Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Кановой, Нестандартная теория множеств в $\in$ -языке,
Матем. заметки, 2001, том 70, выпуск 1, 46–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm717>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 16:25:31

УДК 510.223

НЕСТАНДАРТНАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ В ϵ -ЯЗЫКЕ

В. Г. Кановей

Предлагается достаточно удобная и пригодная для развития нестандартного анализа теория множеств в стандартном ϵ -языке.

Библиография: 5 названий.

Нестандартные теории множеств составляют одну из двух известных систем оснований нестандартного анализа. (Вторая состоит в использовании нестандартных расширений математических структур в “стандартном” универсуме **ZFC**.) Типичная нестандартная теория множеств (например, теория внутренних множеств **IST** Нельсона [1], см. также [2]–[5]) организует универсум множеств таким образом, что объекты обычной математики, называемые *стандартными*, сосуществуют и взаимодействуют с *нестандартными* объектами (например, бесконечно малыми числами). При этом класс $\mathbb{S}$ всех стандартных множеств выделяется при помощи неопределяемого *предиката стандартности* $st\ x$ (читается: x стандартно). Иными словами, такие нестандартные теории множеств формулируются в *st- ϵ -языке*, содержащем st и ϵ в качестве атомарных предикатов.

В настоящей заметке мы предлагаем теорию множеств в ϵ -языке, достаточно сильную для формализации нестандартного анализа. Она названа *упрощенной теорией Хрбачека*, или **SHST**. Говоря кратко, **SHST** – это теория ϵ -структуры универсума **HST**, в котором верны аксиомы **HST** (нестандартной теории множеств Хрбачека, использующей st в языке, см. ниже). Теория **SHST** доказывает существование насыщенных элементарных расширений. Другим свойством **SHST** является существование (булевозначной) интерпретации в **ZFC** такой, что класс всех стандартных множеств интерпретации изоморфен универсуму **ZFC**. В частности, **SHST** и **ZFC** равнонепротиворечивы, и любая теорема **SHST** о стандартных множествах является теоремой **ZFC** (о всех множествах).

Главной идеей, на которой основано построение аксиоматической системы **SHST**, является то, что класс $\mathbb{S}$ (сам по себе вряд ли ϵ -определимый в **HST**) имеет ϵ -определимую изоморфную копию: класс $\mathbb{V}$ всех фундированных множеств (наблюдение Кавая [4]). Это позволяет заменить $\mathbb{S}$ как “стандартный” универсум на $\mathbb{V}$ и использовать очевидную ϵ -определимость $\mathbb{V}$. Класс $\mathbb{I}$ *внутренних* множеств (элементарное расширение $\mathbb{S}$) также допускает ϵ -определение.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00045, фонда DFG, грант № 436-RUS-17/66/97, а также Университета г. Вупперталь.

1. Теория Хрбачека. Эта теория была введена Хрбачеком [2]. Улучшенная версия представлена в деталях в [3], однако для удобства мы включаем список аксиом **HST** с краткими комментариями. Напомним, что **HST** – теория в $st\text{-}\in$ -языке; $st\ x$ означает: x стандартно, а $\mathbb{S} = \{x : st\ x\}$ обозначает класс всех стандартных множеств. Элементы стандартных множеств называются *внутренними* множествами, $\text{int } x$ есть формула $\exists^{st} y (x \in y)$ (x внутреннее), а $\mathbb{I} = \{x : \text{int } x\}$ – класс всех внутренних множеств. Кванторы $\exists^{st}$ и $\forall^{int}$ ниже имеют очевидный смысл: “существует стандартное” и “для всякого внутреннего”.

Аксиомы для универсума – все аксиомы **ZFC**, кроме аксиом регулярности, степени и выбора. Схемы выделения и подстановки формулируются в $st\text{-}\in$ -языке.

Транзитивность $\mathbb{I}$. $\forall^{int} x \forall y \in x (\text{int } y)$.

Регулярность над $\mathbb{I}$. $\forall X \neq \emptyset \exists x \in X (x \cap X \subseteq \mathbb{I})$.

ZFCst. Все формулы вида Φ^{st} (Φ релятивизованная к $\mathbb{S}$), где Φ – аксиома **ZFC**.

Перенос. Все предложения вида $\Phi^{st} \iff \Phi^{int}$, где Φ – замкнутая $\in$ -формула со стандартными параметрами.

Стандартизация. $\forall X \exists^{st} Y (X \cap \mathbb{S} = Y \cap \mathbb{S})$ (ко всякому X найдется стандартное Y , содержащее те же самые стандартные элементы).

Этих аксиом достаточно, чтобы определить класс $\mathbb{V}$ всех фундированных множеств (т.е. элементов транзитивных множеств X таких, что $\in \restriction X$ фундировано) и $\in$ -изоморфизм $x \mapsto *x$: $\mathbb{V}$ на $\mathbb{S}$ ($*x$ определяется как единственное стандартное множество u , содержащее все множества вида $*y$, $y \in x$, и больше никаких стандартных элементов). Следовательно, $\mathbb{V}$ – транзитивный класс, интерпретирующий **ZFC** и замкнутый относительно взятия подмножеств. Более того, $x \mapsto *x$ – элементарное вложение (в $\in$ -языке) $\mathbb{V}$ в $\mathbb{I}$ по переносу (см. [3, раздел 1]).

В **HST** *кардиналы, ординалы, натуральные числа* являются $\mathbb{V}$ -понятиями, так что натуральное число понимается как множество $n \in \mathbb{V}$, которое является натуральным числом в $\mathbb{V}$ (кратко, $\mathbb{V}$ -натуральным числом). Через ω обозначается множество всех натуральных чисел.

Множества, равномошны $n = \{0, 1, \dots, n - 1\}$, где $n \in \omega$, называются *конечными*. Множества, равномошны некоторому $x \in \mathbb{V}$, называются *множествами стандартного размера* или, кратко, *CP-множествами*.

Сформулируем две последние существенные аксиомы **HST**.

НАСЫЩЕННОСТЬ $\mathbb{I}$. Если $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{I}$ – CP-множество и $\bigcap \mathcal{X}' \neq \emptyset$ для любого *конечного* $\mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X}$ (свойство конечных пересечений), то $\bigcap \mathcal{X}' \neq \emptyset$.

CP-ВЫБОР. Справедлива аксиома выбора для случая, когда функция выбора должна быть определена на CP-семействе (непустых) множеств.

Насыщенность позволяет получать разнообразные нестандартные множества. Аксиома CP-выбора частично компенсирует отсутствие полной аксиомы выбора, которая, как и аксиомы степени и регулярности, противоречит **HST**.

ТЕОРЕМА 1 (см. [3]). *Теории **HST** и **ZFC** равнонепротиворечивы. Более того, **HST** имеет булевозначную интерпретацию в **ZFC**, класс $\mathbb{S}$ которой доказуемо $\in$ -изоморфен базовому универсуму **ZFC**. Следовательно, если **HST** доказывает,*

что замкнутая $\in$ -формула Φ истинна в $\mathbb{V}$ (или, что равносильно, в $\mathbb{S}$), то Φ – теорема **ZFC**.

Неожиданно оказывается, что класс $\mathbb{I}$ прямо $\in$ -определим в **HST**. Скажем, что множество x *квази-внутреннее*, когда существует ω -последовательность $\{x_n\}_{n \in \omega}$ такая, что $x \in x_{n+1} \in x_n$ для всех $n \in \omega$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (HST). *Классы внутренних и квази-внутренних множеств совпадают.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО [3]. Пусть $x \in \mathbb{I}$. Рассуждая в универсуме $\mathbb{I}$, определим индукцией по $k \in {}^*\omega$ $y_k = y_{k-1} \cup \{y_{k-1}\}$, начиная с $y_0 = x$. Выберем произвольно $\nu \in {}^*\omega \setminus \omega$ и положим $x_n = y_{\nu-n}$ для всех $n \in \omega$.

Обратная импликация легко следует из регулярности над $\mathbb{I}$.

2. Упрощенная теория Хрбачека. Теория **SHST** включает следующие группы аксиом (i)–(iv).

- (i) Подобно **HST** все аксиомы **ZFC**, кроме аксиом регулярности, степени и выбора. (Выделение и подстановка в $\text{st-}\in$ -языке.)

Этого достаточно, чтобы ввести класс $\mathbb{V}$ всех фундированных множеств и доказать его транзитивность.

- (ii) Все формулы вида Φ^{wf} (Φ релятивизованная к $\mathbb{V} = \{x : \text{wf } x\}$), где Φ – аксиома **ZFC**, а $\text{wf } x$ говорит: “ x фундировано”.

Далее, пусть ${}^q\mathbb{I}$ обозначает в $\in$ -языке класс всех квази-внутренних множеств (см. выше). Мы добавляем

- (iii) аксиомы транзитивности класса ${}^q\mathbb{I}$, регулярности над ${}^q\mathbb{I}$, насыщенности ${}^q\mathbb{I}$ и СР-выбора – как в теории **HST**, но для ${}^q\mathbb{I}$.

Что касается переноса, то непосредственно взять его формулировку из **HST** нельзя: **SHST** не обеспечивает никакого подходящего вложения $\mathbb{V}$ в ${}^q\mathbb{I}$. Однако, следующая формулировка достаточно приемлема.

- (iv) **УПРОЩЕННЫЙ ПЕРЕНОС.** Все формулы вида $\Phi^{\text{wf}} \iff \Phi^{q\text{-int}}$, где Φ – замкнутая $\in$ -формула с параметрами из ω . (Вряд ли можно вовлечь больше параметров – дело в том, что $\mathbb{V} \cap \mathbb{I} = H\omega$ (наследственно конечные множества) в **HST**, но параметры из $H\omega$ сводятся к ω .)

(Здесь $q\text{-int}$ означает релятивизацию к ${}^q\mathbb{I}$.) Эта аксиома нуждается в комментарии, так как сразу неясно, что $\omega \subseteq {}^q\mathbb{I}$. Сценарий состоит в том, что сначала упрощенный перенос принимается в беспараметрической версии, откуда легко следует, что ${}^q\mathbb{I}$ – транзитивная $\in$ -модель **ZFC**, значит, $\omega \subseteq {}^q\mathbb{I}$. Теперь принимаем упрощенный перенос полностью.

Заметим, что **SHST** – подтеория $\in$ -части **HST**. (Чтобы доказать упрощенный перенос в **HST**, мы проверяем в **HST**, что $*x = x$ для всех $x \in \omega$ индукцией по x ; тогда $\Phi^{\text{wf}} \iff \Phi^{\text{int}}$, ибо $x \mapsto *x$ есть элементарное вложение $\mathbb{V}$ в $\mathbb{I}$.) Таким образом, **SHST** удовлетворяет теореме 1. Следующая лемма показывает, что **SHST** обеспечивает существование элементарных расширений.

ЛЕММА 1 (SHST). *Для всякого транзитивного $X \in \mathbb{V}$ имеется транзитивное $*X \in {}^q\mathbb{I}$ и элементарное вложение $\langle X; \in \rangle$ в $\langle *X; \in \rangle$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перенос и насыщенность **SHST** дают транзитивное множество $*X \in {}^q\mathbb{I}$ такое, что структуры $\langle X; \in \rangle$ и $\langle *X; \in \rangle$ элементарно эквивалентны. Построим элементарное вложение $\langle X; \in \rangle$ в $\langle *X; \in \rangle$.

По выбору $*X$ и насыщенности ${}^q\mathbb{I}$ если $n \in \omega$, то ко всякому кортежу $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in X^n$ имеется кортеж $\langle r_1, \dots, r_n \rangle \in *X^n$ такой, что

- (А) для любой $\in$ -формулы (в этом доказательстве *формулы* понимаются как кортежи определенного вида) $A(\cdot, \dots, \cdot)$, $A(x_1, \dots, x_n)$ истинно в $\langle X; \in \rangle$ тогда и только тогда, когда $A(r_1, \dots, r_n)$ истинно в $\langle *X; \in \rangle$.

Согласно аксиоме СР-выбора имеется взаимно-однозначное сохраняющее длину кортежей отображение $f: X^{<\omega} \rightarrow (*X)^{<\omega}$ такое, что (А) выполнено для $\langle x'_1, \dots, x'_n \rangle = f(\langle x_1, \dots, x_n \rangle)$, каков бы ни был кортеж $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in X^{<\omega}$. Понятно, что $f(\langle x \rangle) = \langle \phi(x) \rangle$, где $\phi: X \rightarrow *X$ есть взаимно-однозначная функция.

Если $D \subseteq X$ конечно, а F – конечное множество $\in$ -формул, то пусть $\Pi_{DF} \in {}^q\mathbb{I}$ есть множество всех взаимно-однозначных отображений $\pi \in {}^q\mathbb{I}$, $\pi: *X$ на $*X$ таких, что для любой $\in$ -формулы $A(v_1, \dots, v_n) \in F$ и всех $x_1, \dots, x_n \in D$ имеет место

- (Б) в $*X$ истинно, что $A(\pi(\phi(x_1)), \dots, \pi(\phi(x_n))) \iff A(r_1, \dots, r_n)$, где $\langle r_1, \dots, r_n \rangle = f(\langle x_1, \dots, x_n \rangle)$.

Заметим, что множества Π_{DF} непусты по выбору $*X$ и f . (Например, если F содержит всего одну формулу A , просто возьмем биекцию $\pi: *X$ на $*X$ такую, что $\pi(\phi(x_i)) = r_i$ для всех i .) Кроме того, семейство всех множеств Π_{DF} имеет стандартный размер и свойство конечных пересечений. (В самом деле, $\Pi_{D_1 F_1} \cap \Pi_{D_2 F_2} \supseteq \Pi_{D_1 \cup D_2, F_1 \cup F_2}$.) Значит, существует взаимно-однозначное отображение $\pi \in {}^q\mathbb{I}$, $\pi: *X \rightarrow *X$, принадлежащее каждому из наших множеств Π_{DF} , так что (Б) выполнено для всех $x_1, \dots, x_n \in X^{<\omega}$ и всех $\in$ -формул A . Отсюда легко следует, что $p(x) = \pi(\phi(x))$ – элементарное вложение $\langle X; \in \rangle$ в $\langle *X; \in \rangle$.

3. Развитие нестандартного анализа в SHST. Неформально, класс $\mathbb{V}$ всех фундированных множеств отождествляется со “стандартным” математическим универсумом. Тогда, поскольку **SHST** удовлетворяет теореме 1 (как подтеория **HST**), универсум **SHST** можно рассматривать как вполне корректно определенное расширение “истинного” универсума $\mathbb{V}$ – подобно тому, как $\mathbb{C}$ есть расширение $\mathbb{R}$. Следовательно, **SHST** – не просто синтаксический инструмент: мы имеем полную интерпретацию в **ZFC**.

Как известно, множество $X = V_{\omega+\omega}$, определенное в $\mathbb{V}$, достаточно для построения почти всех математических структур в $\mathbb{V}$. В частности, множества $\mathbb{N} = \omega$ (натуральные числа) и $\mathbb{R}$ принадлежат $\mathbb{V}$.

Лемма 1 приносит транзитивное множество $*X = *V_{\omega+\omega} \in {}^q\mathbb{I}$ и элементарное вложение $x \mapsto *x$ структуры $\langle V_{\omega+\omega}; \in \rangle$ в $\langle *V_{\omega+\omega}; \in \rangle$. (Заметим, что $*V_{\omega+\omega}$ есть ${}^q\mathbb{I}$ -аналог $V_{\omega+\omega}$: фактически, $*V_{\omega+\omega} = V_{*\omega+*\omega}$ в ${}^q\mathbb{I}$.) Легко видеть, что $*n = n \in {}^*\mathbb{N}$ для любого $n \in \mathbb{N}$ (например, индукцией по n), так что $\mathbb{N}$ – начальный сегмент ${}^*\mathbb{N}$. Более того, ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ непусто благодаря насыщенности, примененной к семейству множеств $S_n = \{k \in {}^*\mathbb{N} : k > n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Элементы ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ – это в точности ${}^q\mathbb{I}$ -натуральные числа, которые можно назвать, как обычно, *гипернатуральными*. Числа в ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ называются *бесконечно большими*.

Что касается вещественных чисел (опять в смысле $\mathbb{V}$), мы имеем $\mathbb{R} \in V_{\omega+\omega}$ и $\mathbb{R} \subseteq V_{\omega+\omega}$ в $\mathbb{V}$, значит, $*\mathbb{R} \in *V_{\omega+\omega}$ в ${}^q\mathbb{I}$, а $*x \in *\mathbb{R}$ определено для всех $x \in \mathbb{R}$. Элементы $*\mathbb{R}$, т.е.

${}^q\mathbb{I}$ -вещественные числа, можно назвать *гипервещественными*. Теперь можно ввести обычным образом понятия *бесконечно больших*, *бесконечно малых*, *ограниченных* гипервещественных чисел и отношение $\approx$ *бесконечной близости*.

ЛЕММА 2. Если $x \in {}^*\mathbb{R}$ ограничено, то $x \approx {}^*z$ для некоторого $z \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что множества $A = \{y \in \mathbb{R} : {}^*y \leq x\}$ и $B = \{y \in \mathbb{R} : {}^*y > x\}$ непусты благодаря ограниченности x . Эти множества принадлежат $\mathbb{V}$, поскольку этот класс замкнут относительно образования подмножеств. Рассуждая в $\mathbb{V}$, мы находим число z , являющееся либо наибольшим в A , либо наименьшим в B .

Это простое рассуждение демонстрирует возможности **SHST**. Что касается таких более сложных примеров, как мера Лёба и “гиперконечная” дескриптивная теория множеств, мы сошлемся на [3, 2.2 и 2.3], где показано, как проводить типичные “нестандартные” выкладки в рамках похожих систем.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Nelson E. Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. V. 83. P. 1165–1198.
- [2] Hrbáček K. Axiomatic foundations for nonstandard analysis // Fund. Math. 1978. V. 98. P. 1–19.
- [3] Kanovei V., Reeken M. Mathematics in a nonstandard world // Math. Japonica. 1997. V. 45. № 2. P. 369–408; № 3. P. 555–571.
- [4] Kawai T. Nonstandard analysis by axiomatic methods // Southeast Asia Conference on Logic (Singapore 1981). Studies in Logic and Foundations of Math. V. 111. Amsterdam: North-Holland, 1983. P. 55–76.
- [5] Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Нестандартные методы анализа. Новосибирск: Наука, 1990.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: kanovei@mech.math.msu.su

Поступило
16.09.1998