Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. О. Гринив, Я. В. Микитюк, О подобии возмущенных операторов умножения, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 1, 38–45

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm716>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 13:27:44

УДК 517.98

О ПОДОБИИ ВОЗМУЩЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ УМНОЖЕНИЯ

Р. О. Гринив, Я. В. Микитюк

Пусть S есть оператор умножения на независимую переменную x в $L_2(0, 1)$, а V – интегральный оператор вольтеррова типа. В заметке находятся достаточные условия для подобия операторов $T := S + V$ и S и обсуждаются некоторые обобщения полученных результатов в абстрактной ситуации.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Рассмотрим в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L_2(0, 1)$ оператор S умножения на независимую переменную, $(Sf)(x) = xf(x)$, и его возмущение $T := S + V$, где

$$(Vf)(x) := \int_0^x v(x, t)f(t) dt. \quad (1)$$

На протяжении всей работы предполагается, что ядро v измеримо по Лебегу на $[0, 1] \times [0, 1]$, $v(x, t) = 0$ при $x < t$ и что интегральный оператор V ограничен в $\mathcal{H}$.

Операторы такого вида возникают, например, в модели Фридрихса [1], [2] или в химии полимеров, где T описывает эволюцию системы полимеров вблизи динамического равновесия [3]. В обоих примерах существенный интерес составляет вопрос об асимптотическом поведении группы e^{itT} (в частности, ее равномерная ограниченность, или устойчивость по Ляпунову), что порождает задачу о подобии оператора T самосопряженному. Для случая, когда $v(x, t) = \varphi(x)\psi(t)$ при $0 \leq t \leq x \leq 1$ и $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$, эта задача детально исследовалась в статье [4], где установлен следующий результат.

ТЕОРЕМА А. Пусть $\varphi\psi \equiv 0$ и существуют модули непрерывности ω_1, ω_2 такие, что $\varphi \in \text{Lip}(\omega_1)$, $\psi \in \text{Lip}(\omega_2)$ и

$$\int_0^1 \frac{\omega_1(\tau)\omega_2(\tau)}{\tau} < \infty. \quad (2)$$

Тогда оператор T подобен самосопряженному.

Более того, на основании тонкого анализа поведения резольвенты оператора T вблизи вещественной оси показана точность условия (2) в том смысле, что при его нарушении оператор T уже не обязан быть подобным самосопряженному; в [4] построены соответствующие примеры для $\omega_1(\tau) = |\ln \tau|^{-\delta_1}$ и $\omega_2(\tau) = |\ln \tau|^{-\delta_2}$ с $\delta_1 + \delta_2 < 1$.

Основная цель настоящей статьи – найти условия, при которых возмущенный оператор T подобен невозмущенному оператору S . Мы рассматриваем возмущения V общего

вида (1) и применяем метод, берущий начало от Фридрихса [1]. А именно, мы находим достаточные условия для существования ограниченного оператора K со спектральным радиусом меньше 1, удовлетворяющего соотношению

$$T(I + K) = (I + K)S. \quad (3)$$

Основные результаты работы следующие.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что ядро*

$$w(x, t) := \frac{|v(x, t)|}{x - t}, \quad x, t \in [0, 1],$$

порождает ограниченный интегральный оператор со спектральным радиусом $r(W)$ меньше $1/2$. Тогда операторы T и S подобны.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть существует функция $q \in L_1(0, 1)$ такая, что $w(x, t) \leq q(x - t)$ для всех $x, t, 0 \leq t < x \leq 1$. Тогда операторы T и S подобны.*

Заметим, что в предположениях теоремы А выполняется оценка

$$\begin{aligned} |v(x, t)| &\leq |\varphi(x)\psi(t)| + |\varphi(t)\psi(x)| = (|\varphi(x)| - |\varphi(t)|)(|\psi(t)| - |\psi(x)|) \\ &\leq \omega_1(x - t)\omega_2(x - t), \end{aligned}$$

поэтому следствие 1 применимо с $q(\tau) = \omega_1(\tau)\omega_2(\tau)/\tau$, что доказывает даже более сильное утверждение о подобии T невозмущенному оператору S . Следствие 1 также применимо к ядрам v с конечной нормой

$$\|v\|_\alpha := \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t < x \leq 1} (x - t)^{1-\alpha} |v(x, t)|$$

при некотором $\alpha > 0$ (см. [5], [6] и указанную там библиографию относительно подобия вольтерровых операторов операторам дробного интегрирования). Отметим также, что, как следует из [4], условие $q \in L_1(0, 1)$ нельзя заменить более слабым.

На самом деле, при нашем подходе оператор V даже не обязан быть интегральным вида (1). Допускаются операторы V , которые мажорируются в некотором смысле и принадлежат алгебре $\mathcal{A}$ операторов, оставляющих инвариантным и подпространства функций с носителем в $[a, 1]$, $a \in [0, 1)$. Соответствующие понятия привлекают теорию неотрицательных операторов в банаховых пространствах с положительным конусом [7] и вводятся в п. 2. Абстрактные результаты о подобии операторов T и S устанавливаются в п. 3 и затем используются в п. 4 для доказательства теоремы 1 и следствия 1. В последнем пункте обсуждаются некоторые непосредственные обобщения полученных результатов.

На протяжении всей работы $r(T)$ обозначает спектральный радиус ограниченного оператора T ; напомним, что $r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}$.

2. Неотрицательные операторы и вспомогательные результаты. Прежде всего, напомним некоторые понятия теории линейных пространств с положительным конусом (см., например, [7]). Обозначим через

$$\mathcal{H}_+ = \{f \in \mathcal{H} \mid f(x) \geq 0 \text{ п.в. в } [0, 1]\}$$

и

$$\mathcal{B}_+(\mathcal{H}) = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid A\mathcal{H}_+ \subset \mathcal{H}_+\}$$

конусы неотрицательных элементов пространства $\mathcal{H}$ и неотрицательных ограниченных операторов в $\mathcal{H}$ соответственно. Как обычно, для произвольных $f, g \in \mathcal{H}$ и $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ мы пишем $f \geq g$ и $A \geq B$, если $f - g \in \mathcal{H}_+$ и $A - B \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H})$ соответственно. Напомним, что конус $\mathcal{H}_+$ является миниедральным, и поэтому для любого элемента $f \in \mathcal{H}$ существует его модуль $|f|$ из $\mathcal{H}_+$; в данном контексте $|f|$ является функцией, определенной посредством равенства $|f|(x) = |f(x)|$. Напротив, конус $\mathcal{B}_+(\mathcal{H})$ не является миниедральным, и модуль $|A|$ нельзя определить для всех $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Мы укажем класс операторов, модуль которых корректно определен.

Мы говорим, что оператор B *мажорирует* A (и пишем $B \succcurlyeq A$ или $A \preccurlyeq B$), если $|Af| \leq B|f|$ для всех $f \in \mathcal{H}$. Если $A \preccurlyeq B$, то, как легко видеть, B неотрицателен и

$$|(Af, g)| \leq (|Af|, |g|) \leq (B|f|, |g|) \leq \|B\| \|f\| \|g\|$$

при всех $f, g \in \mathcal{H}$, т.е. $\|A\| \leq \|B\|$. Более того, если B мажорирует A , то неравенства

$$|A^n f| \leq B|A^{n-1} f| \leq \dots \leq B^{n-1}|Af| \leq B^n|f| \quad \forall f \in \mathcal{H}$$

показывают, что $A^n \preccurlyeq B^n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и потому $r(A) \leq r(B)$.

Положим

$$\mathcal{M}(A) := \{B \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H}) \mid B \succcurlyeq A\}$$

и

$$\mathcal{B}_{\mathcal{M}}(\mathcal{H}) := \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid \mathcal{M}(A) \neq \emptyset\}.$$

Заметим, что $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}(\mathcal{H})$ является мультипликативным конусом в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, т.е. $AB \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}(\mathcal{H})$, как только $A, B \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}(\mathcal{H})$.

ПРИМЕР. Пусть A и B – интегральные операторы в $\mathcal{H}$ с непрерывными ядрами a и b соответственно. Тогда $B \in \mathcal{M}(A)$, если и только если $|a(x, t)| \leq b(x, t)$ везде в $[0, 1] \times [0, 1]$, а $A \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}(\mathcal{H})$ тогда и только тогда, когда ядро $|a|$ порождает ограниченный интегральный оператор в $\mathcal{H}$.

В некотором смысле предыдущий пример является общим, так как любой ограниченный оператор в $\mathcal{H}$ есть сильный предел интегральных операторов с непрерывными ядрами. В самом деле, пусть r есть гладкая неотрицательная функция, удовлетворяющая условиям $\text{supp } r \subset [0, 1]$ и $\int r = 1$. Обозначим через R_ε интегральный оператор

$$(R_\varepsilon f)(x) = \int_0^1 r_\varepsilon(x - t)f(t) dt, \quad r_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}r\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

и для любого $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $\varepsilon > 0$ положим

$$A_\varepsilon := R_\varepsilon A R_\varepsilon.$$

Заметим, что $R_\varepsilon \rightarrow I$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ сильно в $\mathcal{H}$ [8, гл. III.2], поэтому

$$s - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon = A.$$

Более того, поскольку R_ε является оператором Гильберта–Шмидта, то A_ε есть интегральный оператор с некоторым ядром a_ε (см. подробности, например, в [9]). Обозначая через $\delta_\xi(u) := \delta(u - \xi)$ дельта-функцию Дирака в точке ξ , мы видим, что

$$a_\varepsilon(x, t) = (A_\varepsilon \delta_t, \delta_x) = (AR_\varepsilon \delta_t, R_\varepsilon^* \delta_x) = (Ar_{\varepsilon, t}, \hat{r}_{\varepsilon, x}),$$

где $r_{\varepsilon, t}(u) := r_\varepsilon(u - t)$ и $\hat{r}_{\varepsilon, x}(u) := r_\varepsilon(x - u)$ являются непрерывными функциями по t и x соответственно со значениями в $\mathcal{H}$, и поэтому ядро a_ε непрерывно.

Это замечание используется существенным образом при доказательстве следующего утверждения.

ЛЕММА 1. *Для каждого $A \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}(\mathcal{H})$ множество $\mathcal{M}(A)$ содержит минимальный элемент $|A|$, называемый модулем A . Иными словами, $|A| \in \mathcal{M}(A)$ и $|A| \leq B$ для всех $B \in \mathcal{M}(A)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $A \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}(\mathcal{H})$ и $B \in \mathcal{M}(A)$ и положим $A_\varepsilon = R_\varepsilon A R_\varepsilon$, $B_\varepsilon := R_\varepsilon B R_\varepsilon$, где интегральный оператор R_ε построен выше. Тогда

$$\begin{aligned} |(A_\varepsilon f, g)| &= |(AR_\varepsilon f, R_\varepsilon^* g)| \leq (B |R_\varepsilon f|, |R_\varepsilon^* g|) \\ &\leq (BR_\varepsilon |f|, R_\varepsilon^* |g|) = (B_\varepsilon |f|, |g|) \end{aligned}$$

для всех $f, g \in \mathcal{H}$, что влечет неравенство

$$|a_\varepsilon(x, t)| \leq b_\varepsilon(x, t) \quad (4)$$

для соответствующих ядер.

Обозначим через A_ε^+ интегральный оператор, порожденный ядром $|a_\varepsilon(x, t)|$. Ввиду неравенства (4) оператор A_ε^+ ограничен, $A_\varepsilon^+ \leq B_\varepsilon$ и $\|A_\varepsilon^+\| \leq \|B_\varepsilon\|$. Более того, по построению $A_\varepsilon^+ \succcurlyeq A_\varepsilon$ при всех $\varepsilon > 0$. Поскольку $B_\varepsilon \rightarrow B$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ сильно, нормы $\|A_\varepsilon^+\|$ равномерно ограничены по $\varepsilon > 0$ и множество $\{A_\varepsilon^+\}_{\varepsilon > 0}$ слабо компактно в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Поэтому существуют последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$ и оператор A_0^+ такие, что $A_{\varepsilon_n}^+ \rightarrow A_0^+$ при $n \rightarrow \infty$ слабо. Переходя к пределу при $\varepsilon_n \rightarrow 0$ в неравенствах $A_\varepsilon^+ \leq B_\varepsilon$ и $A_\varepsilon^+ \succcurlyeq A_\varepsilon$, мы заключаем, что $A_0^+ \leq B$ и $A_0^+ \succcurlyeq A$. Так как $B \in \mathcal{M}(A)$ был произвольным, последние соотношения доказывают, что A_0^+ является слабым пределом A_ε^+ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и что A_0^+ и есть искомый модуль $|A|$ оператора A .

Пусть χ_a обозначает оператор умножения на индикатор интервала $[a, 1]$ и

$$\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid A\chi_a = \chi_a A\chi_a \quad \forall a \in [0, 1]\}.$$

Ясно, что $\mathcal{A}$ есть слабо замкнутая подалгебра $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Положим

$$\mathcal{A}_+ := \mathcal{A} \cap \mathcal{B}_+(\mathcal{H})$$

и заметим, что $|A| \in \mathcal{A}_+$ для всех $A \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{A}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Предположим, что $A \in \mathcal{A}_+$ и $A_\varepsilon = R_\varepsilon A R_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Тогда A_ε есть интегральный оператор с непрерывным ядром $a_\varepsilon(x, t)$, причем $a_\varepsilon(x, t) = 0$ при $t > x$. Поэтому A_ε является вольтерровым оператором (см., например, [10, п. 68]) и A является сильным пределом вольтерровых операторов.

Это замечание влечет следующий результат.

ЛЕММА 2. Пусть $A \in \mathcal{A}_+$; тогда $[S, A] := SA - AS$ принадлежит $\mathcal{A}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что $[S, A_\varepsilon]$ является интегральным оператором с неотрицательным ядром $(x - t)a_\varepsilon(x, t)$ и поэтому принадлежит $\mathcal{A}_+$.

3. Подобие операторов S и T . В этом пункте мы изучим вопрос о существовании оператора $K \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, удовлетворяющего уравнению (3). Полагая $[S, K] := SK - KS$, запишем (3) в виде уравнения

$$[S, K] + VK + V = 0$$

и решим последнее методом последовательных приближений, восходящим к Фридрихсу [1, гл. II.6].

ЛЕММА 3. Предположим, что $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{A}$ и $[S, W] \in \mathcal{M}(V)$ для некоторого оператора $W \in \mathcal{A}_+$. Тогда уравнение

$$[S, K] = V$$

имеет решение $K \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{A}$ такое, что $K \preceq W$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $[S, W] \succcurlyeq V$, при всех $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство $R_\varepsilon[S, W]R_\varepsilon \succcurlyeq R_\varepsilon V R_\varepsilon =: V_\varepsilon$. Ввиду леммы 2 $R_\varepsilon S \leq S R_\varepsilon$, а следовательно,

$$R_\varepsilon[S, W]R_\varepsilon = R_\varepsilon S W R_\varepsilon - R_\varepsilon W S R_\varepsilon \leq S W_\varepsilon - W_\varepsilon S = [S, W_\varepsilon]$$

и $[S, W_\varepsilon] \succcurlyeq V_\varepsilon$, где $W_\varepsilon = R_\varepsilon W R_\varepsilon$. Отсюда следует, что ядра v_ε и w_ε операторов V_ε и W_ε удовлетворяют неравенству

$$\left| \frac{v_\varepsilon(x, t)}{x - t} \right| \leq w_\varepsilon(x, t);$$

в частности, $V_\varepsilon \in \mathcal{A}$. Обозначим через $K^{(\varepsilon)}$ интегральный оператор, порожденный ядром $v_\varepsilon(x, t)/(x - t)$. Ввиду последнего неравенства $K^{(\varepsilon)}$ является ограниченным оператором, принадлежащим алгебре $\mathcal{A}$, $K^{(\varepsilon)} \preceq W_\varepsilon$ и $[S, K^{(\varepsilon)}] = V_\varepsilon$. Поэтому нормы $\|K^{(\varepsilon)}\|$ равномерно ограничены по $\varepsilon > 0$ и существует ограниченный оператор K и последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$ такая, что при $n \rightarrow \infty$ $K^{(\varepsilon_n)}$ слабо сходятся к K . Переходя к пределу при $\varepsilon_n \rightarrow 0$ в соотношениях

$$SK^{(\varepsilon)} - K^{(\varepsilon)}S = V_\varepsilon, \quad K^{(\varepsilon)} \preceq W_\varepsilon,$$

мы убеждаемся в том, что K есть решение уравнения $[S, K] = V$ и удовлетворяет неравенству $K \preceq W$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Предположим, что $U, V \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{A}$ и $[S, W] \in \mathcal{M}(V)$ для некоторого $W \in \mathcal{A}_+$. Тогда уравнение*

$$[S, K] = VU$$

обладает решением $K \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{A}$ таким, что $K \preceq W|U|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $[S, W|U|] = [S, W]|U| + W[S, |U|] \geq [S, W]|U| \succcurlyeq VU$ благодаря лемме 2 и предположениям следствия, лемма 3 применима с $W|U|$ и VU вместо W и V и утверждение доказано.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что $V \in \mathcal{A}$ и что существует оператор $W \in \mathcal{A}_+$ такой, что $r(W) < 1$ и $[S, W] \succcurlyeq V$. Тогда уравнение*

$$[S, K] + VK + V = 0 \quad (5)$$

имеет решение $K \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем искать K в виде

$$K = \sum_{k=1}^{\infty} K_n,$$

где K_n находятся рекуррентно из соотношений

$$[S, K_n] = -VK_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

а $K_0 := I$. Используя лемму 3 и следствие 2, мы находим последовательно $K_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$, такие, что $K_n \preceq W|K_{n-1}| \preceq W^n$. Поэтому $\|K_n\| \leq \|W^n\|$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} K_n$ сходится абсолютно в равномерной операторной топологии, а его сумма K удовлетворяет равенству

$$[S, K] = \sum_{n=1}^{\infty} [S, K_n] = - \sum_{n=1}^{\infty} VK_{n-1} = -VK - V.$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Если в предположениях теоремы 2 $r(W) < 1/2$, то уравнение (5) имеет решение $K \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{A}$ с $r(K) < 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что решение K , построенное при доказательстве теоремы 2, удовлетворяет неравенству $K \preceq W(I - W)^{-1}$. Поэтому $r(K) \leq r(W(I - W)^{-1})$ и остается отметить, что $r(W(I - W)^{-1}) < 1$ при $r(W) < 1/2$.

4. Доказательство основных результатов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Для доказательства теоремы достаточно заметить, что предположения теоремы 2 и следствия 3 удовлетворены для интегрального оператора W с ядром

$$w(x, t) := \frac{|v(x, t)|}{x - t}.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть w есть положительное ядро на $[0, 1] \times [0, 1]$ такое, что $w(x, t) = 0$ при $t > x$ и $w(x, t) \leq q(x - t)$ при $x \geq t$, где $q \in L_1(0, 1)$. Тогда порождаемый интегральный оператор W является вольтерровым в $\mathcal{H}$ (т.е. W компактен и $r(W) = 0$) и $\|W\| \leq \|q\|_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что W ограничен в $\mathcal{H}$. В самом деле,

$$\begin{aligned} \int_0^x w(x, t) dt &\leq \int_0^x q(x - t) dt = \int_0^x q(t) dt \leq \|q\|_1, \\ \int_t^1 w(x, t) dx &\leq \int_t^1 q(x - t) dx = \int_0^{1-t} q(x) dx \leq \|q\|_1, \end{aligned}$$

поэтому $\|W\| \leq \|q\|_1$ благодаря тесту Шура [9, теорема 5.2]. Далее, положим

$$w^{(m)} = \begin{cases} w(x, t), & \text{если } q(x - t) \leq m, \\ 0, & \text{если } q(x - t) > m. \end{cases}$$

Тогда порождаемый интегральный оператор $W^{(m)}$ является вольтерровым в $\mathcal{H}$ (см., например, [10, п. 68]) и

$$\|W - W^{(m)}\| \leq \int_{q>m} q(t) dt \rightarrow 0$$

при $m \rightarrow \infty$ ввиду вышеприведенных рассуждений и того, что $q \in L_1(0, 1)$. Следовательно, W также вольтерров и теорема доказана.

Следствие 1 теперь легко выводится из теорем 1 и 3.

5. Некоторые обобщения. В этом пункте мы обсудим некоторые непосредственные обобщения основных результатов. Заметим сначала, что рассуждения пунктов 2 и 3 остаются справедливыми для банаховых пространств $L_p(a, b)$ с произвольными $-\infty \leq a < b \leq \infty$ и $p \in [1, \infty)$. Далее, можно заменить S оператором умножения на произвольную возрастающую функцию $\varphi(x)$. Аналог теоремы 1 и следствия 1 формулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА 1'. Предположим, что φ строго возрастает на (a, b) и что ядро

$$w(x, t) := \left| \frac{v(x, t)}{\varphi(x) - \varphi(t)} \right|$$

порождает ограниченный интегральный оператор в $L_p(a, b)$ со спектральным радиусом меньше $1/2$. Тогда операторы S умножения на φ и $T := S + V$, где

$$(Vf)(x) := \int_a^x v(x, t)f(t) dt,$$

подобны в $L_p(a, b)$. В частности, S и T подобны, если $w(x, t) \leq q(x - t)$ для некоторой $q \in L_1(a, b)$.

Отметим также, что большинство результатов остаются в силе для произвольной банаховой решетки $\mathcal{X}$ функций на (a, b) [11] при условии, что тождественный оператор в $\mathcal{X}$ есть сильный предел интегральных операторов с непрерывными ядрами.

ЗАМЕЧАНИЕ. После того как настоящая статья была завершена, М. М. Маламуд обратил наше внимание на его заметку [12], где были анонсированы без доказательства утверждения теоремы 1 в предположении $r(W) = 0$ и следствия 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Фридрихс К. Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1969.
- [2] Фаддеев Л. Д. О модели Фридрихса в теории возмущения непрерывного спектра // Тр. МИАН. 1964. Т. 73. С. 292–313.
- [3] Kokholm N. J. Spectral analysis of perturbed multiplication operators occurring in polymerisation chemistry // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. 1989. V. 113. № 1–2. P. 119–148.
- [4] Naboko S. N., Tretter C. Lyapunov stability of a perturbed multiplication operator // Contributions to Operator Theory in Spaces with an Indefinite Metric. The Heinz Langer Anniversary Volume on the Occasion of his 60th Birthday. Oper. Theory Adv. Appl. V. 106. Basel: Birkhäuser, 1998. P. 309–326.
- [5] Freeman J. M. Volterra operators similar to $J: f(x) \mapsto \int_0^x f(y) dy$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. V. 116. P. 181–192.
- [6] Маламуд М. М. Подобие операторов Вольтерра и связанные вопросы теории дифференциальных уравнений дробного порядка // Тр. ММО. 1994. Т. 55. С. 73–148.
- [7] Крейн М. Г., Рутман М. А. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // УМН. 1948. Т. 3. № 1 (23). С. 3–95.
- [8] Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
- [9] Халмош П., Сандер В. Ограниченные интегральные операторы в пространствах L^2 . М.: Наука, 1985.
- [10] Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
- [11] Schaefer H. H. Banach Lattices and Positive Operators. Berlin: Springer, 1974.
- [12] Маламуд М. М. О приведении операторов с непрерывным спектром к диагональному виду // УМН. 1977. Т. 32. № 5. С. 167.

(Р. О. Гринив) Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я. С. Пидстрыгача НАН Украины
(Я. В. Микитюк) Львовский национальный университет им. И. Франко
E-mail: hryniv@mebm.lviv.ua, yamykytyuk@yahoo.com

Поступило
10.10.2000