Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Юлмухаметов, В. В. Напалков, О преобразовании
Гильберта в пространстве Бергмана, *Матем. заметки*,
2001, том 70, выпуск 1, 68–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm720>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 17:24:55

УДК 517.5

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ГИЛЬБЕРТА В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА

В. В. Напалков (мл.), Р. С. Юлмухаметов

В работе описан образ оператора преобразования Гильберта для пространства Бергмана.

Библиография: 16 названий.

Пусть X – функциональное топологическое пространство аналитических функций в области $G \subset \mathbb{C}$. Термин “функциональное” означает, что функционал $\delta_z: f \rightarrow f(z)$, заданный на X , является линейным и непрерывным для любого $z \in G$. Через X^* обозначим совокупность линейных и непрерывных функционалов над X . Во многих задачах возникает необходимость иметь более полную информацию о X^* . Эту информацию можно получить, изучая различные представления X^* . Для представления X^* можно использовать любую полную систему $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$, где A – множество индексов. Обозначим через $L_{\mathcal{F}}$ следующий оператор: каждому $S \in X^*$ ставится в соответствие функция

$$S(f_\alpha): A \rightarrow \mathbb{C}.$$

Из полноты системы $\mathcal{F}$ и теоремы Банаха следует инъективность отображения $L_{\mathcal{F}}: X^* \rightarrow \mathbb{C}^A$, где $\mathbb{C}^A$ – множество комплекснозначных функций от переменного $\alpha \in A$. Для эффективного использования такого представления линейных и непрерывных функционалов на X необходимо решить две задачи:

- 1) определить образ $\text{Im } L_{\mathcal{F}}$;
- 2) описать топологию в образе, наведенную сильной топологией сопряженного к X .

В качестве примеров можно рассмотреть следующие.

- 1) В качестве $\mathcal{F}$ возьмем $\{(z - \xi)^{-1}, \xi \in \mathbb{C} \setminus \overline{G}\}$. Как правило, полнота этой системы имеет место. В этом случае $L_{\mathcal{F}}$ – преобразование Коши. Очень просто выясняется, что $\text{Im } L_{\mathcal{F}}$ лежит в $H_0(\mathbb{C} \setminus \overline{G})$. Более детальные результаты получены в [1]–[5].
- 2) G – выпуклая ограниченная область, система $\mathcal{F} = \{\exp(\lambda z), \lambda \in \mathbb{C}\}$ полна в X . $L_{\mathcal{F}}$ в этом случае называется *преобразованием Фурье–Лапласа функционала из X^** . В этом случае $\text{Im } L_{\mathcal{F}} \subset H(\mathbb{C})$. Для пространства $X = H(G)$ эта задача исследовалась Полия (см., например, [6]). Для пространств аналитических в G функций, имеющих определенный рост вблизи границы, см. работы [7]–[9].

Первый автор поддержан грантом “Ведущие научные школы России” № 96-15-96196. Второй автор поддержан грантом Российского фонда фундаментальных исследований № 99-01-00159.

3) $G = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$, $\mathcal{F} = \{z^n, n \in \mathbb{N}\}$. В этом случае $\text{Im } L_{\mathcal{F}}$ пространство последовательностей.

Здесь мы рассмотрим пространство Бергмана, состоящее из функций, голоморфных в односвязной области $G \in \overline{\mathbb{C}}$ с жордановой границей и суммируемых в этой области с квадратом модуля по площади:

$$B_2(G) = \left\{ f \in H(G): \|f\|_{B_2(G)}^2 = \int_G |f(z)|^2 dv(z) < \infty \right\}.$$

Это гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_G f(z) \overline{g(z)} dv(z).$$

В качестве системы $\mathcal{F}$ возьмем систему $\{(z - \xi)^{-2}, \xi \in \mathbb{C} \setminus \overline{G}\}$. Задача об описании $B_2^*(G)$ в терминах преобразования Гильберта близка к задаче об описании $B_2^*(G)$ в терминах преобразования Коши, однако первая постановка допускает неограниченные области G .

Ранее вопрос об описании $B_2^*(G)$ в терминах преобразования Коши изучался в [4], где было получено описание $B_2^*(G)$ для ограниченных областей G с границей класса C^{1+0} . В работе [10] этот результат был распространен на случай, когда G – ограниченный квазикруг.

В данной работе мы получим критерий возможности описания $B_2^*(G)$ в терминах преобразования Гильберта. Заметим, что близкие к теме данной статьи вопросы рассмотрены в [11], [12], где изучались свойства интеграла Коши на липшицевых кривых.

ЛЕММА 1. Система функций от переменной z $\{(z - \xi)^{-2}, \xi \in \mathbb{C} \setminus \overline{G}\}$ полна в пространстве $B_2(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Принадлежность системы $\{(z - \xi)^{-2}, \xi \in \mathbb{C} \setminus \overline{G}\}$ пространству $B_2(G)$ достаточно очевидна. Докажем полноту этой системы. Рассмотрим два случая:

- 1) G – ограниченная односвязная область в $\overline{\mathbb{C}}$;
 - 2) G – неограниченная односвязная область в $\overline{\mathbb{C}}$.
- 1) Используем теорему Банаха. Из равенства

$$\int_G \frac{\overline{g(z)}}{(z - \xi)^2} dv(z) = 0, \quad \xi \in \mathbb{C} \setminus \overline{G},$$

следует

$$\int_G \frac{\overline{g(z)}}{z - \xi} dv(z) = C, \quad \xi \in \mathbb{C} \setminus \overline{G},$$

где C – постоянная. Левая часть последнего равенства стремится к 0 при $\xi \rightarrow \infty$, поэтому $C = 0$. Так как система $\{(z - \xi)^{-1}, \xi \in \mathbb{C} \setminus \overline{G}\}$ полна в $B_2(G)$ [13], то $g(z) \equiv 0$. По теореме Банаха система $\{(z - \xi)^{-2}, \xi \in \mathbb{C} \setminus \overline{G}\}$ полна в $B_2(G)$.

- 2) Этот случай сводится к первому конформной заменой переменных $w = 1/z, \eta = 1/\xi$.

Каждому линейному непрерывному функционалу S на $B_2(G)$ поставим в соответствие функцию

$$\tilde{S}(\xi) = S\left(\frac{1}{(z - \xi)^2}\right), \quad \xi \in \mathbb{C} \setminus \overline{G},$$

которая называется *преобразованием Гильберта функционала S* .

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $G \in \overline{\mathbb{C}}$ – односвязная область с жордановой границей, S – линейный непрерывный функционал на $B_2(G)$ и

$$\gamma(\xi) = \frac{1}{\pi} S_z \left(\frac{1}{(z - \xi)^2} \right), \quad \xi \in \mathbb{C} \setminus \overline{G}.$$

Тогда

$$\|\gamma\|_{B_2(\mathbb{C} \setminus \overline{G})} \leq \|S\|_{B_2^*(G)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функционал S порождается функцией $g \in B_2(G)$

$$S(f) = \int_G f(z) \overline{g(z)} dv(z), \quad \|S\|_{B_2^*(G)} = \|g\|_{B_2(G)}.$$

Тогда

$$\gamma(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_G \frac{\overline{g(z)}}{(z - \xi)^2} dv(z), \quad \xi \in \mathbb{C} \setminus \overline{G}. \quad (1)$$

Рассмотрим сингулярный интегральный оператор $\mathbb{T}$ на $L_2(\mathbb{C})$

$$\mathbb{T}u(\xi) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|z - \xi| \geq \varepsilon} \frac{u(z)}{(z - \xi)^2} dv(z).$$

Предельный переход понимается в смысле $L_2(\mathbb{C})$. Вводя функцию $\Omega(w) = |w|^2/(\pi w^2)$, этот оператор запишем в виде

$$\mathbb{T}u(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|z - \xi| \geq \varepsilon} \frac{u(z)}{|z - \xi|^2} \Omega(z - \xi) dv(z).$$

Функцию Ω от одного комплексного переменного можно понимать как функцию от двух вещественных переменных. Эта функция удовлетворяет условиям следующей теоремы из работы [13, с. 52].

ТЕОРЕМА А. Пусть функция $\Omega: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ однородна степени 0 и удовлетворяет условию Липшица

$$|\Omega(x_1) - \Omega(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|^\alpha, \quad |x_1| = |x_2| = 1, \quad \exists \alpha > 0,$$

и

$$\int_{|x|=1} \Omega(x) d\sigma(x) = 0,$$

где $d\sigma(x)$ – элемент длины дуги окружности. Для $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$ положим

$$\mathbb{T}_\varepsilon(f)(x) = \int_{|x-y| \geq \varepsilon} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^2} f(y) dy.$$

Тогда

1) существует константа A (не зависящая от f и ε) такая, что

$$\|\mathbb{T}_\varepsilon(f)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} \leq A\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^2)};$$

2) предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{T}_\varepsilon(f) = \mathbb{T}(f)$ существует в смысле $L_2(\mathbb{R}^2)$ и

$$\|\mathbb{T}(f)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} \leq A\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^2)};$$

3) преобразования Фурье от f и $\mathbb{T}(f)$ связаны соотношением

$$(\widehat{\mathbb{T}f})(x) = m(x)\hat{f}(x),$$

где m – однородная функция степени 0 и

$$m(x) = \int_{|y|=1} \left(\frac{\pi i}{2} \operatorname{sign}(x \cdot y) + \ln \frac{1}{|x \cdot y|} \right) \Omega(y) d\sigma(y), \quad |x| = 1.$$

Применяя эту теорему, получим, что $\mathbb{T}$ непрерывно действует на $L_2(\mathbb{R}^2)$ и для преобразований Фурье верно соотношение

$$(\widehat{\mathbb{T}u})(\xi) = m(\xi)\hat{u}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{C},$$

где

$$m(\xi) = \int_{|z|=1} \left(\frac{\pi i}{2} \operatorname{sign}(\operatorname{Re}(z\bar{\xi})) + \ln \left(\frac{1}{|\operatorname{Re}(z\bar{\xi})|} \right) \right) \Omega(z) d\sigma(z),$$

$d\sigma$ – элемент длины дуги. Прямой подсчет убеждает, что

$$m(\xi) = e^{-2i \arg(\xi)}.$$

Таким образом, $\|\widehat{\mathbb{T}u}\|_{L_2(\mathbb{C})} = \|\hat{u}\|_{L_2(\mathbb{C})}$ и в силу равенства Парсеваля

$$\|\mathbb{T}u\|_{L_2(\mathbb{C})} = \|u\|_{L_2(\mathbb{C})},$$

т.е. оператор $\mathbb{T}$ является изометрией $L_2(\mathbb{R}^2)$. Из соотношения (1) видим, что $\gamma(\xi)$ можно понимать как сужение на $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ образа при отображении $\mathbb{T}$ функции $\bar{g}(z)$, продолженной нулем на всю плоскость, т.е.

$$\gamma(\xi) = \mathbb{T}\bar{g}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{C} \setminus \overline{G}.$$

Тем самым, имеем

$$\|\gamma\|_{B_2(\mathbb{C} \setminus \overline{G})} = \|\gamma\|_{L_2(\mathbb{C} \setminus \overline{G})} \leq \|g\|_{B_2(G)} = \|S\|_{B_2^*(G)}$$

и теорема 1 доказана.

Таким образом, оператор преобразования Гильберта непрерывно действует из пространства $B_2^*(G)$ в пространство $B_2(\mathbb{C} \setminus \overline{G})$ и инъективен. Возникает вопрос: когда этот оператор сюръективен? Целью этой работы является доказательство следующего факта.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Односвязная область $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ с жордановой границей называется *квазикругом*, если найдется постоянная $C > 0$ такая, что для любой пары точек $z_1, z_2 \in \partial G$ выполнено соотношение

$$\text{diam } l(z_1, z_2) \leq C|z_1 - z_2|,$$

где $l(z_1, z_2)$ – та из двух дуг множества $\partial G \setminus \{z_1, z_2\}$, которая имеет наименьший диаметр.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G – односвязная жорданова область в $\overline{\mathbb{C}}$. Для того чтобы оператор преобразования Гильберта, действующий из пространства $B_2^*(G)$ в $B_2(\mathbb{C} \setminus \overline{G})$, был сюръективен, необходимо и достаточно, чтобы область G была квазикругом.

Предварительно получим некоторые вспомогательные результаты.

ЛЕММА 2. Пусть $g \in B_2(G)$. Продолжим ее нулем на всю комплексную плоскость. Тогда $\mathbb{T} \bar{g}(\xi) \in B_2(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, то, что $\mathbb{T} \bar{g}(\xi) \in L_2(G)$, следует из теоремы А. Остается показать, что $\mathbb{T} \bar{g}(\xi)$ аналитична в G . Если K произвольный круг, содержащийся в G , и $\xi \in K$, то (см. [4])

$$\int_K \frac{\overline{g(z)}}{(z - \xi)^2} dv(z) = 0, \quad \xi \in K.$$

Поэтому

$$\mathbb{T} \bar{g}(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_G \frac{\overline{g(z)}}{(z - \xi)^2} dv(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{G \setminus K} \frac{\overline{g(z)}}{(z - \xi)^2} dv(\xi), \quad \xi \in K.$$

Из последнего равенства легко видеть, что функция $\mathbb{T} \bar{g}(\xi)$ аналитична в K . Поскольку круг K произвольный, лежащий в G , то $\mathbb{T} \bar{g}(\xi)$ аналитична в G .

Для области G определим операторы $\mathbb{T}_{1,G}$ и $\mathbb{T}_{2,G}$, которые действуют из пространства $\overline{B_2(G)}$ (здесь $\overline{B_2(G)} = \{f: \bar{f} \in B_2(G)\}$), а функцию f считаем продолженной нулем на $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$):

$$\begin{aligned} (\mathbb{T}_{2,G} f)(\xi) &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & \xi \in G, \\ (\mathbb{T} f)(\xi), & \xi \in \mathbb{C} \setminus \overline{G}, \end{cases} \\ (\mathbb{T}_{1,G} f)(\xi) &\stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{T} f)(\xi) - (\mathbb{T}_{2,G} f)(\xi). \end{aligned}$$

Если γ – преобразование Гильберта функционала из $B_2^*(G)$, порождаемого функцией $g \in B_2(G)$, то

$$\gamma(\xi) = (\mathbb{T}_{2,G} \bar{g})(\xi), \quad \xi \in \mathbb{C} \setminus \overline{G}.$$

Для произвольной односвязной области G оператор $\mathbb{T}_{2,G}$ ограничен как оператор из $\overline{B_2(G)}$ в $B_2(\mathbb{C} \setminus \overline{G})$, а оператор $\mathbb{T}_{1,G}$ действует из $\overline{B_2(G)}$ в $B_2(G)$, причем $\mathbb{T}_{1,D} \equiv 0$ ($D = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$) (см. [4]).

Сюръективность преобразования Гильберта равносильна сюръективности оператора $\mathbb{T}_{2,G}$. Справедлива следующая

ЛЕММА 3. Оператор $\mathbb{T}_{2,G}: \overline{B_2(G)} \rightarrow B_2(\mathbb{C} \setminus \overline{G})$ сюръективен тогда и только тогда, когда $\|\mathbb{T}_{1,G}\| < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Если $\mathbb{T}_{2,G}$ сюръективен, то этот оператор взаимно однозначен и, следовательно, по теореме об открытом отображении существует непрерывный обратный оператор $\mathbb{T}_{2,G}^{-1}$. Если $C = \|\mathbb{T}_{2,G}^{-1}\|$, то для любого $g \in B_2(G)$ имеем

$$\|g\|_{\overline{B_2(G)}} = \|\mathbb{T}_{2,G}^{-1}\mathbb{T}_{2,G}(g)\|_{\overline{B_2(G)}} \leq C\|\mathbb{T}_{2,G}(g)\|_{B_2(\mathbb{C} \setminus \overline{G})}$$

и

$$\|\mathbb{T}_{2,G}(g)\|_{B_2(\mathbb{C} \setminus \overline{G})} \geq \frac{1}{C}\|g\|_{\overline{B_2(G)}}.$$

Так как

$$\begin{aligned} \|g\|_{\overline{B_2(G)}}^2 &= \|\mathbb{T}g\|_{L_2(\mathbb{C})}^2 = \|\mathbb{T}_{1,G}(g)\|_{B_2(G)}^2 + \|\mathbb{T}_{2,G}(g)\|_{B_2(\mathbb{C} \setminus \overline{G})}^2 \\ &\geq \|\mathbb{T}_{1,G}(g)\|_{B_2(G)}^2 + \frac{1}{C^2}\|g\|_{\overline{B_2(G)}}^2, \end{aligned} \quad (2)$$

то

$$\|\mathbb{T}_{1,G}(g)\|_{B_2(G)}^2 \leq \left(1 - \frac{1}{C^2}\right)\|g\|_{\overline{B_2(G)}}^2$$

и, следовательно, $\|\mathbb{T}_{1,G}\| \leq (1 - 1/C^2)^{1/2} < 1$.

Достаточность. Пусть $\|\mathbb{T}_{1,G}\| < 1$. Тогда из равенства

$$\|g\|_{\overline{B_2(G)}}^2 = \|\mathbb{T}_{1,G}(g)\|_{B_2(G)}^2 + \|\mathbb{T}_{2,G}(g)\|_{B_2(\mathbb{C} \setminus \overline{G})}^2$$

получаем, что найдется $C > 0$ такая, что

$$C\|g\|_{\overline{B_2(G)}} \leq \|\mathbb{T}_{2,G}g\|_{B_2(\mathbb{C} \setminus \overline{G})} \quad \forall g \in B_2(G). \quad (3)$$

Образ $\text{Im}(\mathbb{T}_{2,G})$ плотен в $B_2(\mathbb{C} \setminus \overline{G})$. Действительно, функционал $\delta_z: f \rightarrow f(z)$, $z \in G$, $f \in B_2(G)$, принадлежит $B_2^*(G)$. Следовательно, при фиксированном $z \in G$ функция $\delta_z((\xi - \eta)^{-2}) = (\xi - z)^{-2} \in B_2(\mathbb{C} \setminus \overline{G})$ (теорема 1), а система $\{(\xi - z)^{-2}, z \in G\}$ полна в $B_2(\mathbb{C} \setminus \overline{G})$ (лемма 1).

По теореме Банаха в силу неравенства (3) оператор $\mathbb{T}_{2,G}$ сюръективен. Лемма 3 доказана.

Начиная доказательство теоремы 2, выделим два случая:

- 1) $\infty \notin G$;
- 2) $\infty \in G$.

Проведем доказательство для случая 1.

Однолистное конформное отображение $\varphi: D \rightarrow G$ единичного круга на G порождает изометрию $R_\varphi: B_2(G) \rightarrow B_2(D)$, действующую по правилу

$$g(z) \xrightarrow{R_\varphi} g(\varphi(\xi))\varphi'(\xi),$$

и соответственно изометрию $\overline{R}_\varphi: \overline{B_2(G)} \rightarrow \overline{B_2(D)}$, действующую по правилу

$$\overline{g(z)} \xrightarrow{\overline{R}_\varphi} \overline{g(\varphi(\xi))\varphi'(\xi)}.$$

Оператор $\mathbb{T}_{1,G}: \overline{B_2(G)} \rightarrow B_2(G)$ порождает оператор $A_G = R_\varphi \circ \mathbb{T}_{1,G} \circ \overline{R_\varphi}^{-1}$, действующий из $\overline{B_2(D)}$ в $B_2(D)$, причем, $\|A_G\| = \|\mathbb{T}_{1,G}\|$,

$$\begin{array}{ccc} \overline{B_2(G)} & \xrightarrow{\mathbb{T}_{1,G}} & B_2(G) \\ \overline{R_\varphi}^{-1} \uparrow & & \downarrow R_\varphi \\ \overline{B_2(D)} & \xrightarrow{A_G = R_\varphi \circ \mathbb{T}_{1,G} \circ \overline{R_\varphi}^{-1}} & B_2(D). \end{array}$$

Нетрудно показать, что

$$A_G \bar{g}(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_D \overline{g(z)} \frac{\varphi'(z)\varphi'(\xi)}{(\varphi(z) - \varphi(\xi))^2} dv(z), \quad g \in B_2(D).$$

Поскольку $\mathbb{T}_{1,D} \equiv 0$ (см. [13]), то

$$\begin{aligned} A_G \bar{g}(\xi) &= A_G \bar{g}(\xi) - \mathbb{T}_{1,D} \bar{g}(\xi) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_D \overline{g(z)} \left(\frac{\varphi'(z)\varphi'(\xi)}{(\varphi(z) - \varphi(\xi))^2} - \frac{1}{(z - \xi)^2} \right) dv(z) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_D \overline{g(z)} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial z} \ln \frac{\varphi(z) - \varphi(\xi)}{z - \xi} dv(z). \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, лемму 3 можно сформулировать следующим образом.

ЛЕММА 3'. *Оператор преобразования Гильберта, действующий из пространства $B_2^*(G)$ в пространство $B_2(\mathbb{C} \setminus \overline{G})$, сюръективен тогда и только тогда, когда $\|A_G\| < 1$.*

Пусть $\varphi(z) = z + c_1 z^2 + \dots$ — аналитическая в единичном круге D функция. Необходимое и достаточное условие однолистности φ в D дает критерий Грунскогo (см., например, [14, с. 574]).

ТЕОРЕМА В (Грунский). *Для того чтобы аналитическая в D функция вида $\varphi(z) = z + c_1 z^2 + \dots$ была однолистной в D , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\left| \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} x_n x_m \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{n},$$

где числа a_{mn} определяются из разложения функции двух комплексных переменных $\ln((\varphi(\xi) - \varphi(z))/(\xi - z))$ в окрестности нуля в ряд Тейлора

$$\ln \frac{\varphi(\xi) - \varphi(z)}{\xi - z} = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} \xi^m z^n, \quad (5)$$

а $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ — произвольная последовательность комплексных чисел, для которых правая часть неравенства сходится.

Класс однолистных и аналитических в D функций $\varphi(z) = z + c_1 z^2 + \dots$ обозначим через S . Через $S(k)$, $k < 1$, обозначим подмножество S , состоящее из функций,

однолистных и аналитических в D , которые допускают продолжение до k – квазиконформного автоморфизма расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ (см., например, [15]), т.е.

- 1) в любом замкнутом прямоугольнике $\{x + iy : a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\} \subset \mathbb{C}$ функции $\operatorname{Re} \varphi(x + iy)$, $\operatorname{Im} \varphi(x + iy)$ абсолютно непрерывны по $x \in [a, b]$ при почти всех $y \in [c, d]$ и абсолютно непрерывны по $y \in [c, d]$ при почти всех $x \in [a, b]$;
- 2) $\partial\varphi/\partial z, \partial\varphi/\partial\bar{z} \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{C})$;
- 3) функция φ при почти всех $z \in \mathbb{C}$ удовлетворяет уравнению Бельтрами

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}} = \mu(z) \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

где $\mu(z)$ – комплекснозначная измеримая в $\mathbb{C}$ функция такая, что $\|\mu\|_{L_\infty(\mathbb{C})} \leq k < 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что функция $\varphi(z) = z + c_1 z^2 + \dots$, $z \in D$, удовлетворяет усиленному неравенству Грунскогo с константой $k < 1$, если выполнено условие

$$\left| \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} x_n x_m \right| \leq k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{n}, \quad k < 1,$$

где $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ – произвольная последовательность комплексных чисел, для которых правая часть последнего неравенства сходится, а числа a_{mn} определяются из (5).

ЛЕММА 4. Пусть $\varphi(z) = z + c_2 z^2 + \dots$ – конформное отображение единичного круга $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на область G . Оператор A_G действует из пространства $\overline{B_2(D)}$ в $B_2(D)$,

$$A_G f(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_D f(z) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial z} \ln \frac{\varphi(z) - \varphi(\xi)}{z - \xi} dv(z).$$

Следующие условия эквивалентны:

- 1) функция φ удовлетворяет усиленному условию Грунскогo с константой $k < 1$;
- 2) для любой функции $f \in \overline{B_2(D)}$ выполнено условие

$$|(A_G f, \bar{f})_{B_2(D)}| \leq k \|f\|_{\overline{B_2(D)}}^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любая последовательность комплексных чисел $\{x_n\}$, удовлетворяющая условию $\sum_{n=1}^{\infty} (|x_n|^2/n) < \infty$, порождает функцию из пространства $\overline{B_2(D)}$:

$$f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{z}^{n-1}, \quad z \in D, \quad \|f\|_{\overline{B_2(D)}}^2 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{n} < \infty. \quad (6)$$

Обратно, всякая функция $f \in \overline{B_2(D)}$ может быть представлена в виде (6).

Непосредственным подсчетом убеждаемся, что неравенство

$$\left| \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} x_n x_m \right| \leq k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{n}, \quad k < 1,$$

эквивалентно неравенству

$$|(A_G f, \bar{f})_{B_2(D)}| \leq k \|f\|_{\overline{B_2(D)}}^2, \quad k < 1,$$

если $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{z}^{n-1}$, $z \in D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Необходимость. Пусть G – область, не являющаяся квазикругом, φ – конформное отображение единичного круга D на область G . Тогда найдется последовательность функций f_n из пространства $B_2(D)$, $\|f_n\| = 1$, такая, что

$$|(A_G f_n, \bar{f}_n)_{B_2(D)}| \rightarrow 1.$$

Действительно, в противном случае φ удовлетворяет усиленному условию Грунского с константой $k < 1$. Тогда по теореме Поммеренке (см. [15]) найдется константа k' , $k < k' < 1$, такая, что $\varphi \in S(k')$, и, следовательно, область G – квазикруг [15]. Следовательно,

$$\|A_G\| \geq \sup_n \|A_G f_n\| \geq \sup_n |(A_G f_n, \bar{f}_n)_{B_2(D)}| \geq 1.$$

Таким образом, по лемме 3' оператор преобразования Гильберта не сюръективен.

Достаточность. Пусть область G – квазикруг. Тогда конформное отображение единичного круга D на область G продолжается до k -квазиконформного автоморфизма расширенной комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}}$ (см. [15], [16]). Следовательно, выполняется усиленное неравенство Грунского с константой $k < 1$ [15]. То есть справедливо соотношение

$$|(A_G f, \bar{f})_{B_2(D)}| \leq k \|f\|_{B_2(D)}^2 \quad \forall f \in \overline{B_2(D)}. \quad (7)$$

Рассмотрим оператор $\overline{A_G} f \stackrel{\text{def}}{=} \overline{A_G f}$. Этот оператор не является комплексно линейным. Однако он линеен над полем вещественных чисел. Кроме того, справедливо равенство $|(A_G f, \bar{f})_{B_2(D)}| = |(\overline{A_G} f, f)_{\overline{B_2(D)}}|$. Легко видеть, что $(\overline{A_G}^2 f, f)_{\overline{B_2(D)}} = \|\overline{A_G} f\|_{\overline{B_2(D)}}^2$. Нетрудно показать, что для любого $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \|\overline{A_G} f\|_{\overline{B_2(D)}}^2 &= \frac{1}{4} \left(\left(\overline{A_G} \left(\lambda f + \frac{1}{\lambda} \overline{A_G} f \right), \lambda f + \frac{1}{\lambda} \overline{A_G} f \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\overline{A_G} \left(\lambda f - \frac{1}{\lambda} \overline{A_G} f \right), \lambda f - \frac{1}{\lambda} \overline{A_G} f \right) \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Используя (7), оценим правую часть последнего равенства по модулю. Получим

$$\begin{aligned} \|\overline{A_G} f\|_{\overline{B_2(D)}}^2 &\leq \frac{k}{4} \left(\left\| \lambda f + \frac{1}{\lambda} \overline{A_G} f \right\|_{\overline{B_2(D)}}^2 + \left\| \lambda f - \frac{1}{\lambda} \overline{A_G} f \right\|_{\overline{B_2(D)}}^2 \right) \\ &= \frac{k}{2} \left(\lambda^2 \|f\|_{\overline{B_2(D)}}^2 + \frac{1}{\lambda^2} \|\overline{A_G} f\|_{\overline{B_2(D)}}^2 \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Правая часть последнего равенства достигает минимума при

$$\lambda^2 = \frac{\|\overline{A_G} f\|_{\overline{B_2(D)}}}{\|f\|_{\overline{B_2(D)}}}.$$

Подставляя это значение в соотношение (9), получим

$$\|\overline{A_G} f\|_{\overline{B_2(D)}}^2 \leq k \|\overline{A_G} f\|_{\overline{B_2(D)}} \|f\|_{\overline{B_2(D)}}.$$

Следовательно, $\|A_G\| \leq k < 1$. Поэтому в силу леммы 3' оператор преобразования Гильберта, действующий из пространства $B_2^*(G)$ в пространство $B_2(\mathbb{C} \setminus \overline{G})$, сюръективен. Теорема 2 доказана для случая $\infty \notin G$.

Доказательство этой теоремы для случая $\infty \in G$ аналогично. Только нужно рассматривать конформные отображения внешности единичного круга $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ на область G . Функцию, осуществляющую это отображение, можно записать в виде

$$\varphi(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

Класс функций такого вида, мероморфных (с полюсом в ∞) и однолистных в $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$, обозначим через Σ . Через $\Sigma(k)$, $k < 1$, обозначим подмножество Σ , состоящее из функций, однолистных и мероморфных в $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$, которые допускают продолжение до k -квазиконформного автоморфизма $\overline{\mathbb{C}}$. Оператор A_G в этом случае действует из $B_2(\mathbb{C} \setminus \overline{D})$ в $B_2(G)$ и имеет вид

$$A_G f(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}} f(z) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial z} \ln \frac{\varphi(z) - \varphi(\xi)}{z - \xi} dv(z), \quad f \in \overline{B_2(\mathbb{C} \setminus \overline{D})}.$$

Для краткости приведем лишь теоремы и леммы, используемые в этом случае.

ТЕОРЕМА В' (Грунский). *Для того чтобы мероморфная в $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ функция вида $\varphi(z) = z + a_0 + a_1/z + a_2/z^2 + \dots$ была однолистной в $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\left| \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} x_n x_m \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{n},$$

где числа a_{mn} определяются из следующего представления функции двух комплексных переменных $\ln((\varphi(\xi) - \varphi(z))/(\xi - z))$ для достаточно больших по модулю чисел ξ и z :

$$\ln \frac{\varphi(\xi) - \varphi(z)}{\xi - z} = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} \xi^{-m} z^{-n}, \quad (10)$$

$a \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ — произвольная последовательность комплексных чисел, для которых правая часть неравенства сходится.

Если для произвольной последовательности комплексных чисел x_n выполняется неравенство

$$\left| \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} x_n x_m \right| \leq k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{n}, \quad k < 1,$$

то говорим, что соответствующая функция φ удовлетворяет усиленному неравенству Грунского с константой k .

ЛЕММА 4'. Пусть $\varphi(z) = z + a_0 + a_1/z + a_2/z^2 + \dots$ – конформное отображение области $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ на область G . Оператор A_G действует из пространства $B_2(\mathbb{C} \setminus \overline{D})$ в $B_2(\mathbb{C} \setminus \overline{D})$,

$$A_G f(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}} f(z) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial z} \ln \frac{\varphi(z) - \varphi(\xi)}{z - \xi} dv(z).$$

Следующие условия эквивалентны:

- 1) функция φ удовлетворяет усиленному условию Грунскогo с константой $k < 1$;
- 2) для любой функции $f \in \overline{B_2(\mathbb{C} \setminus \overline{D})}$ выполнено условие

$$|(A_G f, \overline{f})_{B_2(\mathbb{C} \setminus \overline{D})}| \leq k \|f\|_{B_2(\mathbb{C} \setminus \overline{D})}^2.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Державец Б. А. Пространства функций, аналитических в выпуклых областях $\mathbb{C}^n$ и имеющих заданное поведение вблизи границы // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276. № 6. С. 1297–1300.
- [2] Любарский Ю. И. Теорема Винера–Пэли для выпуклых множеств // Изв. АН АрмССР. Матем. 1988. Т. 62. № 2. С. 162–172.
- [3] Лупенко В. И., Юлмухаметов Р. С. Обобщение теоремы Винера–Пэли на функционалы в пространствах Смирнова // Тр. МИАН. 1991. Т. 200. С. 245–254.
- [4] Напалков В. В. (мл.), Юлмухаметов Р. С. О преобразовании Коши функционалов на пространстве Бергмана // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 7. С. 77–86.
- [5] Köthe G. Dualität in der Funktionentheorie // J. Reine Angew. Math. 1953. V. 191. № 1/2. P. 30–49.
- [6] Хёрмандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1986.
- [7] Юлмухаметов Р. С. Пространство аналитических функций, имеющих заданный рост вблизи границы // Матем. заметки. 1982. Т. 32. № 1. С. 41–57.
- [8] Напалков В. В. Пространства аналитических функций заданного роста вблизи границы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. № 2. С. 287–305.
- [9] Епифанов О. В. Двойственность одной пары пространств аналитических функций ограниченного роста // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319. № 6. С. 1297–1300.
- [10] Merenkov S. A. On the Cauchy transform of the Bergman space // Математическая физика, анализ, геометрия. Вып. 4. Харьков, 1999.
- [11] Calderon A. P. Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators // Proc. Mat. Acad. Sci. USA. 1977. P. 1324–1327.
- [12] Coifman R. R., McIntosh A., Meyer Y. L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur L^2 pour les courbes Lipschitziennes // Annals of Math. 1982. V. 116. № 2.
- [13] Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
- [14] Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
- [15] Крушкаль С. Л., Кюнау Р. Квазиконформные отображения – новые методы и приложения. Новосибирск: Наука, 1984.
- [16] Гайер Д. Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. М.: Мир, 1987.

(В. В. Напалков) Институт математики с ВЦ Уфимского научного центра РАН
(Р. С. Юлмухаметов) Башкирский государственный университет
E-mail: napalkov@bsu.bashedu.ru, yulmukhametov@bashedu.ru

Поступило
07.12.1999