Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Ю. Фёдоров, Чисто логтерминальные раздутия индекса 1, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 6, 917–926

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm72>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 16:42:41

УДК 512.7

ЧИСТО ЛОГТЕРМИНАЛЬНЫЕ РАЗДУТИЯ ИНДЕКСА 1

И. Ю. Фёдоров

В статье классифицированы чисто логтерминальные раздутия индекса 1 трехмерных терминальных особенностей.

Библиография: 17 названий.

Классификация особенностей, возникающих в лог-программе минимальных моделей, является одной из основных и наиболее трудных проблем современной бирациональной геометрии. Основные трудности начинаются уже в размерности 3.

Хотя трехмерные терминальные особенности уже описаны (см. [1]), структуры их разрешений и описания исключительных дивизоров до сих пор не известны, за исключением некоторых частных случаев (см., например, [2]–[5]). В размерности 4 и выше, вообще до конца не понятно, какие классы особенностей рассматривать.

Другой подход к классификации особенностей состоит в описании чисто логтерминальных раздутий особенностей и классификации реализуемых дивизоров. Этот подход тесно связан с теорией дополнений Шокурова [6], в которой особенности делятся на два класса: исключительные (в этом случае чисто логтерминальное раздутие единственно) и неисключительные (когда в линейной системе nK содержится “хороший” дивизор для небольших n). Эти идеи используются в подходе Шокурова [7] к классификации флипов, где существенным шагом является индукция по размерности задачи. Подобную индукцию можно осуществлять, делая чисто логтерминальные раздутия и исследуя проблему уже на исключительном дивизоре (отметим, что в размерности ≤ 3 чисто логтерминальные раздутия существуют для всех нормальных многообразий с логтерминальными особенностями [8], [9]).

В данной работе классифицированы чисто логтерминальные раздутия индекса 1 (т.е. исключительный дивизор – дивизор Картье) терминальных точек, т.е. доказана

ТЕОРЕМА 0.1. *Чисто логтерминальные раздутия индекса 1 трехмерных терминальных особенностей таковы:*

- (1) $(\mathbb{P}^2, \mathbb{C}^3, (1, 1, 1))$ – гладкий случай;
- (2) $((ty + z^2 + x^2 = 0) \subset \mathbb{P}^3, (ty + z^2 + x^2 = 0) \subset \mathbb{C}^4, (1, 1, 1, 1))$;
- (3) $((ty + z^2 = 0) \subset \mathbb{P}^3, (ty + z^2 + x^n = 0) \subset \mathbb{C}^4, (1, 1, 1, 1))$ – случай $n > 2$;

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00441, программы “Ведущие научные школы”, гранты № 00-15-96085 и № МК-602.2003.01, и фонда INTAS-OPEN 2000, грант № 269.

$$(4) (\mathbb{P}^2, \frac{1}{2}(1, 1, 1), (1, 1, 1));$$

(5) *раздутие пучка идеалов приведенной неприводимой кривой в $\mathbb{C}^3$, которая локально представляется как полное пересечение.*

Здесь представлены тройки (S, Z, f) , где S – исключительная поверхность, Z – уравнение особенности, f – морфизм. Так как f будет всегда взвешенным раздутием, мы будем писать веса этого раздутия.

Автор очень признателен В. А. Исковских и Ю. Г. Прохорову за плодотворные беседы и внимание к работе.

1. Основные определения и предварительные результаты

Все многообразия определены над $\mathbb{C}$. Все основные определения приведены в [10], [8] и [4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Многообразие X называется $\mathbb{Q}$ -факториальным, если некоторая целая кратность любого дивизора Вейля есть дивизор Картье. Многообразие X называется $\mathbb{Q}$ -горенштейновым, если некоторая кратность K_X – дивизор Картье.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Нормальное $\mathbb{Q}$ -горенштейново многообразие X имеет не хуже, чем терминальные (канонические, логтерминальные, логканонические) особенности, если для любого разрешения $f: Y \rightarrow X$ такого, что

$$K_Y = f^*K_X + \sum a_i E_i,$$

все $a_i > 0$ (соответственно $a_i \geq 0$, $a_i > -1$, $a_i \geq -1$).

ТЕОРЕМА 1.3 (Классификация терминальных особенностей). Пусть (X, P) – росток трехмерной терминальной особенности.

1) Если индекс (X, P) равен 1, то (X, P) формально эквивалентно гиперповерхностной особенности $(\{\varphi = 0\}, 0)$, где φ принадлежит одной из следующих серий:

(a) $\varphi = ty + f(z, x);$

(b) $\varphi = t^2 + f(y, z, x)$, где $j_2 f = 0$ и $f_3(y, z, x)$ не делится на квадрат линейной формы;

(c) $\varphi = t^2 + yz^2 + f(y, z, x)$, где $j_3 f = 0$;

(d) $\varphi = t^2 + y^3 + f(y, z, x)$, где $j_3 f = 0$ и $j_5 f = f_4 + f_5$ содержит один из мономов

$$y^4, zx^3, z^2x^2, x^5, zx^4, z^2x^3, yx^3, yzx^2$$

с ненулевым коэффициентом.

2) Если индекс $(X, P) \geq 2$, то (X, P) допускает одно из перечисленных ниже вложений:

(a) $X \simeq \{ty + f(z, x) = 0\}/\mathbb{Z}_m(\alpha, -\alpha, 1, 0)$, где $f(z, x)$ – $\mathbb{Z}_m$ -инвариант;

(b) $X \simeq \{t^2 + y^2 + f(z, x) = 0\}/\mathbb{Z}_4(1, 3, 1, 2)$, где $f(z, x)$ не содержит x и является $\mathbb{Z}_4$ -инвариантом;

(c) $X \simeq \{t^2 + y^2 + f(z, x) = 0\}/\mathbb{Z}(0, 1, 1, 1)$, где $f(z, x)$ – $\mathbb{Z}_2$ -инвариант;

(d) $X \simeq \{\varphi(t, y, z, x) = 0\}/\mathbb{Z}_3(1, 2, 2, 0)$, где φ имеет вид

- (i) $\varphi = t^2 + x^3 + yz(y + z)$;
- (ii) $\varphi = t^2 + x^3 + yz^2 + xy^4\lambda(y^3) + y^6\mu(y^3)$, где $4\lambda^3 + 27\mu^2 \neq 0$;
- (iii) $\varphi = t^2 + x^3 + y^3 + xyz^3\alpha(z^3) + xz^4\beta(z^3) + yz^5\gamma(z^3) + z^6\delta(z^3)$;
- (e) $X \simeq \{\varphi(t, y, z, x) = 0\}/\mathbb{Z}_2(1, 1, 0, 1)$, где φ имеет вид
 - (i) $\varphi = t^2 + xyz + x^{2a} + y^{2b} + z^c$, где $a, b \geq 2, c \geq 3$;
 - (ii) $\varphi = t^2 + y^2z + \lambda yx^{2a+1} + g(x, z)$, где $a \geq 1, \lambda \in \mathbb{C}, g(x, z) \in (x^4, x^2z^2, z^3) \cdot \mathbb{C}\{x, z\}$;
- (f) $X \simeq \{t^2 + x^3 + g(y, z)x + h(y, z) = 0\}/\mathbb{Z}_2(0, 1, 1, 1)$, где $g(y, z) \in (y, z)^4\mathbb{C}\{y, z\}$, $h(y, z) \in (y, z)^4\mathbb{C}\{y, z\}/(y, z)^5\mathbb{C}\{y, z\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Пусть X – нормальное логканоническое алгебраическое многообразие, и пусть $f: Y \rightarrow X$ – некоторое его раздутие. Предположим, что исключительное множество f состоит только из одного неприводимого дивизора E (т.е. $\text{Exc}(f) = E$). Тогда $f: (Y, E) \rightarrow X$ называется *чисто логтерминальным раздутием*, если дивизор $K_Y + E$ чисто логтерминален и $-E$ f -обилен.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. В определении 1.4 неявно требуется, чтобы дивизор E был $\mathbb{Q}$ -Картье. Отсюда многообразие Y имеет $\mathbb{Q}$ -горенштейновы особенности.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6. В обозначениях определения 1.4 имеем следующие свойства чисто логтерминальных раздутий.

- 1) Если многообразие X имеет логтерминальные особенности, то дивизор $-(K_Y + E)$ f -обилен. Действительно, это следует из численной эквивалентности $K_Y + E \equiv (a(E, 0) + 1)E$ над X .
- 2) Если многообразие X имеет строго логканонические особенности, то $a(E, 0) = -1$.
- 3) [8] Если многообразие X является $\mathbb{Q}$ -факториальным, то Y тоже $\mathbb{Q}$ -факториально и $\rho(Y/X) = 1$. Отсюда следует, что в определении 1.4 для $\mathbb{Q}$ -факториального случая, можно не требовать относительную обильность дивизора $-E$, так как она всегда имеет место. Напомним также, что каждая компонента исключительного множества любого бирационального стягивания в $\mathbb{Q}$ -факториальную точку имеет коразмерность 1.
- 4) [8] Пусть $f_i: (Y_i, E_i) \rightarrow (X \ni P), i = 1, 2$, – два чисто логтерминальных раздутия. Если E_1 и E_2 определяют одно и то же дискретное нормирование поля функций $\mathcal{K}(X)$, то раздутия f_1 и f_2 изоморфны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Рассмотрим циклическую факторособенность

$$Y := \mathbb{C}^n / \mathbb{Z}_m(a_1, \dots, a_n),$$

где $a_i \in \mathbb{N}$ и $(a_1, \dots, a_n) = 1$ (случай $m = 1$, т.е. $Y \simeq \mathbb{C}^n$, также возможен). Пусть $x_1, \dots, x_n$ – координаты в $\mathbb{C}^n$, собственные для $\mathbb{Z}_m$. *Взвешенным раздутием Y с весом $\sigma = a_1, \dots, a_n$* называется проективный бирациональный морфизм $f: \bar{Y} \rightarrow Y$ такой, что $\bar{Y}$ покрывается аффинными картами $U_1, \dots, U_n$, где

$$U_i = \mathbb{C}_{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n}^n / \mathbb{Z}_{a_i}(-a_1, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{m}, \dots, -a_n).$$

Координаты в Y и в U_i связаны соотношениями

$$y_i = \bar{y}_i^{a_i/m}, \quad y_j = \bar{y}_j \bar{y}_i^{a_j/m}, \quad j \neq i.$$

Исключительное множество E морфизма f является неприводимым дивизором, $E \simeq \mathbb{P}(a_1, \dots, a_n)$.

Рассмотрим гиперповерхностную особенность

$$X := \{\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0\} \subset \mathbb{C}_{y_1, \dots, y_n}^n.$$

Пусть $\overline{X} = \bar{\pi}^{-1}X$ – собственный прообраз X при отображении $\bar{\pi}$, $\pi = \bar{\pi}|_{\overline{X}}$ – ограничение $\bar{\pi}$. Тогда $\pi: \overline{X} \rightarrow X$ тоже называется *взвешенным раздутием с весом σ* или просто *взвешенным раздутием*, если из контекста ясно, о каком σ идет речь.

Через $\sigma wt(x)$ (соответственно $\sigma wt(y)$, $\sigma wt(z)$, $\sigma wt(u)$) или, если это понятно из контекста, через $wt(x)$ и т.д. мы будем обозначать вес x (соответственно y, z, u) при взвешенном раздутии σ (см. [4]). Вес монома $f(x, y, z, u) = x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}z^{\alpha_3}u^{\alpha_4}$ при взвешенном раздутии σ будет

$$\sigma wt(f) = \alpha_1(\sigma wt x) + \alpha_2(\sigma wt y) + \alpha_3(\sigma wt z) + \alpha_4(\sigma wt u),$$

или

$$wt(f) = \alpha_1(wt x) + \alpha_2(wt y) + \alpha_3(wt z) + \alpha_4(wt u).$$

Для любого многочлена $f \in \mathbb{C}(x, y, z, u)$ вес $\sigma wt(f)$ – минимальный из σ -весов мономов, входящих в f .

2. Стягивания индекса 1

В этом разделе мы исследуем свойства дивизоров Картье, которые могут быть стянуты, и объемлющих их трехмерных многообразий.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть имеется некоторое дивизориальное стягивание $f: X \rightarrow Z$ такое, что стягивается неприводимый приведенный дивизор Картье S , $\dim X = \dim Z = 3$, $K_X + S$ чисто логтерминально, Z – росток терминальной особенности $P \in Z$. Тогда

- (1) X имеет терминальные особенности;
- (2) дискрепантность S минимальна над Z ;
- (3) над $P \in Z$ существует единственный дивизор с минимальной дискрепантностью;
- (4) если Z горештейново, то X тоже горештейново, т.е. особенности X не хуже, чем cDv точки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Рассмотрим вложенное разрешение $g: Y \rightarrow X$. Имеем

$$K_Y + \tilde{S} = g^*(K_X + S) + \sum (a_i - r_i)E_i,$$

где E_i – g -исключительные дивизоры, a_i – их дискрепантности, r_i – кратности, с которыми вклеиваются E_i к полному прообразу S . Так как $a_i > -1$, $r_i \geq 1$, а особенности S не хуже, чем логтерминальные, то S не проходит через логтерминальные и канонические особенности X .

(2) Имеем $K_X = f^*K_Z + aS$, где $a > 0$, так как Z терминально. Пусть существует дивизор E с дискрепантностью $b < a$ над Z . Тогда существует морфизм $\pi: Y \rightarrow X \rightarrow Z$

такой, что E реализован на Y . Имеем $b = b_X + ak > a$, где $k \in \mathbb{Z}$ – кратность S в центре E на X , $b_X > 0$. Противоречие.

(3) Аналогично, пусть E – еще один дивизор с дискрепантностью $b = a$. Реализовав E , получаем $b = b_X + ak > a$, так как $b_X > 0$.

(4) Пусть на X существует негорнштейнова точка F . Тогда, реализовав дивизор E с минимальной дискрепантностью $1/m$ (над F), получим, что над Z дискрепантность E будет равна $b = 1/m + ak$. Так как $ak \in \mathbb{Z}$, то $b \notin \mathbb{Z}$. Противоречие с горнштейновостью Z .

3. Случай, когда Z – росток горнштейновой точки

3.1. cA случай. Если Z – росток cA точки (сюда же входит неособый случай), то возможны следующие варианты троек (S, Z, f) (так как f будет всегда взвешенным раздутием, мы будем писать веса этого раздутия):

- (1) $(\mathbb{P}^2, \mathbb{C}^3, (1, 1, 1))$ – гладкий случай;
- (2) $((ty + z^2 + x^2 = 0) \subset \mathbb{P}^3, (ty + z^2 + x^2 = 0) \subset \mathbb{C}^4, (1, 1, 1, 1))$;
- (3) $((ty + z^2 = 0) \subset \mathbb{P}^3, (ty + z^2 + x^n = 0) \subset \mathbb{C}^4, (1, 1, 1, 1))$ – случай $n > 2$.

Как видно из работы [5], в остальных случаях дивизор с минимальной дискрепантностью над $P \in Z$ не один, поэтому из теоремы 2.1 следует, что других вариантов нет.

3.2. cD_4 случай. Чтобы описать этот случай, нам понадобится классификация (с точностью до аналитического изоморфизма) нормальных форм кубических кривых в $\mathbb{P}^2$ (см. [11]).

ТЕОРЕМА А. *Нормальные формы (относительно GL_3) кубических кривых в $\mathbb{P}^2$ таковы:*

- (1) $g_3 = y^3$;
- (2) $g_3 = z^2y$;
- (3) $g_3 = zy(z + y)$;
- (4) $g_3 = xyz$;
- (5) $g_3 = (x^2 + yz)y$;
- (6) $g_3 = (x^2 + yz)x$;
- (7) $g_3 = (y^2z + x^3)$;
- (8) $g_3 = (y^2z + x^3 + x^2z)$;
- (9) $g_3 = (x^3 + y^3 + z^3) + axyz, a^3 + 27 \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Напомним, что Z задается уравнением

$$(t^2 + g_3(x, y, z) + g_{\geq 4}(x, y, z) = 0) \subset \mathbb{C}^4.$$

3.2.1. Формы (1) и (2). Эти случаи относятся к особенностям вида cD_n для $n \geq 5$, который будет рассмотрен ниже (см. п. 3.3).

3.2.2. Формы (3), (4), (5) и (6). В этих случаях чисто логтерминальные раздутия индекса 1 невозможны. Действительно, раздуем Z с весами $(2, 1, 1, 1)$. Если g_3 имеет вид (3) или (4), то вклеятся три дивизора с дискрепантностью $2 + 1 + 1 + 1 - 3 - 1 = 1$. Если g_3 имеет вид (5) или (6), то вклеятся два дивизора с дискрепантностью $2 + 1 + 1 + 1 - 3 - 1 = 1$. Из теоремы 2.1 следует отсутствие чисто логтерминальных раздутий индекса 1 в этих случаях.

3.2.3. Форма (7). В этом случае чисто логтерминальных раздутий индекса 1 не существует. Действительно, раздуем Z с весами $(2, 1, 1, 1)$: $h: \overline{X} \rightarrow Z$. Вклеится один дивизор с дискрепантностью $a = 2 + 1 + 1 + 1 - 3 - 1 = 1$. Проверим, что особенности многообразия $\overline{X}$ будут терминальными. Многообразие $\overline{X}$ покрывается аффинными картами U_1, U_2, U_3, U_4 :

$$\begin{aligned} U_1 &= \{t + y^2z + x^3 + \dots = 0\} / \mathbb{Z}_2(1, 1, 1, 1), \\ U_2 &= \{t^2y + z + x^3 + \dots = 0\} \subseteq \mathbb{C}^4, \\ U_3 &= \{t^2z + y^2 + x^3 + \dots = 0\} \subseteq \mathbb{C}^4, \\ U_4 &= \{t^2x + y^2z + 1 + \dots = 0\} \subseteq \mathbb{C}^4. \end{aligned}$$

Особенность $\overline{X}$ находится только в карте U_3 (это cD_4 точка). Исключительный дивизор E морфизма h задается уравнением $E \simeq (y^2z + x^3 = 0) \subset \mathbb{C}^4$. Эта поверхность имеет хуже, чем логтерминальные особенности. А так как других дивизоров с дискрепантностью 1 нет (это следует из того, что в картах U_1, U_2, U_4 многообразие неособо, а в карте U_3 особенность cDv), то из относительной антиобильности E получаем, что чисто логтерминальных раздутий индекса 1 в этих случаях не существует (см. [12]).

3.2.4. Форма (8). В этом случае чисто логтерминальных раздутий индекса 1 не существует. Действительно, раздуем Z с весами $(2, 1, 1, 1)$: $h: \overline{X} \rightarrow Z$. Вклеится один дивизор с дискрепантностью $a = 2 + 1 + 1 + 1 - 3 - 1 = 1$. Проверим, что особенности многообразия $\overline{X}$ будут терминальными. Многообразие $\overline{X}$ покрывается аффинными картами U_1, U_2, U_3, U_4 :

$$\begin{aligned} U_1 &= \{t + y^2z + x^3 + x^2z + \dots = 0\} / \mathbb{Z}_2(1, 1, 1, 1), \\ U_2 &= \{t^2y + z + x^3 + x^2z + \dots = 0\} \subseteq \mathbb{C}^4, \\ U_3 &= \{t^2z + y^2 + x^3 + x^2 + \dots = 0\} \subseteq \mathbb{C}^4, \\ U_4 &= \{t^2x + y^2z + 1 + z + \dots = 0\} \subseteq \mathbb{C}^4. \end{aligned}$$

Особенность $\overline{X}$ находится только в карте U_3 (это cA точка). Исключительный дивизор E морфизма h задается уравнением $E \simeq (y^2z + x^3 = 0) \subset \mathbb{C}^4$. Эта поверхность имеет хуже, чем логтерминальные особенности. А так как других дивизоров с дискрепантностью 1 нет (это следует из того, что в картах U_1, U_2, U_4 многообразие неособо, а в карте U_3 особенность cDv), то из относительной антиобильности E получаем, что чисто логтерминальных раздутий индекса 1 в этих случаях не существует (см. [12]).

3.2.5. Форма (9). В этом случае чисто логтерминальных раздутий индекса 1 не существует. Действительно, раздуем Z с весами $(2, 1, 1, 1)$: $h: \overline{X} \rightarrow Z$. Вклеится один дивизор с дискрепантностью $a = 2 + 1 + 1 + 1 - 3 - 1 = 1$. Проверим, что особенности многообразия $\overline{X}$ будут терминальными. Многообразие $\overline{X}$ покрывается аффинными картами U_1, U_2, U_3, U_4 :

$$\begin{aligned} U_1 &= \{t + y^3 + x^3 + z^3 + axyz + \dots = 0\} / \mathbb{Z}_2(1, 1, 1, 1), \\ U_2 &= \{t^2y + z^3 + x^3 + 1 + axz + \dots = 0\} \subseteq \mathbb{C}^4, \\ U_3 &= \{t^2z + y^3 + x^3 + 1 + axy + \dots = 0\} \subseteq \mathbb{C}^4, \\ U_4 &= \{t^2x + y^3 + 1 + z^3 + ayz + \dots = 0\} \subseteq \mathbb{C}^4. \end{aligned}$$

Многообразие $\overline{X}$ неособо. Исключительный дивизор E морфизма h задается уравнением $E \simeq (x^3 + y^3 + z^3 + axyz = 0) \subset \mathbb{C}^4$. Эта поверхность имеет хуже, чем логтерминальные, особенности. А так как других дивизоров с дискрепантностью 1 нет, то из относительной антиобильности E получаем, что чисто логтерминальных раздутий индекса 1 в этих случаях не существует (см. [12]).

3.3. cD_n случай для $n \geq 5$. В этом случае чисто логтерминальных раздутий индекса 1 нет. Действительно, рассмотрим раздутие $f: \overline{X} \rightarrow Z$ с весами $(wt(t), wt(y), wt(z), wt(x)) = (2, 2, 1, 1)$. Многообразие $\overline{X}$ покрывается четырьмя аффинными картами U_1, U_2, U_3, U_4 , где $U_i, i = 1, \dots, 4$, — гиперповерхности в $\mathbb{C}^4$, заданные соответственно уравнениями

$$\begin{aligned} U_1 &= \{1 + yz^2 + \dots = 0\} / \mathbb{Z}_2(1, 0, 1, 1), \\ U_2 &= \{t^2 + z^2 + \dots = 0\} / \mathbb{Z}_2(0, 1, 1, 1), \\ U_3 &= \{t^2 + y + \dots = 0\} / \subseteq \mathbb{C}^4, \\ U_4 &= \{t^2 + yz^2 + \dots = 0\} \subseteq \mathbb{C}^4. \end{aligned}$$

При этом исключительный дивизор E морфизма f имеет дискрепантность 1 и задается уравнением

$$E = \{t^2 + yz^2 + g_{wt=4}(x, y, z) = 0\} \subseteq \mathbb{P}(2, 2, 1, 1).$$

Нетрудно заметить, что в карте U_2 особенность типа $cAx/2$. Раздуем взвешенно $\overline{Y} \rightarrow \overline{X}$ эту особенность с весами $\frac{1}{2}(2, 1, 1, 1)$. Исключительный дивизор этого морфизма будет иметь дискрепантность (над Z)

$$a(Z, E_1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 - 1 + \frac{1}{2} = 1,$$

где дискрепантность $a(\overline{Y}, E_1) = 1/2$, а к дивизору E вклеивается еще $\frac{1}{2}E_1$, так как E локально задается уравнением $y = 0$ вблизи особенности. Из теоремы 2.1 следует отсутствие чисто логтерминальных раздутий в этом случае.

3.4. cEn случай. Как показано в работе [13], Z имеет тип cEn тогда и только тогда, когда

$$Z \simeq (t^2 + y^3 + az^4 + byz^3 + cz^5 + g_{\geq 6}(x, y, z) = 0) \subset \mathbb{C}^4,$$

где хотя бы одно из чисел a, b, c отлично от нуля. Рассмотрим следующие три случая.

Случай $a \neq 0$. Покажем, что в этом случае допустимых раздутий нет. Действительно, рассмотрим раздутие $f: \overline{X} \rightarrow Z$ с весами $(wt(t), wt(y), wt(z), wt(x)) = (3, 2, 2, 1)$. Многообразие $\overline{X}$ покрывается четырьмя аффинными картами U_1, U_2, U_3, U_4 , где $U_i, i = 1, \dots, 4$, — гиперповерхности в $\mathbb{C}^4$, заданные уравнениями

$$\begin{aligned} U_1 &= \{1 + \dots = 0\} / \mathbb{Z}_3(1, -2, -2, -1), \\ U_2 &= \{t^2 + 1 + \dots = 0\} / \mathbb{Z}_2(1, 1, 0, 1), \\ U_3 &= \{t^2 + y^3 + z^2 + \dots = 0\} / \mathbb{Z}_2(1, 0, 1, 1), \\ U_4 &= \{t^2 + y^3 + \dots = 0\} \subseteq \mathbb{C}^4. \end{aligned}$$

При этом исключительный дивизор E морфизма f имеет дискрепантность 1 и задается уравнением

$$E = \{t^2 + y^3 + g_{wt=6}(x, y, z) = 0\} \subseteq \mathbb{P}(3, 2, 2, 1).$$

Нетрудно заметить, что в карте U_3 особенность типа $cA/2$, которая нам дает еще, как минимум, один дивизор с дискрепантностью 1 (над Z). Из теоремы 2.1 следует отсутствие чисто логтерминальных раздутий в этом случае.

Случай $a = 0, b \neq 0$. Покажем, что в этом случае допустимых раздутий нет. Действительно, рассмотрим раздутие $f: \bar{X} \rightarrow Z$ с весами $(wt(t), wt(y), wt(z), wt(x)) = (3, 2, 2, 1)$. Многообразие $\bar{X}$ покрывается четырьмя аффинными картами U_1, U_2, U_3, U_4 , где $U_i, i = 1, \dots, 4$, – гиперповерхности в $\mathbb{C}^4$, заданные уравнениями

$$\begin{aligned} U_1 &= \{1 + \dots = 0\} / \mathbb{Z}_3(1, -2, -2, -1), \\ U_2 &= \{t^2 + 1 + \dots = 0\} / \mathbb{Z}_2(1, 1, 0, 1), \\ U_3 &= \{t^2 + y^3 + y + \dots = 0\} / \mathbb{Z}_2(1, 0, 1, 1), \\ U_4 &= \{t^2 + y^3 + \dots = 0\} \subseteq \mathbb{C}^4. \end{aligned}$$

При этом исключительный дивизор E морфизма f имеет дискрепантность 1 и задается уравнением

$$E = \{t^2 + y^3 + yz^3 + g_{wt=6}(x, y, z) = 0\} \subseteq \mathbb{P}(3, 2, 2, 1).$$

Нетрудно заметить, что в карте U_3 особенность типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, которая нам дает еще один дивизор с дискрепантностью 1 (над Z). Из теоремы 2.1 следует отсутствие чисто логтерминальных раздутий в этом случае.

Случай $a = b = 0, c \neq 0$. В этом случае допустимых раздутий нет. Действительно, рассмотрим раздутие $f: \bar{X} \rightarrow Z$ с весами $(wt(t), wt(y), wt(z), wt(x)) = (3, 2, 2, 1)$. Многообразие $\bar{X}$ покрывается четырьмя аффинными картами U_1, U_2, U_3, U_4 , где $U_i, i = 1, \dots, 4$, – гиперповерхности в $\mathbb{C}^4$, заданные уравнениями

$$\begin{aligned} U_1 &= \{1 + \dots = 0\} / \mathbb{Z}_3(1, -2, -2, -1), \\ U_2 &= \{t^2 + 1 + \dots = 0\} / \mathbb{Z}_2(1, 1, 0, 1), \\ U_3 &= \{t^2 + y^3 + z^4 + \dots = 0\} / \mathbb{Z}_2(1, 0, 1, 1), \\ U_4 &= \{t^2 + y^3 + \dots = 0\} \subseteq \mathbb{C}^4. \end{aligned}$$

При этом исключительный дивизор E морфизма f имеет дискрепантность 1 и задается уравнением

$$E = \{t^2 + y^3 + z^5 + g_{wt=6}(x, y, z) = 0\} \subseteq \mathbb{P}(3, 2, 2, 1).$$

Покажем, что особенность в карте U_3 дает еще, как минимум, один дивизор с дискрепантностью 1 (над Z). Раздуем начало координат этой карты с весами $\frac{1}{2}(1, 2, 1, 1)$: $g: \bar{Y} \rightarrow \bar{X}$. Вклеится дивизор E_1 с дискрепантностью

$$a(E_1, \bar{Y}) = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 - 1 = \frac{1}{2}.$$

А дискрепантность $a(E_1, Z) = a(E_1, \bar{Y}) + k(E)$. Так как E задается $z = 0$, а вес z равен $1/2$, то $k(E) = 1/2$. Поэтому $a(E_1, Z) = 1$ и из теоремы 2.1 следует отсутствие чисто логтерминальных раздутий в этом случае.

4. Случай, когда Z – росток негорнштейновой точки

4.1. cA/m случай. В случае циклической факторособенности мы имеем один допустимый вариант:

$$(1) (\mathbb{P}^2, \frac{1}{2}(1, 1, 1), (1, 1, 1)).$$

Это следует из терминальности X и теоремы 2.1.

В оставшихся случаях допустимых троек нет. Это следует из [4] и теоремы 2.1, так как в этих случаях число дивизоров с минимальной дискрепантностью больше 1.

4.2. $cAx/2$, $cAx/4$, $cD/2$, $cD/3$ и $cE/2$ случаи. В этих случаях чисто логтерминальных раздутий индекса 1 нет. Действительно, в силу теоремы 2.1 мы можем рассматривать случаи, когда дивизор с минимальной дискрепантностью ровно один. Как видно из [4], [14], в терминальной категории нет раздутий, реализующих дивизор Картье с минимальной дискрепантностью. Из замечания 1.6 (4) получаем, что в этих случаях допустимых раздутий нет.

5. Случай, когда Z – росток кривой

5.1. Случай, когда Z горнштейново. В этом случае Z должно быть неособо, так как по теореме 2.1 X горнштейново, а над особенностью Z существует единственный дивизор с минимальной дискрепантностью. Из раздела 3 и [15] следует, что если Z особо, то стягиваемый дивизор не является дивизором Картье. Из работы [16] следует, что допустимое чисто логтерминальное раздутие – это раздутие пучка идеалов приведенной неприводимой кривой, которая локально представляется как полное пересечение.

5.2. Случай, когда Z негорнштейново. В этом случае чисто логтерминальных раздутий индекса 1 нет. Действительно, дискрепантность исключительной поверхности является целым числом и из теоремы 2.1 следует, что все дивизоры над Z имеют дискрепантности ≥ 1 . Противоречие с [17], так как в разрешении терминальной особенности индекса n должны присутствовать все дивизоры с дискрепантностью i/n .

Теорема 0.1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Reid M. Young person's guide to canonical singularities // Proc. Symp. in Pure Math. 1987. V. 46. P. 343–416.
- [2] Kawamata Y. Divisorial contractions to 3-dimensional terminal quotient singularities // Higher-Dimensional Complex Varieties (Trento, 1994). Berlin: Walter de Gruyter, 1996. P. 241–246.
- [3] Kawakita M. General elements in anticanonical systems of threefolds with divisorial contractions and applications to classification // E-print math.AG/0110050, 2001.
- [4] Hayakawa T. Blowing ups of 3-dimensional terminal singularities // RIMS Kyoto Univ. 1999. V. 35. P. 515–570.
- [5] Фёдоров И. Ю. Раздутия трехмерных терминальных особенностей: cA случай // Матем. заметки. 2002. Т. 71. № 3. С. 400–407.
- [6] Shokurov V. V. Complements on surfaces. Algebraic geometry, 10 // J. Math. Sci. (New York). 2000. V. 102. № 2. P. 3876–3932.
- [7] Шокуров В. В. Трехмерные логперестройки // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 56. С. 105–203.

- [8] Prokhorov Yu. G. Blow-ups of canonical singularities // Algebra / ed. Yu. Bahturin. Proc. Internat. Conf. on the Occasion of the 90th birthday of A. G. Kurosh (Moscow, Russia, May 25–30, 1998). Berlin: Walter de Gruyter, 2000. P. 301–317.
- [9] Кудрявцев С. А. О чисто логтерминальных раздутиях // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 6. С. 892–898.
- [10] Kawamata Y., Matsuda K., Matsuki K. Introduction to the minimal model program // Algebraic Geometry. Sendai. Adv. Stud. Pure Math. 1987. V. 10. P. 283–360.
- [11] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. М.: Наука, 1982.
- [12] Kollar J. et al. Flips and Abundance for Algebraic Threefolds. Astérisque. V. 211. Paris: Soc. Math. France, 1992.
- [13] Маркушевич Д. Г. Канонические особенности трехмерных гиперповерхностей // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49. № 2. С. 334–368.
- [14] Hayakawa T. Blowing Ups of 3-dimensional Terminal Singularities, II // RIMS Kyoto Univ. 2000. V. 36. P. 423–456.
- [15] Tziolas N. Terminal 3-fold divisorial contractions of a surface to a curve, I // E-print math.AG/0110074, 2001.
- [16] Cutkosky S. Elementary contractions of Gorenstein threefolds // Math. Ann. 1988. V. 280. P. 521–525.
- [17] Шокуров В. В. Добавление к статье “Трехмерные логперестройки” // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 6. С. 141–175.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: ifedorov@mi.ras.ru

Поступило
26.02.2003