из простого сечения L_n ($n \geq 4$) расширением с помощью φ -тривиальных групп $Z(L_n)$ и Z_{q-1} . Так как имеет место последовательность включений $\widehat{C}_{GO} \supset C_{GO} \supseteq C_{SO} \supseteq C_\Omega \supset Z_2$, то $C_\Omega(\sigma)$ будет также φ -тривиален.

Мы знаем, что $\varphi(x) = u\sigma u^{-1}$ при некотором $u \in GO_{2n}^\pm(q)$. Так как σ – φ -неподвижный элемент, то $u\sigma u^{-1} = \pm\sigma$. Инволюция σ такая, что $u\sigma u^{-1} = -\sigma$ под действием φ меняет местами блоки u_{ji} и $(u^*_{ji})^{-1}$ и, значит, автоморфизм φ не может быть тривиальным на сечении $L_n(q)$. Поэтому $u\sigma u^{-1} = \sigma$.

По индукции u – скаляр на $V^\pm$. Выделим в пространстве V подпространство W ко-размерности 2 такое, при котором $V = W \oplus \langle e_1, e'_1 \rangle$, и рассмотрим ортогональную группу на W . По индуктивному предположению группа $O_{2n-2}^\pm$ φ -тривиальна, т.е. u – скаляр и при том один и тот же на обоих блоках. Значит, $u = \pm 1$ и $\varphi = 1$ на группе $O_{2n}^\pm$. Противоречие.

5.2. $\sigma^2 = -1, q \equiv -1 \pmod{4}, V^+ \perp V^-$ и $V^\pm$ самосопряжены. Здесь ортогональная форма “поднимается” до унитарной $(x, y) = 0.5 \operatorname{Tr}\{x, y\}$, где $\{x, y\}$ – невырожденная эрмитова форма и след берется над F_{q^2}/F_q . В этом случае

$$\widehat{C}_{GO}(\sigma) \cong GU_n(q) = SU_n \times Z_{q+1} = U_n \times Z(U_n) \times Z_{q+1}.$$

Можно показать, что $\widehat{C}_{GO}(\sigma) = C_{SO}(\sigma)$, $\widehat{C}_{GO}(\sigma) - \varphi$ -тривиально.

Полулинейное преобразование можно продолжить и на унитарную группу, поскольку эрмитова форма выражается через ортогональную $\{x, y\} = (x, y) - \sigma(\sigma x, y)$.

Как и прежде, $\varphi(x) = xux^{-1}$ при некотором $u \in GO_{2n}^{\pm}(q)$. Выделим в пространстве V подпространство W меньшей размерности и рассмотрим на нем ортогональную подгруппу исследуемой группы. По индуктивному предположению она φ -тривиальна, т.е. u — скаляр на W , а значит, и на V . Поэтому $\varphi = 1$ на группе $O_{2n}^{\pm}$. Противоречие.

Исключение из общей схемы рассуждения составляет группа $O_8^+(3)$, так как структура централизатора ее инволюции I типа не содержит простой части (состоит из произведения множителей вида $L_2(3)$). Как говорилось выше, автоморфизм φ есть сопряжение элементом $u \in GO_8^+(3)$, но тогда $u^2 \in GO_8^+(3)$. Нечетная часть $(u^2)'$ может быть только 3-элементом $((u^2)' \in \Omega_8^+(3))$. Согласно атласу [9] 3-элемент сопряжен со своим обратным, что запрещает C - N -конструкция. Поэтому u^2 — 2-элемент, а значит, порядок φ — это степень двойки и T содержит силовскую 2-подгруппу. Но тогда T содержит инволюции всех типов, а инволюции II типа исключения не составляют, так как в структуру их централизаторов входят группы $U_n(q)$ и $L_n(q)$, которые при $n \geq 4$ просты.

6. Докажем φ -гипотезу для группы $O_8^+(q)$ при наличии в ней графового автоморфизма третьего порядка (автоморфизма “тройственности”).

При рассмотрении централизатора $\widehat{C}_{GO}(\sigma)$ инволюции, содержащейся в T , выше отмечалось, что при инволюции I типа $\widehat{C}_{GO}(\sigma) = C_{GO}(\sigma) \cong GO_6^{\pm}(q) \times GO_2^{\pm}(q)$ или $\widehat{C}_{GO}(\sigma) = C_{GO}(\sigma) \cong GO_4^{\pm}(q) \times GO_4^{\pm}(q)$; при инволюции II типа $\widehat{C}_{GO}(\sigma) \cong GL_4(q) = C_{SO}(\sigma)$ ($q \equiv -1 \pmod{4}$) и $\widehat{C}_{GO}(\sigma) \cong GU_4(q) = C_{SO}(\sigma)$ ($q \equiv -1 \pmod{4}$).

В случае инволюции II типа $\exists u \in \widehat{C}_{GO}(\sigma)$: $usu^{-1} = -\sigma$, т.е. при переходе от C_{GO} к C_{Ω} надо учитывать удвоение централизатора. Если $\widehat{C}_{GO}(\sigma) = C_{SO}(\sigma)$, то инволюций II типа имеется по два класса. Порядки централизаторов инволюций II типа совпадают с порядком централизатора инволюции I типа при $\dim V^+ = 6$, $\dim V^- = 2$ (инволюция $(6, 2)$).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При необходимости σ можно заменить на $-\sigma$, что позволяет считать $\dim V^+ > \dim V^-$.

Эти три класса инволюций переставляются автоморфизмом “тройственности”.

Система корней группы $O_8^+(q) = D_4(q)$ представляется диаграммой Дынкина следующим образом:

Центр группы Шевалле $D_4(q)$ состоит из картановских элементов

$$h(t) = h_1(t_1)h_2(t_2)h_3(t_3)h_4(t_4),$$

которые коммутируют с x_α , а именно, для которых выполняется

$$t_i^2 = 1, \quad t_2 = 1, \quad t_1 t_3 t_4 = 1;$$

$h_2(-1), h_1(a)h_3(a), h_3(a)h_4(a), h_1(a)h_4(a)$, где $a^2 = -1$, – представители четырех классов инволюций ($q \equiv 1 \pmod{4}$). При $q \equiv -1 \pmod{4}$ диагонализировать инволюции удается лишь расширением поля F_q до F_q^2 .

Инволюция $h_2(-1)$ соответствует инволюции I типа, где $\dim V^+ = \dim V^- = 4$ (инволюция $(4, 4)$).

Допустим, что группа $O_8^+(q)$ с автоморфизмом “тройственности” имеет нетривиальную φ -структуру.

Поскольку автоморфизм “тройственности” переставляет инволюции классов II типа и $(6, 2)$, то можно считать, что в T есть инволюция I типа.

Отвергнем наличие в T инволюции $(6, 2)$.

Поскольку $\sigma \in T$, то $\varphi(\sigma) = \sigma$. Допустим, что σ – инволюция $(6, 2)$.

Диагональная и полевая части автоморфизма φ оставляют σ инвариантным. Внутренняя часть переводит σ в сопряженную инволюцию, а автоморфизм “тройственности” – в другой класс. Противоречие.

Поэтому T содержит инволюцию $(4, 4)$.

Централизатор этой инволюции в универсальной группе есть

$$SL_2(q) \times SL_2(q) \times SL_2(q) \times SL_2(q).$$

Множители порождаются корневыми централизаторами в группе $O_8^+(q)$. Надо расширить централизатор с помощью вейлевских элементов, переводящих $h_2(-1)$ в $h_2(-1)c$, где c – элемент из центра универсальной группы, а затем профакторизовать по последнему. Отметим, что централизатор в универсальной группе φ -инвариантен.

Рассуждения о составляющих φ , проведенные выше, дают внутреннюю часть, совпадающую с сопряжением элементом из централизатора. Составляющие φ , кроме графовой части, переводят в себя множители $SL_2(q)$. Графовая часть переставляет три из них. Поэтому φ индуцирует нетривиальный автоморфизм на полупростом (при $q > 3$) сечении с множителями типа $L_2(q)$. Но это давало бы нетривиальную φ -структуру на группе $L_2(q)$. Чтобы φ -структура на сечении была тривиальна, необходимо компенсировать “тройственность” внутренней частью, т.е. сопряжениями вейлевскими элементами. “Тройственность” переставляет корни в схеме Дынкина следующим образом: $e_1 - e_2 \rightarrow e_3 - e_4$, $e_3 - e_4 \rightarrow e_3 + e_4$. Это дает: $e_3 \rightarrow 0.5(e_1 - e_2 + e_3 + e_4)$, $e_4 \leftarrow 0.5(-e_1 + e_2 + e_3 - e_4)$, а векторы $0.5(e_1 - e_2 + e_3 + e_4)$, $0.5(-e_1 + e_2 + e_3 - e_4)$ не входят в систему корней Σ группы Вейля. Следовательно, при $q > 3$ компенсации нет и нет графовой части в φ . Но этот случай уже разобран. Остается рассмотреть вариант при $q = 3$, где группа $L_2(q)$ разрешима.

В этом случае “тройственность” дает порядок φ , делящийся на 3. Поскольку $\text{Out} = \text{Aut} / \text{Inner} = \Sigma_4$, а элемент в Σ_4 , чей порядок делится на 3, есть в точности элемент порядка 3, то $\varphi^3 = 1$ – внутренний автоморфизм, т.е. $\varphi^3(x) = sxs^{-1}$, где $s \in O_8^+(3)$.

Имеем $T \subset \{x : \varphi^3(x) = x\} = C(s) \subset C(s^\alpha) = C(s_1) \subset N\langle s_1 \rangle$. В качестве s_1 можно взять элемент простого порядка. По C - N -конструкции никакое s не может быть сопряжено со своей степенью. По атласу [9] при нечетном порядке этого нет. Поэтому

порядок s должен быть четным, т.е. s – полупростой элемент. А как отмечалось в п. 4.1, полупростой элемент сопряжен со своим обратным. Следовательно, элемент s должен быть инволюцией для избежания противоречия.

На централизаторе $C(\sigma)$ $\varphi^3 = 1$. Поэтому на квазигруппе $C(\sigma)/T$ $L_a^3 = 1$, порядок квазигруппы $(C(\sigma) : T) \equiv 1 \pmod{3}$ и 3-часть $C(\sigma)$ содержится в T .

Поддействуем автоморфизмом φ на централизатор инволюции $(4, 4)$. Диагональная и полевая составляющие φ переводят $C(\sigma)$ в себя, а композиция графового и полевого автоморфизма переставляет множители $L_2(3)$ централизатора. Нов $L_2(3)$ есть элемент порядка 3. Поэтому он не может быть φ -неподвижным. Противоречие.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Галкин В. М. Леводистрибутивные квазигруппы конечного порядка // Квазигруппы и лупы. Кишинев, 1979.
- [2] Галкин В. М. О симметрических квазигруппах // УМН. 1984. Т. 39. №6.
- [3] Галкин В. М. Леводистрибутивные квазигруппы. Дисс. ... д.ф.-м.н. М.: МГУ, 1991.
- [4] Горенштейн Д. Конечные простые группы. М.: Мир, 1985.
- [5] Дьедонне Ж. Геометрия классических групп. М.: Мир, 1974.
- [6] Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975.
- [7] Семинар по алгебраическим группам. М.: Мир, 1973.
- [8] Thompson J. G. Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order // Proc. Nat. Amer. Sci. USA. 1959.
- [9] Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P. Atlas of Finite Groups. Oxford, 1985.
- [10] Суворова О. В. φ -структура на лиевских конечных группах. Дисс. ... к.ф.-м.н. Санкт-Петербург: С-ПбГУ, 1998.
- [11] Артин Э. Геометрическая алгебра. М.: Наука, 1969.

Нижегородский государственный технический университет

Поступило
14.03.2000