Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. С. Пулькина, Нелокальная задача с интегральными условиями для квазилинейного гиперболического уравнения, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 1, 88–95

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm722>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 18:13:49

УДК 517.956.35

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Л. С. Пулькина

В статье рассматривается нелокальная задача с интегральными условиями для квазилинейного гиперболического уравнения в прямоугольной области. Доказано существование и единственность обобщенного решения.

Библиография: 20 названий.

1. Введение. Математическое моделирование некоторых физических явлений и биологических процессов часто приводит к нелокальным задачам для уравнений в частных производных второго порядка. Весьма удобным способом описания налагаемых на искомое решение условий является задание их в интегральной форме как среднее значение решения на принадлежащих области, в которой ищется решение, множествах. Интегральные условия возникают в тех случаях, когда, например, невозможно непосредственное измерение каких-либо физических величин, но известно их усредненное значение. Подобные ситуации имеют место при изучении явлений, происходящих в плазме [1], процессов распространения тепла [2]–[6], некоторых технологических процессов [7], процессов влагопереноса в пористых средах [8], [9], обратных задачах [10], а также в задачах математической биологии [11] и демографии [12].

По-видимому, одной из первых работ, относящихся к исследованию задач с интегральными условиями, является работа [4], в которой доказана однозначная разрешимость смешанной задачи с условиями Дирихле на части границы и интегральным условием для одномерного уравнения теплопроводности. В статье [2] этот результат распространен на общее уравнение параболического типа.

В настоящее время теория нелокальных задач для дифференциальных уравнений интенсивно развивается. В работах А. К. Гущина и В. П. Михайлова (см. [13] и библиография там же) исследована разрешимость нелокальных задач для эллиптических уравнений второго порядка, в которых значение решения на границе рассматриваемой области связано со значениями во внутренних точках с помощью некоторого оператора, который, в частности, может быть интегральным. Б. П. Панеях в работе [14] рассмотрел класс нелокальных условий, с помощью которых значения решения в точке границы выражаются через интеграл от решения по соответствующей этой точке мере и найдены ограничения, при которых существует единственное классическое решение поставленной задачи. В ряде работ изучено расположение спектра операторов, возникающих при исследовании нелокальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений [15]

и уравнений в частных производных [16]. В последнее время появились работы, в которых изучаются нелокальные задачи с интегральными условиями для гиперболических уравнений. В работах [17], [18] рассмотрены смешанные задачи, в которых одно или оба граничных условия заменены интегральными. В [19] доказана однозначная разрешимость задачи, имеющей в качестве данных только интегральные условия. Следует отметить, что классическое решение задачи в такой постановке, которая может быть названа интегральным аналогом задачи Гурса, для простейшего уравнения $u_{xy} = 0$ получена в [20].

В предлагаемой заметке рассматривается квазилинейное уравнение гиперболического типа, для которого изучается задача с интегральными условиями.

2. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{xy} + (Au)_x + (Bu)_y + Cu = f(x, y, u), \quad (1)$$

коэффициенты которого $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$ ограничены, имеют ограниченные производные первого порядка, а коэффициент $C(x, y)$ имеет также ограниченную смешанную производную в прямоугольнике $D = \{(x, y): 0 < x < a, 0 < y < b\}$. Нас будет интересовать вопрос о существовании и единственности обобщенного решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям

$$\int_0^a u(x, y) dx = \psi(y), \quad \int_0^b u(x, y) dy = \phi(x).$$

Без ограничения общности можно положить $\psi(y) = \phi(x) = 0$. Действительно, заметив, что данные функции должны удовлетворять условию согласования

$$\int_0^a \phi(x) dx = \int_0^b \psi(y) dy,$$

и построив функцию

$$K(x, y) = \frac{1}{a}\psi(y) + \frac{1}{b}\phi(x) - \frac{1}{ab} \int_0^a \phi(x) dx,$$

можно свести поставленную задачу к задаче для уравнения $L\bar{u} = \bar{f}(x, y, \bar{u})$, где $\bar{u} = u - K(x, y)$, $\bar{f} = f - LK$, с однородными интегральными условиями. В дальнейшем будем считать, что $\phi(x) = \psi(y) = 0$ и интегральные условия для уравнения (1) имеют вид

$$\int_0^a u(x, y) dx = 0, \quad \int_0^b u(x, y) dy = 0. \quad (2)$$

Обозначим

$$U = \left\{ u(x, y) \mid u \in C^1(D), u_{xy} \in C(D), \int_0^a u(x, y) dx = 0, \int_0^b u(x, y) dy = 0 \right\}.$$

Замыкание этого пространства по норме $\|u\|_1^2 = \int_D (u^2 + u_x^2 + u_y^2) dx dy$ обозначим $\tilde{H}^1(D)$. Таким образом, $\tilde{H}^1(D)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_1 = \int_0^b \int_0^a (uv + u_x v_x + u_y v_y) dx dy,$$

элементами которого являются функции, принадлежащие $H^1(D)$ и удовлетворяющие условиям (2). Рассмотрим оператор $l: \tilde{H}^1 \rightarrow L_2$,

$$lv = \int_0^y \int_0^x v(t, \tau) dt d\tau - \int_0^y v_x(x, \tau) d\tau - \int_0^x v_y(t, y) dt.$$

Введем понятие обобщенного решения задачи (1), (2), следуя обычной процедуре. Предполагая, что $u(x, y)$ – решение поставленной задачи из U , умножим обе части равенства $Lu = f$ на lv и проинтегрируем по области D . Получим равенство скалярных произведений $(Lu, lv)_0 = (f, lv)_0$. Рассмотрим скалярное произведение $(Lu, lv)_0$. Преобразуем его, интегрируя по частям и учитывая, что $v \in \tilde{H}^1(D)$, а следовательно,

$$\int_0^a v(x, y) dx = \int_0^b v(x, y) dy = 0.$$

Выражение, полученное в результате этих преобразований, обозначим $B(u, v)$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} B(u, v) = & (u, v)_1 + \int_0^b \int_0^a \left(Au \left(v_y - \int_0^y v(x, \tau) d\tau \right) + Bu \left(v_x \int_0^x v(t, y) dt \right) \right. \\ & \left. - (Au)_x \int_0^y v_x(x, \tau) d\tau - (Bu)_y \int_0^x v_y(t, y) dt \right) dx dy + (Cu, lv)_0. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обобщенным решением задачи (1), (2) будем называть функцию $u(x, y) \in \tilde{H}^1(D)$, удовлетворяющую для любой $v(x, y) \in \tilde{H}^1(D)$ тождеству

$$B(u, v) = (f, lv)_{L_2}. \quad (3)$$

3. Существование и единственность решения линейной задачи. Пусть $f(x, y, u) = F(x, y)$. Рассмотрим задачу с условиями (2) для уравнения

$$Lu = F(x, y). \quad (4)$$

ЛЕММА 1. Если коэффициенты уравнения (4) ограничены, причем $|A| \leq M < 1$, $|B| \leq M < 1$, и удовлетворяют неравенствам

$$C_{xy} \geq 0, \quad A_y B_x - C^2 \geq 0, \quad \frac{M}{2} A_y - (A_x + C)^2 \geq 0, \quad \frac{M}{2} B_x - (B_y + C)^2 \geq 0,$$

то

$$\|u\|_1^2 \leq c_1 B(u, u), \quad (5)$$

где $c_1 = m^{-1}$, $m = 1 - M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим разность $B(u, u) - m\|u\|_1^2$. Имеем

$$\begin{aligned} B(u, u) - \|u\|_1^2 &= \int_0^b \int_0^a \left((1-m)(u^2 + u_x^2 + u_y^2) + Au u_y + Bu u_x \right. \\ &\quad - Au \int_0^y u(x, \tau) d\tau - Bu \int_0^x u(t, y) dt - A_x \int_0^y u_x(x, \tau) d\tau - Au_x \int_0^y u_x(x, \tau) d\tau \\ &\quad \left. - B_y u \int_0^x u_y(t, y) dt - Bu_y \int_0^x u_y(t, y) dt \right) dx dy + \int_0^b \int_0^a C u l u dx dy. \end{aligned}$$

Некоторые слагаемые в правой части преобразуем интегрированием по частям, после чего получим

$$\begin{aligned} - \int_0^b \int_0^a A(x, y) u(x, y) \int_0^y u(x, \tau) d\tau dx dy &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a A_y(x, y) \left(\int_0^y u(x, \tau) d\tau \right)^2 dx dy, \\ - \int_0^b \int_0^a B(x, y) u(x, y) \int_0^x u(t, y) dt dx dy &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a B_x(x, y) \left(\int_0^x u(t, y) dt \right)^2 dx dy, \\ - \int_0^b \int_0^a A(x, y) u_x(x, y) \int_0^y u_x(x, \tau) d\tau dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a A_y(x, y) \left(\int_0^y u_x(x, \tau) d\tau \right)^2 dx dy, \\ - \int_0^b \int_0^a B(x, y) u_y(x, y) \int_0^x u_y(t, y) dt dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a B_x(x, y) \left(\int_0^x u_y(t, y) dt \right)^2 dx dy, \\ \int_0^b \int_0^a C(x, y) u(x, y) \int_0^y \int_0^x u(t, \tau) dt d\tau dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a C_{xy} \left(\int_0^y \int_0^x u(t, \tau) dt d\tau \right)^2 dx dy \\ &\quad - \int_0^b \int_0^a C(x, y) \int_0^x u(t, y) dt \int_0^y u(x, \tau) d\tau dx dy. \end{aligned}$$

Теперь разность $B(u, u) - m\|u\|_1^2$, знак которой нас интересует, можем записать так:

$$\begin{aligned} B(u, u) - m\|u\|_1^2 &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left(\left(\frac{M}{2} u^2 + 2Au u_y + 2Mu_y^2 \right) + \left(\frac{M}{2} u^2 + 2Bu u_x + 2Mu_x^2 \right) \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(A_y \left(\int_0^y u(x, \tau) d\tau \right)^2 - 2C \int_0^x u(t, y) dt \int_0^y u(x, \tau) d\tau + B_x \left(\int_0^x u(t, y) dt \right)^2 \right) \\ &\quad + \left(\frac{M}{2} u^2 - 2(A_x + C)u \int_0^y u_x(x, \tau) d\tau + A_y \left(\int_0^y u_x(x, \tau) d\tau \right)^2 \right) \\ &\quad + \left(\frac{M}{2} u^2 - 2(B_y + C)u \int_0^x u_y(t, y) dt + B_x \left(\int_0^x u_y(t, y) dt \right)^2 \right) \\ &\quad \left. + C_{xy} \left(\int_0^y \int_0^x u(t, \tau) dt d\tau \right)^2 \right) dx dy, \end{aligned}$$

и легко видеть, что при выполнении условий леммы

$$B(u, u) - m\|u\|_1^2 \geq 0,$$

откуда и следует справедливость неравенства (5).

ТЕОРЕМА 1. *Если выполнены условия леммы 1, то существует не более одного обобщенного решения задачи с условиями (2) для уравнения (4).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения вытекает из неравенства (5), так как при $F(x, y) = 0$ $B(u, u) = 0$, а стало быть, и $\|u\|_1^2 = 0$.

Для доказательства существования решения воспользуемся методом Галёркина и будем искать приближенное решение задачи в виде

$$u_m(x, y) = \sum_{k=1}^m d_k^m \Phi_k(x, y),$$

где $\{\Phi_k(x, y)\}$ – базис конечномерного подпространства V_m пространства $\tilde{H}^1$, из соотношений

$$B(u_m, v_m) = (F, lv)_0. \quad (6)$$

Равенства (6) представляют собой систему линейных уравнений относительно неизвестных d_k^m с матрицей $\mathbf{B} = (B(\Phi_i, \Phi_j))$.

ЛЕММА 2. *Система (6) однозначно разрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Однозначная разрешимость этой системы следует из неравенства (5). Действительно, предположим, что существует нетривиальное решение однородной системы, соответствующей системе (6), $z = (z_1, z_2, \dots, z_m)$. Рассмотрим функцию

$$u_m^0(x, y) = \sum_{k=1}^m z_k \Phi_k(x, y).$$

Тогда, используя неравенство (5), получим

$$0 = z^T \mathbf{B} z = B(u_m^0, u_m^0) \geq \|u_m^0\|_1^2,$$

откуда $u_m^0 = 0$. В силу линейной независимости функций $\Phi_k(x, y)$ имеем $z_k = 0$ для всех $k = 1, \dots, m$; следовательно, $z = 0$.

ТЕОРЕМА 2. *Для любой функции $F(x, y) \in L_2(D)$ существует единственная функция $u_m(x, y) \in V_m$, удовлетворяющая соотношению (6), причем*

$$\|u_m\|_1 \leq c_2 \|F\|_0, \quad (7)$$

где $c_2 = c_1 \sqrt{3 \max\{a^2 b^2, a^2, b^2\}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование и единственность функции $u_m(x, y)$, удовлетворяющей соотношению (6), следует из леммы 2. Для доказательства неравенства (7) заметим, что

$$\|lu\|_0^2 \leq 3 \int_0^b \int_0^a \left(\left(\int_0^y \int_0^x u(t, \tau) dt d\tau \right)^2 + \left(\int_0^y u_x(x, \tau) d\tau \right)^2 + \left(\int_0^x u_y(t, y) dt \right)^2 \right) dx dy.$$

Применив теперь к каждому слагаемому подынтегрального выражения неравенство Коши–Буняковского, получим

$$\|lu\|_0^2 \leq 3 \int_0^b \int_0^a (a^2 b^2 u^2 + b^2 u_x^2 + a^2 u_y^2) dx dy \leq 3 \max\{a^2 b^2, a^2, b^2\} \|u\|_1^2.$$

Из леммы 1 и полученного неравенства следует

$$\begin{aligned} \|u_m\|_1^2 &\leq c_1 B(u_m, u_m) = c_1 (F, lu_m)_0 \leq \|F\|_0 \|lu_m\|_0 \\ &\leq c_1 \sqrt{3 \max\{a^2 b^2, a^2, b^2\}} \|F\|_0 \|u_m\|_1 \end{aligned}$$

и, стало быть,

$$\|u_m\|_1 \leq c_2 \|F\|_0.$$

ТЕОРЕМА 3. Если выполнены условия леммы 1, то для любой функции $F(x, y) \in L_2(D)$ существует обобщенное решение задачи (2)–(4), которое удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_1 \leq c_2 \|F\|_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 2 следует, что множество функций u_m , $m = 1, 2, \dots$, ограничено в $\tilde{H}^1(D)$ и, стало быть, слабо компактно, т.е. из него можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторой функции $u \in \tilde{H}^1(D)$. Покажем, что эта функция и является решением задачи (2)–(4). Так как каждая из функций $u_m(x, y)$ удовлетворяет для любого i , $1 \leq i \leq m$, тождеству

$$B(u_m, \Phi_i) = (F, l\Phi_i),$$

то, умножив каждое из них на d_i , просуммировав по i от 1 до m и обозначив $\eta_m(x, y) = \sum_{i=1}^m d_i \Phi_i(x, y)$, получим

$$B(u_m, \eta_m) = (F, l\eta_m)_0. \quad (8)$$

Переходя в неравенстве (7) и равенстве (8) к пределу при $m \rightarrow \infty$, приходим к утверждению теоремы.

4. Задача для квазилинейного уравнения. Опираясь на полученные в предыдущем пункте результаты для линейного уравнения, докажем разрешимость поставленной задачи.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $f(x, y, u)$ удовлетворяет условию Каратеодори, а также

а) $|f(x, y, u_1) - f(x, y, u_2)| \leq L_0|u_1 - u_2|$,

б) $|f(x, y, u)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}(|p(x, y)| + \sqrt{c_0^2 - \eta^2}|u|)$, где $p(x, y) \in L_2(D)$, $0 < \eta \leq c_0^2$,
 $c_0 = c_1^{-1}$.

Тогда существует по крайней мере одно обобщенное решение $u_0 \in \tilde{H}^1(D)$ задачи (1), (2) такое, что

$$\|u\|_1^2 \leq \frac{Pab}{\eta^2},$$

где $P = \|p(x, y)\|_0$. Если $L_0 < c_0$, то решение единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим замкнутый шар

$$W = \left\{ w \mid w \in L_2(D), \|w\|_0^2 \leq \frac{P^2ab}{\eta^2} \right\}.$$

Из условия б) теоремы 4 следует, что для любой $w \in W$ $\|f\|_0^2 \leq c_0^2 P^2 ab / \eta^2$. Так как соответствующая линейная задача однозначно разрешима, то можно утверждать, что для любой $w \in W$ существует единственное обобщенное решение задачи

$$Lu = f(x, y, w), \quad \int_0^a u(x, y) dx = 0, \quad \int_0^b u(x, y) dy = 0,$$

т.е. $B(u, v) = (f(x, y, w), lv)_0$ для любой $v \in \tilde{H}^1(D)$, причем $\|u\|_1^2 \leq P^2 ab / \eta^2$. Определим оператор $T: w \in W \rightarrow u = Tw \in \tilde{H}^1(D)$, $T(W) \subset W$, и покажем, что он вполне непрерывен.

Условие Липшица а) обеспечивает непрерывность T . Действительно, пусть $\{w_n\}$ – последовательность функций из W , сходящаяся к $w_0 \in W$, т.е. $\|w_n - w_0\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Для $u_n = Tw_n$ и $u_0 = Tw_0$ имеем

$$B(u_n - u_0, v) = (f(x, y, w_n) - f(x, y, w_0), lv)_0.$$

Из неравенства (5) и условия а) теоремы 4

$$\|u_n - u_0\|_1 \leq c_1 \|f(x, y, w_n) - f(x, y, w_0)\|_0 \leq Pc_1 \|w_n - w_0\|_0,$$

откуда следует, что $\|u_n - u_0\|_1 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, и, стало быть, оператор T непрерывен.

Заметим далее, что для $u_n = Tw_n, w_n \in W$, справедливо неравенство $\|u_n\|_1^2 \leq P^2 ab / \eta^2$; следовательно, существует подпоследовательность, слабо сходящаяся к некоторому элементу $u_0 \in \tilde{H}^1$. Так как ограниченное в H^1 множество компактно в L_2 , $\tilde{H}^1(D) \subset H^1(D)$, существует подпоследовательность, которую обозначим также $\{u_n\}$, сходящаяся сильно в L_2 . Тогда $\|u_0\|_0^2 \leq P^2 ab / \eta^2$; стало быть, $u_0 \in W$ и оператор T компактен. В силу теоремы Шаудера о неподвижной точке существует по крайней мере одна точка $u_0 \in W$ такая, что $u_0 = Tu_0 \in \tilde{H}^1(D)$ и

$$B(u_0, v) = (f(x, y, u_0), lv)_{L_2}.$$

Предположим, что существует два различных обобщенных решения u_1 и u_2 . Тогда

$$B(u_1 - u_2, v) = (f(x, y, u_1) - f(x, y, u_2), lv)_0.$$

Из неравенства (5)

$$\|u_1 - u_2\|_0 \leq \|u_1 - u_2\|_1 \leq c_1 \|f(x, y, u_1) - f(x, y, u_2)\|_0 \leq L_0 c_1 \|u_1 - u_2\|_0.$$

Если $L_0 c_1 < 1$, т.е. $L_0 < c_0$, то из последнего неравенства $\|u_1 - u_2\|_0 = 0$ и, стало быть, решение единственно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Самарский А. А. О некоторых проблемах современной теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 11. С. 1221–1228.
- [2] Камынин Л. И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями // ЖВМиМФ. 1964. Т. 4. № 6. С. 1006–1024.
- [3] Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 2. С. 294–304.
- [4] Cannon J. R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. 1963. V. 21. № 2. P. 155–160.
- [5] Алексеева С. М., Юрчук Н. И. Метод квазиобращения для задачи управления начальным условием для уравнения теплопроводности с интегральным краевым условием // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 4. С. 495–502.
- [6] Bouziani A., Benouar N-E. Problème mixte avec conditions integrales pour une class d'équations paraboliques // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. 1995. V. 321. P. 1177–1182.
- [7] Муравей Л. А., Филиновский А. В. Об одной нелокальной краевой задаче для параболического уравнения // Матем. заметки. 1993. Т. 54. № 4. С. 98–116.
- [8] Нахушев А. М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 1. С. 72–81.
- [9] Водахова В. А. Краевая задача с нелокальным условием А. М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 2. С. 280–285.
- [10] Камынин В. Л., Саролди М. Нелинейная обратная задача для параболического уравнения высокого порядка // ЖВМиМФ. 1998. Т. 38. № 10. С. 1683–1691.
- [11] Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995.
- [12] Белавин И. А., Капица С. П., Курдюмов С. П. Математическая модель глобальных демографических процессов с учетом пространственного распределения // ЖВМиМФ. 1998. Т. 38. № 6. С. 885–902.
- [13] Гушин А. К., Михайлов В. П. О разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 1. С. 121–160.
- [14] Панеях Б. П. О некоторых нелокальных краевых задачах для линейных дифференциальных операторов // Матем. заметки. 1984. Т. 35. № 3. С. 425–434.
- [15] Скубачевский А. Л., Стеблов Г. М. О спектре дифференциальных операторов с областью определения, не плотной в $L_2(0, 1)$ // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321. № 6. С. 1158–1163.
- [16] Скубачевский А. Л. О спектре некоторых нелокальных эллиптических краевых задач // Матем. сб. 1982. Т. 117(159). № 4. С. 548–558.
- [17] Bouziani A. Solution forte d'un problème mixte avec conditions non locales pour une classe d'équations hyperboliques // Bull. Cl. Sci. Acad. Roy. Belg. 1997. V. 8. P. 53–70.
- [18] Гордезиани Д. Г., Авалишвили Г. А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // Матем. моделирование. 2000. Т. 12. № 1. С. 94–103.
- [19] Пулькина Л. С. О разрешимости в L_2 нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 2. С. 279–280.
- [20] Нахушева З. А. Об одной нелокальной задаче для уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 1. С. 171–174.