Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Круглов, О необходимости условия Линдеберга для нормальной сходимости мартингалов, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 1, 51–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm718>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 13:43:45

УДК 519.2

О НЕОБХОДИМОСТИ УСЛОВИЯ ЛИНДЕБЕРГА ДЛЯ НОРМАЛЬНОЙ СХОДИМОСТИ МАРТИНГАЛОВ

В. М. Круглов

Приведены условия на квадратично интегрируемые мартингалы, следствием которых является “условное” условие Линдеберга.

Библиография: 3 названия.

Ряд специалистов отметили (см. [1, с. 580], а также [2] и указанную там литературу), что условия (1) и “условное” условие Линдеберга (5) достаточны для справедливости (4). Другими словами, для квадратично интегрируемых мартингалов справедлив аналог теоремы Линдеберга–Феллера для сумм независимых случайных величин в части достаточности. Является ли (5) следствием (1) и (4)? В статье [2] дается утвердительный ответ при дополнительных условиях на мартингалы. Приводимая ниже теорема содержит новые условия, следствием которых является “условное” условие Линдеберга.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ определена последовательность квадратично интегрируемых мартингалов $\{S_{n,k}, \mathcal{F}_{n,k}\}_{k=0}^{k_n}$, $S_{n,0} = 0$, $n = 1, 2, \dots$. Обозначим

$$F_{n,k}(x) = P\{X_{n,k} < x | \mathcal{F}_{n,k-1}\}, \quad \Delta_{n,k} = E(X_{n,k}^2 | \mathcal{F}_{n,k-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_{n,k}(x)$$

регулярную условную функцию распределения и условную дисперсию разности $X_{n,k} = S_{n,k} - S_{n,k-1}$ относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_{n,k-1}$, $k = 1, \dots, k_n$, $n = 1, 2, \dots$. В формулировке теоремы и ее доказательстве буква W , стоящая перед знаком предела, означает, что речь идет о слабой сходимости.

ТЕОРЕМА. Если выполнены условия

$$W - \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq k_n} \Delta_{n,k} = 0, \quad W - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} \Delta_{n,k} = 1, \quad (1)$$

$$W - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} E(X_{n,k}^3 | \mathcal{F}_{n,k-1}) = 0, \quad (2)$$

$$\sup_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{k_n} E|X_{n,k}|^{3+\delta} = M < \infty \quad (3)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 99-01-00846 и № 99-01-00847, а также фонда INTAS, грант № 99-01317.

для некоторого $\delta > 0$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{S_{n,k_n} < x\} = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du \quad \forall x \in \mathbb{R}^1, \quad (4)$$

то выполняется “условное” условие Линдеберга

$$W - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x| > \varepsilon} x^2 dF_{n,k}(x) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала мы докажем теорему при следующих дополнительных условиях: существуют положительное число Λ и последовательность положительных чисел $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$, сходящаяся к нулю, такие, что

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{k_n} \Delta_{n,k} \leq \Lambda, \quad \max_{1 \leq k \leq k_n} \Delta_{n,k} \leq \lambda_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Неравенства и равенства с участием случайных величин в (6) и далее понимаются как неравенства и равенства, выполняющиеся P -почти всюду. Обозначим

$$\begin{aligned} f_{n,k}(t) &= E(\exp\{itX_{n,k}\} | \mathcal{F}_{n,k-1}), \quad f_n(t) = \prod_{k=1}^{k_n} f_{n,k}(t), \quad t \in \mathbb{R}^1, \\ \beta_{n,k} &= f_{n,k}(t) - 1 = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx) dF_{n,k}(x), \\ g_{n,k}(t) &= e^{\beta_{n,k}}, \quad g_n(t) = \prod_{k=1}^{k_n} e^{\beta_{n,k}} = \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx)x^{-2} dK_n(x)\right), \\ K_n(x) &= \sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^x u^2 dF_{n,k}(u). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались свойством мартингала:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dF_{n,k}(x) = E(X_{n,k} | \mathcal{F}_{n,k-1}) = 0.$$

В силу неравенства $|e^{i\alpha} - 1 - i\alpha| \leq \alpha^2/2$, $\alpha \in \mathbb{R}^1$, и условий (6) мы имеем

$$|\beta_{n,k}| \leq \frac{t^2}{2} \lambda_n, \quad \sum_{k=1}^{k_n} |\beta_{n,k}| \leq \frac{t^2}{2} \Lambda, \quad |\ln g_n(t)| \leq \frac{t^2}{2} \Lambda.$$

Поэтому найдется $v > 0$ такое, что

$$\max_{1 \leq k \leq k_n} |\beta_{n,k}| < \frac{1}{2} < |g_n(t)|$$

для всех $t \in [-v, v]$ и всех $n = 1, 2, \dots$. На основании неравенств

$$\left| \prod_{k=1}^n \alpha_k - \prod_{k=1}^n \beta_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |\alpha_k - \beta_k|, \quad |e^\alpha - 1 - \alpha| \leq |\alpha|^2,$$

справедливых для комплексных чисел $|\alpha_k| \leq 1$, $|\beta_k| \leq 1$, $|\alpha| \leq 1/2$, мы заключаем, что

$$\begin{aligned} |g_n(t) - f_n(t)| &= \left| \prod_{k=1}^{k_n} e^{\beta_{n,k}} - \prod_{k=1}^{k_n} f_{n,k}(t) \right| \leq \sum_{k=1}^{k_n} |e^{\beta_{n,k}} - f_{n,k}(t)| \\ &= \sum_{k=1}^{k_n} |e^{\beta_{n,k}} - 1 - \beta_{n,k}| \leq \sum_{k=1}^{k_n} |\beta_{n,k}|^2 \leq \max_{1 \leq k \leq k_n} |\beta_{n,k}| \sum_{k=1}^{k_n} |\beta_{n,k}| \leq \frac{t^4}{4} \Lambda \lambda_n. \end{aligned}$$

Из приведенных оценок следует, что найдется u , $0 < u \leq \min\{1, 1/\Lambda, v\}$, такое, что $|f_n(t)| > 1/4$ для всех $t \in [-u, u]$ и всех $n = 1, 2, \dots$. В силу неравенства

$$\begin{aligned} &\left| g_n(t) \exp\left(\frac{t^2}{2} \Delta_n\right) - f_n(t) \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \right| \\ &\leq |g_n(t) - f_n(t)| \exp\left(\frac{t^2}{2} \Delta_n\right) + \left| \exp\left(\frac{t^2}{2} \Delta_n\right) - \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \right| \end{aligned}$$

и теоремы Лебега об ограниченной сходимости мы имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left| g_n(t) \exp\left(\frac{t^2}{2} \Delta_n\right) - f_n(t) \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \right| = 0.$$

Привлекая соотношения

$$\begin{aligned} &\left| \exp(itS_{k_n}) g_n^{-1}(t) \exp\left(-\frac{t^2}{2} \Delta_n\right) - \exp(itS_{k_n}) f_n^{-1}(t) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \right| \\ &= \frac{|g_n(t) \exp(\frac{t^2}{2} \Delta_n) - f_n(t) \exp(\frac{t^2}{2})|}{|g_n(t) f_n(t)|} \leq 8 \left| g_n(t) \exp\left(\frac{t^2}{2} \Delta_n\right) - f_n(t) \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \right|, \\ &g_n(t) \exp\left(\frac{t^2}{2} \Delta_n\right) = \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx + \frac{(tx)^2}{2}\right) x^{-2} dK_n(x)\right) \end{aligned}$$

и легко проверяемое равенство $\mathbb{E}[\exp(itS_{k_n}) f_n^{-1}(t)] = 1$, мы получим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \exp\left(itS_{k_n} - \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx + \frac{(tx)^2}{2}\right) x^{-2} dK_n(x)\right) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

Отсюда и из (4) вытекает равенство

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\exp(itS_{k_n}) \left(1 - \exp\left(-\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx + \frac{(tx)^2}{2}\right) x^{-2} dK_n(x)\right) \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \exp(itS_{k_n}) - \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) = 0, \quad t \in [-u, u]. \end{aligned}$$

Приравнивая вещественные части обеих частей этого равенства, мы получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(J_n^{(1)}(t) + J_n^{(2)}(t)) = 0 \quad \forall t \in [-u, u], \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} J_n^{(1)}(t) &= \cos(tS_{k_n})(1 - \exp(-Z_n(t))), \\ J_n^{(2)}(t) &= (\cos(tS_{k_n})(1 - \cos(\varepsilon_n(t))) - \sin(tS_{k_n}) \sin(\varepsilon_n(t))) \exp(-Z_n(t)), \\ Z_n(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\cos(tx) - 1 + \frac{(tx)^2}{2} \right) x^{-2} dK_n(x), \quad \varepsilon_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(tx) - tx}{x^2} dK_n(x). \end{aligned}$$

Так как $J_n^{(1)}(t) = J_n^{(1)}(t) + J_n^{(2)}(t) - J_n^{(2)}(t)$, то

$$J_n^{(1)}(t) \leq (J_n^{(1)}(t) + J_n^{(2)}(t)) + |J_n^{(2)}(t)|, \quad t \in [-u, u]. \quad (8)$$

Оценим $\mathbf{E}J_n^{(1)}(t)$. Заметим, что подынтегральная функция в определении $Z_n(t)$ принимает неотрицательные значения. С учетом этого замечания мы имеем

$$\int_{|tx| < 1} \left(\cos(tx) - 1 + \frac{(tx)^2}{2} \right) x^{-2} dK_n(x) \leq Z_n(t) \leq t^2 \int_{-\infty}^{\infty} dK_n(x) = t^2 \Delta_n \leq t^2 \Lambda.$$

Если $t^2 \leq 1/\Lambda$, то $Z_n(t) \leq 1$. Поэтому $1 - \exp(-Z_n(t)) \geq e^{-1} Z_n(t)$ и

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\cos(tS_{k_n})I(|tS_{k_n}| < 1)(1 - \exp(-Z_n(t)))) &\geq \frac{1}{2e} \mathbf{E}(I(|tS_{k_n}| < 1)Z_n(t)) \\ &= \frac{1}{2e} \mathbf{E}Z_n(t) - \frac{1}{2e} \mathbf{E}(I(|tS_{k_n}| \geq 1)Z_n(t)) \\ &\geq \frac{1}{48} t^4 \mathbf{E} \int_{|tx| < 1} x^2 dK_n(x) - \frac{t^2 \Lambda}{2e} \mathbf{P}(|tS_{k_n}| \geq 1). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь мы воспользовались неравенствами $2 \cos x \geq 1$ и $48(\cos x - 1 + x^2/2) \geq x^4$, справедливыми для x , $|x| \leq 1$, и обозначением $I(A)$ для индикаторной функции события A . В силу (9) мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}J_n^{(1)}(t) &= \mathbf{E}(\cos(tS_{k_n})I(|tS_{k_n}| < 1)(1 - \exp(-Z_n(t)))) \\ &\quad + \mathbf{E}(\cos(tS_{k_n})I(|tS_{k_n}| \geq 1)(1 - \exp(-Z_n(t)))) \\ &\geq \frac{1}{48} t^4 \mathbf{E} \int_{|tx| < 1} x^2 dK_n(x) - \left(\frac{t^2 \Lambda}{2e} + 1 \right) \mathbf{P}\{|tS_{k_n}| \geq 1\} \quad \forall t \in [-u, u]. \end{aligned} \quad (10)$$

Для оценки $\mathbf{E}|J_n^{(2)}(t)|$ нам понадобится равенство

$$\mathbf{E} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dK_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dL_n(x), \quad (11)$$

справедливое для любой непрерывной функции $f(x)$, $|f(x)| \leq |x|^{1+\delta}$, $x \in \mathbb{R}^1$, где $L_n(x) = \mathbf{E}K_n(x)$. Докажем его. Монотонно возрастающая функция L_n имеет не более

счетного числа разрывов. Поэтому найдется счетное всюду плотное множество $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^1$, каждая точка которого является точкой непрерывности функции L_n . Если $a \in \mathcal{D}$, то

$$\mathbb{E}(K_n(a+0) - K_n(a-0)) = L_n(a+0) - L_n(a-0) = 0.$$

Поэтому a является точкой непрерывности функции $K_n(x) = K_n(x, \omega)$, $x \in \mathbb{R}^1$, для каждого ω из некоторого события Ω_a , $\mathbb{P}\{\Omega_a\} = 1$. Вероятность события $\Omega' = \bigcap_{a \in \mathcal{D}} \Omega_a$ равна единице. Каждая точка $a \in \mathcal{D}$ является точкой непрерывности функции $K_n(x, \omega)$, $x \in \mathbb{R}^1$, для каждого $\omega \in \Omega'$. Пусть A и B , $A < B$, — произвольные числа из $\mathcal{D}$. Разобьем сегмент $[A, B]$ точками $A = x_0 < x_1 < \dots < x_{m+1} = B$ из $\mathcal{D}$ таким образом, чтобы $\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{0 \leq k \leq m} (x_{k+1} - x_k) = 0$. Построим две интегральные суммы

$$T_m(\omega) = \sum_{k=0}^m f(x_k)(K_n(x_{k+1}, \omega) - K_n(x_k, \omega)), \quad R_m = \sum_{k=0}^m f(x_k)(L_n(x_{k+1}) - L_n(x_k)).$$

По определению интеграла Римана–Стильтьеса

$$\lim_{m \rightarrow \infty} T_m(\omega) = \int_A^B f(x) dK_n(x, \omega) \quad \forall \omega \in \Omega'.$$

В силу первого из условий (6) выполняется неравенство $|T_m(\omega)| \leq \Lambda \max_{A \leq x \leq B} |f(x)|$. Привлекая теорему Лебега об ограниченной сходимости, мы получим

$$\int_A^B f(x) dL_n(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} R_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} T_m(\omega) = \mathbb{E} \int_A^B f(x) dK_n(x, \omega).$$

Предельный переход при $A \rightarrow -\infty$ и $B \rightarrow \infty$ приводит к (11). Предельный переход под знаком математического ожидания можно осуществить по теореме Лебега об ограниченной сходимости, так как в силу условия (3)

$$\mathbb{E} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dK_n(x) \leq \mathbb{E} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{1+\delta} dK_n(x) \leq M.$$

Оценим $\mathbb{E}|J_n^{(2)}(t)|$. Из определения величины $J_n^{(2)}(t)$ следует, что

$$|J_n^{(2)}(t)| \leq (1 - \cos(\varepsilon_n(t))) + |\sin(tS_{k_n}) \sin(\varepsilon_n(t))|. \quad (12)$$

Привлекая неравенство Коши–Буняковского, первое из условий (6) и (11), мы получим

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(1 - \cos(\varepsilon_n(t))) &\leq \frac{1}{2} \mathbb{E} \varepsilon_n^2(t) = \frac{t^4}{2} \mathbb{E} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(tx) - tx}{(tx)^2} dK_n(x) \right)^2 \\ &\leq t^4 \Lambda \mathbb{E} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin(tx) - tx}{(tx)^2} \right|^2 dK_n(x) = t^4 \Lambda \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin(tx) - tx}{(tx)^2} \right|^2 dL_n(x). \end{aligned} \quad (13)$$

Далее,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} |\sin(tS_{k_n}) \sin(\varepsilon_n(t))| &\leq \mathbb{E} |\sin(tS_{k_n}) \varepsilon_n(t)| \\
 &= \mathbb{E} \left| t^3 \sin(tS_{k_n}) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t, x) dK_n(x) + \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{\infty} x dK_n(x) \right) \right| \\
 &\leq |t|^3 \mathbb{E} \left| \sin(tS_{k_n}) \int_{-\infty}^{\infty} f(t, x) dK_n(x) \right| + \mathbb{E} \left| \int_{-\infty}^{\infty} x dK_n(x) \right|, \quad (14)
 \end{aligned}$$

где $f(t, x) = (\sin(tx) - tx + (tx)^3/6)t^{-3}x^{-2}$. Интегралы в (13) и (14) существуют в силу условия (3) и легко проверяемых неравенств

$$\left| \frac{\sin(tx) - tx}{(tx)^2} \right| \leq 2, \quad |f(t, x)| \leq 3|x| \quad \forall t, x \in \mathbb{R}^1. \quad (15)$$

Положим $p = 1 + \delta'$, $q = p/(p-1)$, где $0 < \delta' < \delta$. Принимая во внимание первое из условий (6), мы получим по неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E} \left| \sin(tS_{k_n}) \int_{-\infty}^{\infty} f(t, x) dK_n(x) \right| \\
 &\leq \mathbb{E}^{1/q} |\sin(tS_{k_n})|^q \mathbb{E}^{1/p} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t, x)|^p dK_n(x) \right)^p \\
 &\leq \Lambda^{p/q} \mathbb{E}^{1/q} |\sin(tS_{k_n})|^q \mathbb{E}^{1/p} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t, x)|^p dK_n(x) \\
 &= \Lambda^{p/q} \mathbb{E}^{1/q} |\sin(tS_{k_n})|^q \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t, x)|^p dL_n(x) \right)^{1/p}. \quad (16)
 \end{aligned}$$

В силу условий (2) и (3) по теореме Лебега об ограниченной сходимости

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left| \int_{-\infty}^{\infty} x dK_n(x) \right| = 0. \quad (17)$$

Привлекая условие (3) и второе из неравенств (15), мы получим

$$\begin{aligned}
 \int_{|x|>r} |f(t, x)|^p dL_n(x) &\leq 3^p \int_{|x|>r} |x|^p dL_n(x) \leq 3^p r^{(\delta'-\delta)} \int_{|x|>r} |x|^{1+\delta} dL_n(x) \\
 &\leq 3^p r^{(\delta'-\delta)} M.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{n \geq 1} \int_{|x|>r} |f(t, x)|^p dL_n(x) = 0.$$

По терминологии из [3, с. 195] функция $|f(t, x)|$, $x \in \mathbb{R}^1$, равномерно интегрируема.

Пусть $\mathcal{N}$ – произвольная последовательность натуральных чисел. По теореме Хелли [3, с. 192] из $\mathcal{N}$ можно выделить подпоследовательность $\mathcal{N}'$ такую, что последовательность $\{L_n\}$, $n \in \mathcal{N}'$, сходится к некоторой неубывающей (ограниченной числом Λ)

функции L в каждой точке непрерывности последней. Чтобы не усложнять обозначений, мы будем считать, что $\mathcal{N}'$ совпадает со всем множеством натуральных чисел. По теореме о сходимости [3, с. 196] и (4), (12), (13), (14), (16), (17) мы имеем

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} |J_n^{(2)}(t)| &\leq t^4 \Lambda \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{(tx) - tx}{(tx)^2} \right|^2 dL(x) \\ &\quad + |t|^3 \Lambda^{p/q} \mathbb{E}^{1/q} |\sin(tS)|^q \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t, x)|^p dL(x) \right)^{1/p} \quad \forall t \in [-u, u], \end{aligned}$$

где S – случайная величина со стандартной нормальной функцией распределения. Привлекая (7), (8), (10), мы придем к следующему неравенству:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{48} t^4 \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_{|tx| < 1} x^2 dK_n(x) - \left(\frac{t^2 \Lambda}{2e} + 1 \right) \left(\Phi\left(-\frac{1}{t}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{1}{t}\right) \right) \\ &\leq t^4 \Lambda \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin(tx) - tx}{(tx)^2} \right|^2 dL(x) + |t|^3 \Lambda^{p/q} \mathbb{E}^{1/q} |\sin(tS)|^q \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t, x)|^p dL(x) \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Разделим правую и левую части этого неравенства на t^4 и положим $t \downarrow 0$. В результате мы получим, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dK_n(x) = 0, \quad (18)$$

так как $\lim_{t \downarrow 0} t^{-4} (\Phi(-1/t) + 1 - \Phi(1/t)) = 0$ и по теореме Лебега об ограниченной сходимости

$$\begin{aligned} \lim_{t \downarrow 0} \mathbb{E}^{1/q} \left| \frac{\sin(tS)}{t} \right|^q &= \mathbb{E}^{1/q} |S|^q < \infty, \quad \lim_{t \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin(tx) - tx}{(tx)^2} \right|^2 dL(x) = 0, \\ \lim_{t \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t, x)|^p dL(x) &= 0. \end{aligned}$$

В пояснении нуждается только последнее соотношение. В силу второго из неравенств в (15) и условия (3) следует, что функция $|f(t, x)|^p$ мажорируется интегрируемой по L функцией $3^p |x|^p$. Поэтому применение упомянутой теоремы Лебега об ограниченной сходимости законно.

Следствием (18) является условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbb{E} \int_{|x| \geq \varepsilon} x^2 dF_{n,k}(x) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0,$$

более сильное, чем условие (5). Освободимся теперь от дополнительных предположений (6). В силу условий (1) выполняются следующие два соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \max_{1 \leq k \leq k_n} \Delta_{n,k} \leq \lambda_n \right\} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \{ \Delta_n \leq \Lambda \} = 1 \quad (19)$$

для некоторой последовательности положительных чисел $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$, сходящейся к нулю, и любого числа $\Lambda > 1$. Положим

$$Y_{n,k} = X_{n,k} I(\Delta_{n,k} \leq \lambda_n) I\left(\sum_{j=1}^k \Delta_{n,j} \leq \Lambda\right),$$

$$\sigma_{n,k} = E(Y_{n,k}^2 | \mathcal{F}_{n,k-1}), \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^{k_n} \sigma_{n,k}.$$

Из определения величин $\sigma_{n,k}$ следует, что $\max_{1 \leq k \leq k_n} \sigma_{n,k} \leq \lambda_n$, $\sigma_n \leq \Lambda$. Далее, в силу второго условия из (1), (19) и неравенства

$$P\{\Delta_n \neq \sigma_n\} \leq P\{A\}, \quad A = \left\{ \max_{1 \leq k \leq k_n} \Delta_{n,k} > \lambda_n \right\} \cup \{\Delta_n > \Lambda\},$$

следует, что $W - \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 1$. Нетрудно проверить, что конечная последовательность $\{Y_{n,k}, \mathcal{F}_{n,k}\}_{k=1}^{k_n}$ является мартингал-разностью. Функции распределения сумм $Y_n = Y_{n,1} + \dots + Y_{n,k_n}$ слабо сходятся к стандартной нормальной функции распределения. Это следует из (4), (19) и неравенства $P\{Y_n \neq S_{k_n}\} \leq P\{A\}$. По доказанному выполняется условие

$$W - \lim_{n \rightarrow \infty} D_n = 0 \quad \forall \varepsilon > 0, \quad D_n = \sum_{k=1}^{k_n} E(Y_{n,k}^2 | (|Y_{n,k}| > \varepsilon) | \mathcal{F}_{n,k-1}).$$

Отсюда и (19) следует условие (5), так как

$$P\left\{ \sum_{k=1}^n E(X_{n,k}^2 I(|X_{n,k}| > \varepsilon) | \mathcal{F}_{n,k-1}) \neq D_n \right\} \leq P\{A\}.$$

Мы доказали, что из любой последовательности натуральных чисел $\mathcal{N}$ можно выделить подпоследовательность $\mathcal{N}'$ такую, что условие (5) выполняется, когда $n \rightarrow \infty$, $n \in \mathcal{N}'$. Поэтому (5) выполняется. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ширяев А. Н. Вероятность. 2-е изд. М.: Наука, 1989.
- [2] Шоломицкий А. Г. О необходимых условиях нормальной сходимости для мартингалов // Теор. вероятн. и ее прим. 1998. Т. 43. № 3. С. 490–508.
- [3] Лоев М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962.