Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. Н. Нужин, Об одном вопросе М. Кондера, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 1, 79–87

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm721>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 14:59:59

УДК 519.4

ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ М. КОНДЕРА

Я. Н. Нужин

Доказано, что $SL_3(\mathbb{Z})$ не порождается двумя элементами порядков 2 и 3.
Библиография: 6 названий.

Основным результатом работы является

ТЕОРЕМА. *Специальная линейная группа размерности 3 над кольцом целых чисел $SL_3(\mathbb{Z})$ не порождается двумя элементами порядков 2 и 3.*

Эта теорема¹ дает отрицательный ответ на следующий вопрос М. Кондера из [1, вопрос 14.49].

Является ли группа $SL_3(\mathbb{Z})$ факторгруппой группы $PSL_2(\mathbb{Z})$? Так как модулярная группа изоморфна свободному произведению двух циклических групп порядков 2 и 3, то вопрос в том, порождается ли группа $SL_3(\mathbb{Z})$ двумя элементами порядков 2 и 3.

Изоморфизм группы $PSL_2(\mathbb{Z})$ и свободного произведения двух циклических групп порядков 2 и 3 был установлен Р. Фрике и Ф. Клейном в 1890 году [2]. Группы, порождаемые двумя элементами порядков 2 и 3, будем называть $(2, 3)$ -*порожденными*. Очевидно, группа $SL_2(\mathbb{Z})$ не $(2, 3)$ -порожденная, так как она содержит единственную инволюцию, которая является центральной. Такая же и группа $SL_4(\mathbb{Z})$ в силу ее гомоморфизма на $SL_4(\mathbb{Z}_2) \simeq A_8$ и следующего результата Г. А. Миллера [3]. Знакопеременная группа A_n , $n \geq 5$, тогда и только тогда $(2, 3)$ -порожденная, когда $n \neq 6, 7, 8$. С другой стороны, в [4] показано, что при $n \geq 28$ группа $SL_n(\mathbb{Z})$ является $(2, 3)$ -порожденной. Таким образом, остается открытым вопрос: будет ли $(2, 3)$ -порожденной группа $SL_n(\mathbb{Z})$ при $5 \leq n \leq 27$? Кажется правдоподобным, что и в этих случаях ответ будет положительным. Потому что, как правило, при $n \geq 5$ для группы $SL_n(K)$ над каким-то кольцом K уже начинается общая ситуация.

Конечно, вопрос М. Кондера можно поставить еще шире: какие группы Шевалле над кольцом целых чисел являются $(2, 3)$ -группами?

Основной результат статьи анонсировался в [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-01256.

¹Когда статья была уже подготовлена, В. Д. Мазуров сообщил автору, что аналогичный результат получили итальянские математики Ш. Тамбурини и П. Цукка (препринт).

1. Определения и предварительные результаты. Далее всюду $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ – кольцо целых и соответственно поле рациональных чисел.

ЛЕММА 1. *Все элементы порядка 3 из $SL_3(\mathbb{Q})$ сопряжены в $GL_3(\mathbb{Q})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что любой элемент $B = (b_{ij})$ порядка 3 из $SL_3(\mathbb{Q})$ сопряжен в $GL_3(\mathbb{Q})$ с матрицей

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При сопряжении матрицы B мономиальными $(0, 1)$ -матрицами транзитивно переставляются элементы матрицы B на всех позициях (i, j) при $i \neq j$. Поэтому либо B – диагональная матрица, либо с точностью до сопряжения мономиальной $(0, 1)$ -матрицей $b_{13} \neq 0$. Так как мультипликативная группа поля рациональных чисел не содержит элементов порядка 3, то первый случай невозможен.

Пусть $b_{13} \neq 0$. В этом случае с точностью до сопряженности диагональным элементом из $GL_3(\mathbb{Q})$ можно считать, что $b_{13} = 1$, т.е.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 1 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Сопрягая сейчас матрицу B последовательно трансвекциями

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b_{23} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b_{33} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & b_{12} & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b_{11} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получаем, что с точностью до сопряжения B имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & d & 0 \\ c & b & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее при сопряжении какой-то матрицей X на обратную матрицу X^{-1} умножаем справа. Так как любая матрица порядка 3 из $SL_3(\mathbb{Q})$ имеет жорданову нормальную форму вида $\text{diag}(\theta, 1, \theta^2)$, где θ — первообразный корень третьей степени из единицы, то $\text{tr} \beta = 0$ и, в частности, $d = 0$. Таким образом, из условия $\beta^3 = 1$ получаем, что и $c = 0$. Легко проверить, что при $d = c = 0$ матрица B имеет порядок 3 только при $ab = 1$. Сопрягая теперь матрицу B диагональной матрицей $\text{diag}(1, a, a^{-1})$, получим матрицу β . Лемма доказана.

Как обычно, под *циркулянтотом* (циркулянтной матрицей размерности 3) будем понимать следующую матрицу:

$$T = T(t, u, v) = \begin{pmatrix} t & u & v \\ v & t & u \\ u & v & t \end{pmatrix}.$$

Если матрица β такая же, как и в доказательстве леммы 1, то имеет место следующее представление:

$$T = t\beta^3 + u\beta^2 + v\beta.$$

Из этого представления следует, что все циркулянты над каким-либо ассоциативным коммутативным кольцом с единицей составляют коммутативную полугруппу, а множество всех обратимых циркулянтов является группой.

ЛЕММА 2. Пусть $T = T(t, u, v)$ – циркулянт, а $T' = T'(t', u', v')$ – его обратная циркулянтная матрица. Тогда

$$(t + u + v)(t' + u' + v') = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сложив коэффициенты в первой строке у произведения TT' , получим искомое равенство. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $T = T(t, u, v)$ – циркулянт над полем комплексных чисел с условием $t + u + v = 1$ и $T' = T'(t', u', v')$ – его обратная циркулянтная матрица. Пусть

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ a & 1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

причем сумма $a + b$ является рациональным числом, отличным от -2 , и $T'\alpha T \in SL_n(\mathbb{Q})$. Тогда все числа t, u, v, a, b являются рациональными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\begin{aligned} T'\alpha T &= (a_{ij}), \quad i, j = 1, 2, 3, \\ s_i &= a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

По лемме 2 $t + u + v = t' + u' + v' = 1$. Простые вычисления показывают, что

$$s_1 = (a + b + 2)u' - 1, \quad s_2 = (a + b + 2)t' - 1, \quad s_3 = (a + b + 2)v' - 1.$$

По условию леммы все s_i должны быть рациональными числами и $a + b + 2 \neq 0$. Отсюда каждое из чисел t, u, v рациональное. Теперь из условия леммы вытекает, что $\alpha \in SL_n(\mathbb{Q})$, а следовательно, числа a и b также рациональные. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть a, b – комплексные числа, причем $a + b \neq -2$, и группа M , порожденная двумя матрицами

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ a & 1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

сопряжена в $GL_3(C)$ с подгруппой из $SL_3(\mathbb{Q})$. Тогда M сопряжена в $GL_3(\mathbb{Q})$ с той же подгруппой из $SL_3(\mathbb{Q})$ и, в частности, числа a, b рациональные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию леммы существуют невырожденная комплексная матрица $A = (a_{ij})$ и матрицы $B = (b_{ij})$ и $C = (c_{ij})$ из $SL_3(\mathbb{Q})$ такие, что

$$\alpha A = AC, \tag{1}$$

$$\beta A = AB. \tag{2}$$

Запишем (2) более подробно в виде

$$\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Матричное равенство (3) задает систему линейных однородных уравнений с целочисленными коэффициентами относительно неизвестных a_{ij} . В следующей таблице первая строка задает упорядоченные неизвестные a_{ij} , а остальные девять составляют основную матрицу системы (3):

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}
b_{11}	b_{21}	b_{31}	0	0	0	-1	0	0
b_{12}	b_{22}	b_{32}	0	0	0	0	-1	0
b_{13}	b_{23}	b_{33}	0	0	0	0	0	-1
-1	0	0	b_{11}	b_{21}	b_{31}	0	0	0
0	-1	0	b_{12}	b_{22}	b_{32}	0	0	0
0	0	-1	b_{13}	b_{23}	b_{33}	0	0	0
0	0	0	-1	0	0	b_{11}	b_{21}	b_{31}
0	0	0	0	-1	0	b_{12}	b_{22}	b_{32}
0	0	0	0	0	-1	b_{13}	b_{23}	b_{33}

(4)

В блочном виде основную матрицу можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} B & O & -E \\ -E & B & O \\ O & -E & B \end{pmatrix}.$$

Умножив ее слева последовательно на матрицы

$$\begin{pmatrix} O & E & O \\ O & O & E \\ E & O & O \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E & O & O \\ O & E & O \\ B & O & E \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E & O & O \\ O & E & O \\ O & B^2 & E \end{pmatrix},$$

получим

$$\begin{pmatrix} -E & B & O \\ O & -E & B \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ранг основной матрицы равен 6, т.е. фундаментальная система решений однородной системы (3) состоит из трех векторов, которые будем записывать в виде (3, 3)-матриц.

По лемме 1 существует рациональное решение системы (3)

$$A = (a_{ij}),$$

причем $\det A \neq 0$. С другой стороны, матрицы βA и $\beta^2 A$ тоже являются решениями системы (3) и, более того, вместе с A они составляют базис пространства решений этой

системы. Действительно, если $tA + u\beta A + v\beta^2 A = 0$ для каких-то $t, u, v \in C$, то, учитывая, что A – невырожденная матрица, получаем

$$T = \begin{pmatrix} t & v & u \\ u & t & v \\ v & u & t \end{pmatrix} = O.$$

Итак, по условию леммы существует комплексная невырожденная матрица, удовлетворяющая уравнениям (1) и (2). По доказанному выше она представляется в виде TA , где T – циркулянтная невырожденная матрица, а A – невырожденная матрица с рациональными коэффициентами. С точностью до умножения на скалярную матрицу можно считать, что $t + u + v = 1$. В этом случае по лемме 3 из уравнения (1) вытекает, что подгруппа M сопряжена в $GL_3(\mathbb{Q})$ с подгруппой $\langle B, C \rangle$ из $SL_3(\mathbb{Q})$ и, в частности, числа a и b рациональные. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть подгруппа H из $SL_n(\mathbb{Z})$ порождается множеством матриц, у которых сумма по все столбцам (строкам) нечетна. Тогда H – собственная подгруппа группы $SL_n(\mathbb{Z})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Образ подгруппы H при гомоморфизме $SL_n(\mathbb{Z})$ на $SL_n(\mathbb{Z}_2)$, индуцированном кольцевым гомоморфизмом $\mathbb{Z}$ на $\mathbb{Z}_2$, является приводимой подгруппой, так как H стабилизирует вектор $(1, 1, \dots, 1)$. Поэтому H – собственная подгруппа в $SL_n(\mathbb{Z})$. Лемма доказана.

Пусть K – произвольное ассоциативное коммутативное кольцо с единицей. Набор его идеалов $\sigma = \sigma_{ij}$ называется *ковром идеалов*, если

$$\sigma_{ik}\sigma_{kj} \subseteq \sigma_{ij}, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n.$$

Множество матриц

$$\{x \in SL_n(K) \mid x_{ij} \equiv \delta_{ij} \pmod{\sigma_{ij}}\}$$

является группой, которая называется *ковровой подгруппой*, определяемой ковром σ (см., например, [6, с. 145]).

ЛЕММА 6. Пусть a, b – рациональные числа и $a + b = 2$. Положим

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ a & 1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть существует невырожденная матрица R из $GL_3(\mathbb{Q})$ такая, что

$$M = R^{-1}\langle \alpha, \beta \rangle R \subseteq SL_3(\mathbb{Z}).$$

Тогда M является собственной подгруппой группы $SL_3(\mathbb{Z})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что матрица R может быть представлена в виде произведения DA , где D – скалярная матрица, а $A = (a_{ij})$ – матрица с целыми коэффициентами. Поэтому по условию леммы существуют матрицы $B = (b_{ij})$ и $C = (c_{ij})$ из $SL_3(\mathbb{Z})$ и взаимно простые целые числа p и q такие, что

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{p}{q} & 1 & \frac{2q-p}{q} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Пусть q нечетное. Через $\mathbb{Z}[1/q]$ обозначим расширение кольца $\mathbb{Z}$ с помощью элемента $1/q$. В силу нечетности q кольцевой гомоморфизм $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ индуцирует групповой гомоморфизм $\varphi: SL_3(\mathbb{Z}[1/q]) \rightarrow SL_3(2)$. Если подгруппа M совпадает с $SL_3(\mathbb{Z})$, то ее образ при гомоморфизме φ должен быть изоморфен $SL_3(2)$, что невозможно в силу приводимости подгруппы $\varphi(\langle \alpha, \beta \rangle)$, которая стабилизирует вектор $(1, 1, 1)$. Таким образом, при нечетном q подгруппа M собственная.

Далее предполагаем, что q четно, а p нечетно. С точностью до умножения на скалярную матрицу можно считать, что хотя бы один из коэффициентов a_{ij} нечетен. Уравнения (3) и (6) эквивалентны, а с учетом таблицы (4) они дают следующее утверждение: если в какой-то строке матрицы A все элементы четные, то все элементы матрицы A четные, а так как матрица A имеет нечетный коэффициент, то в каждой ее строке найдется хотя бы по одному нечетному элементу. С другой стороны, из (5) следует, что сумма

$$a_{1i} \frac{p}{q} + a_{2i} + a_{3i} \frac{2q-p}{q}, \quad i = 1, 2, 3,$$

является целым числом. Поэтому

$$p(a_{1i} - a_{3i}) = m_i q, \quad i = 1, 2, 3,$$

для некоторого целого числа m_i . Отсюда в силу четности q числа a_{1i} и a_{3i} , $i = 1, 2, 3$, одновременно либо четные, либо нечетные.

Пусть все a_{11}, a_{12}, a_{13} нечетные. Тогда a_{31}, a_{32}, a_{33} также являются нечетными. Из (5) и (6) следует, что у матриц C и B суммы по всем столбцам нечетные. Поэтому по лемме 5 матрицы C и B не могут порождать всю группу $SL_3(\mathbb{Z})$.

Пусть a_{11}, a_{12} четные, а a_{13} нечетное. Тогда a_{31}, a_{32} также являются четными, а a_{33} нечетное. Из (5) и (6) следует, что $c_{31}, c_{32}, b_{31}, b_{32}$ четные. Следовательно, группа $\langle B, C \rangle$ лежит в собственной ковровой подгруппе группы $SL_3(\mathbb{Z})$, определяемой ковром

$$\begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix}.$$

Аналогично рассматриваются другие два случая, когда a_{12}, a_{13} четные, а a_{11} нечетное, или a_{11}, a_{13} четные, а a_{12} нечетное. В этих случаях группа $\langle B, C \rangle$ лежит в собственных ковровых подгруппах группы $SL_3(\mathbb{Z})$, определяемых соответственно коврами

$$\begin{pmatrix} \mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 2\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix}.$$

Остается рассмотреть три случая, когда в первой строке по два нечетных элемента. Все они подобны, поэтому рассмотрим один из них, например, когда a_{11}, a_{12} нечетные.

Итак, пусть a_{11}, a_{12} нечетные, а a_{13} четное. Определим, какой вид имеют матрицы B и C . Из (5) и (6) вытекает, что в парах c_{11} и c_{21} , c_{12} и c_{22} , b_{11} и b_{21} , b_{12} и b_{22} элементы имеют разную четность, а в парах c_{13} и c_{23} , c_{13} и c_{23} – одинаковую. Отсюда при

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

матрицы LCL^{-1} и LBL^{-1} лежат в ковровой подгруппе, определяемой ковром

$$\begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 2\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix}.$$

Поэтому подгруппа M является собственной в группе $SL_3(\mathbb{Z})$. Лемма доказана.

2. Доказательство основной теоремы. Пусть α – произвольная инволюция, а β – произвольный элемент порядка 3 из $SL_3(\mathbb{Z})$. Положим

$$M = \langle \alpha, \beta \rangle.$$

Покажем, что в любом случае подгруппа M является собственной подгруппой группы $SL_3(\mathbb{Z})$.

Используя жорданову нормальную форму, несложно получить два следующих утверждения:

- 1) любая инволюция из $SL_3(\mathbb{Z})$ приводится сопряжением матрицей из $GL_3(C)$ к виду $\text{diag}(-1, -1, 1)$ и, в частности, $\text{tr } \alpha = -1$;
- 2) любой элемент порядка 3 из $SL_3(\mathbb{Z})$ приводится сопряжением матрицей из $GL_3(C)$ к виду $\text{diag}(\theta, 1, \theta^2)$, где θ – примитивный корень степени 3 из 1, и, в частности, $\text{tr } \beta = 0$.

Таким образом, можно считать, что $\alpha = (a_{ij})$ для некоторых комплексных чисел a_{ij} , а $\beta = \text{diag}(\theta, 1, \theta^2)$.

Возможны следующие четыре случая:

- 1) $a_{12} = a_{13} = 0$;
- 2) $a_{12} = 0, a_{13} \neq 0$;
- 3) $a_{12} \neq 0, a_{13} = 0$;
- 4) $a_{12}a_{13} \neq 0$.

Очевидно, в первом случае подгруппа M приводима. Во втором и в третьем случаях из условия $\alpha^2 = 1$ получаем $a_{32} = 0$ и соответственно $a_{23} = 0$, и снова в обоих случаях M – приводимая подгруппа. Рассмотрим последний случай.

Пусть $a_{12}a_{13} \neq 0$. С точностью до сопряженности диагональным элементом из $GL_3(C)$ можно считать, что

$$a_{11} = a, \quad a_{22} = b, \quad a_{12} = k, \quad a_{13} = m,$$

где a, b – фиксированные, а k, m – произвольные ненулевые комплексные числа. Выразим через a, b, k, m остальные элементы a_{ij} матрицы α , используя условие $\alpha^2 = 1$.

Так как $\operatorname{tr} \alpha = 0$, то

$$a_{33} = -1 - a - b.$$

Далее равенство $a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + a_{i3}a_{3j} = \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера, кратко будем обозначать через (i, j) . Равенство $(1, 2)$ есть $ak + kb + ma_{32} = 0$; отсюда

$$a_{32} = -\frac{k}{m}(a + b).$$

Подобным образом из $(3, 2)$, $(1, 3)$ и $(1, 1)$ последовательно получаем

$$a_{31} = -\frac{1}{m}(a + b)(1 + a), \quad a_{23} = \frac{m}{k}(1 + b), \quad a_{21} = \frac{1}{k}(1 + a)(1 + b).$$

Таким образом,

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & k & m \\ \frac{1}{k}(1 + a)(1 + b) & b & \frac{m}{k}(1 + b) \\ -\frac{1}{m}(a + b)(1 + a) & -\frac{k}{m}(a + b) & -1 - a - b \end{pmatrix}.$$

Элементарные вычисления показывают, что

$$\det \alpha = 1 + (a + b)(1 + a)(1 - b).$$

Так как по условию $\det \alpha = 1$, то

$$(a + b)(1 + a)(1 - b) = 0.$$

Если $a = -b$ или $a = -1$, то M – приводимая подгруппа.

Пусть $b = 1, a \neq -1$. Тогда

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & k & m \\ \frac{2}{k}(1 + a) & 1 & \frac{2}{k}m \\ -\frac{1}{m}(1 + a)^2 & -\frac{k}{m}(1 + a) & -2 - a \end{pmatrix}.$$

Как отмечалось выше, элементы k и m независимо от a могут принимать любые ненулевые значения. Положим $k = 2$, а $m = -1 - a$. Тогда

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 - a \\ 1 + a & 1 & -1 - a \\ 1 + a & 2 & -2 - a \end{pmatrix}.$$

Если θ – такой же, как и выше, примитивный корень степени 3 из 1, то матрица

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \theta^2 \\ \theta & 1 & \theta \\ \theta^2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

обратима и

$$B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 - \theta & \theta \\ 1 & 1 & 1 \\ \theta & -1 - \theta & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $D = \text{diag}(1, \theta, 1)$. Тогда

$$D^{-1}B^{-1}\alpha BD = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \alpha(\theta^2 - \theta) - \theta^2 - 3\theta & 1 & \alpha(\theta - \theta^2) - 2\theta^2 - 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D^{-1}B^{-1}\beta BD = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

причем сумма элементов второй строки матрицы $D^{-1}B^{-1}\alpha BD$ равны 3. Далее применяем результаты из п. 1.

Очевидно, подгруппа

$$G = \langle D^{-1}B^{-1}\alpha BD, D^{-1}B^{-1}\beta BD \rangle$$

сопряжена в $GL_3(C)$ с подгруппой

$$M = \langle \alpha, \beta \rangle \subseteq SL_3(\mathbb{Z}).$$

Поэтому по лемме 4 существует матрица $R \in GL_3(\mathbb{Q})$ такая, что

$$R^{-1}GR = M.$$

Теперь по лемме 6 получаем, что M – собственная подгруппа группы $SL_3(\mathbb{Z})$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мазуров В. Д., Хухро Е. И. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. Изд. 14. Новосибирск, 1999.
- [2] Fricke R., Klein F. Vorlesungen über die Theorie der Elliptischen Modulfunktionen. V. 1, 2. Leipzig: Teubner, 1890.
- [3] Miller G. A. On the groups generated by two operators // Bull. AMS. 1901. V. 7. P. 424–426.
- [4] Tamburini M. C., Wilson J. S., Gavioli N. On the (2, 3)-generation of some classical groups I // J. Algebra. 1994. V. 168. P. 353–370.
- [5] Нужин Я. Н. Порождающие элементы группы $PSL_n(\mathbb{Z})$ // IV Международная алгебраическая конференция. Тезисы докл. Новосибирск, 2000. С. 129–130.
- [6] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1982.