Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Самовол, Гладкая эквивалентность и линеаризация обратимых систем, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 1, 96–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm723>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 12:19:22

УДК 517.91

ГЛАДКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ И ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ОБРАТИМЫХ СИСТЕМ

В. С. Самовол

В статье рассматриваются задачи локальной гладкой эквивалентности и линеаризации обратимых систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сохранением имеющихся у этих систем линейных автоморфизмов.

Библиография: 6 названий.

Введение. Данная работа является продолжением статьи [1], в которой рассматривались системы обыкновенных дифференциальных уравнений с линейными автоморфизмами, т.е. такие системы, правая часть которых не меняется в результате некоторой линейной замены переменных [2, гл. 3, п. 1.10].

Одним из наиболее эффективных методов анализа дифференциальных уравнений является их упрощение путем подходящего преобразования координат. В этой связи важным является вопрос о сохранении имеющегося автоморфизма после таких преобразований. Для формальных и аналитических систем этот вопрос исследован в [2]. В данной работе эта задача изучается для гладких обратимых систем, т.е. таких, автоморфизм которых меняет движение по траекториям системы на противоположное. Точное определение будет дано ниже.

Рассмотрим вещественную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = Q(\xi), \quad (1)$$

где $\xi, Q(\xi)$ – векторы из $\mathbb{R}^r$, $Q(\xi)$ – функция класса C^l в некоторой окрестности нуля (здесь $l > 0$ – целое число или ∞), $Q(0) = 0$, матрица $\tilde{A} = Q'(0)$ не имеет собственных чисел с нулевой действительной частью. Точка $\xi = 0$ является неподвижной точкой для системы (1).

Пусть при линейном невырожденном преобразовании

$$\xi = \tilde{B}\eta, \quad t = \mu\tau \quad (2)$$

система (1) переходит в систему

$$\dot{\eta} = \frac{d\eta}{d\tau} = \tilde{Q}(\eta), \quad (3)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00177.

где

$$\tilde{Q}(\eta) = \mu \tilde{B}^{-1} Q(\tilde{B}\eta). \quad (4)$$

Если при этом оказывается, что $\tilde{Q}(\eta) \equiv Q(\eta)$, то преобразование (2) называется *линейным автоморфизмом* системы (1) (см. [2]). В дальнейшем предполагается наличие у системы (1) линейного автоморфизма (2). Ниже для краткости слово линейный мы будем часто опускать. Матрицу B будем называть *матрицей автоморфизма*.

Из равенства (4), в частности, следует, что $\tilde{A} = \mu \tilde{B}^{-1} \tilde{A} \tilde{B}$, где $\tilde{A} = Q'(0)$. Из последнего равенства, приравнявая определители правой и левой частей, получаем для вещественной системы (1) и вещественного преобразования (2), что $\mu = \pm 1$. Случай $\mu = 1$ рассмотрен в [1]. В данной работе мы исследуем обратимые системы, характеризуемые условием $\mu = -1$, т.е. равенством

$$\tilde{B}^{-1} \tilde{A} \tilde{B} = -\tilde{A}. \quad (5)$$

В этом случае систему будем называть *обратимой с линейным автоморфизмом $\tilde{B}$* .

Рассмотрим (5) как матричное уравнение относительно матрицы $\tilde{B}$. Не ограничивая общности (см. [3, с. 199–203]), будем считать, что матрица $\tilde{A}$ имеет блочно-диагональный вид $\tilde{A} = \text{diag}[A_1, A_2]$, где A_1, A_2 – матрицы, имеющие жорданову форму, причем спектры этих матриц расположены соответственно слева и справа от мнимой оси. Привлекая рассуждения из [3, с. 199–203] и учитывая, что матрица B невырождена, нетрудно прийти к выводу, что в соответствующем базисе матрицы A_1 и A_2 удовлетворяют равенству $A_1 = -A_2$. Ниже будем обозначать $-A_1 = A_2 = A$. Таким образом, жорданова форма матрицы $\tilde{A}$ имеет вид $\text{diag}[-A, A]$, где спектр матрицы A расположен справа от мнимой оси. Размер матрицы A будем обозначать буквой n . Из [3] также следует, что в указанном базисе матрица $\tilde{B}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ B_2 & 0 \end{pmatrix},$$

где B_1, B_2 – квадратные матрицы, размеры которых равны n . Это означает, что

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ B_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Здесь $B = P^{-1} \tilde{B} P$ – матрица автоморфизма системы в новом базисе, а P – матрица перехода к этому базису. Кроме того, имеют место равенства

$$AB_1 = B_1 A, \quad AB_2 = B_2 A. \quad (7)$$

1. “Выпрямление” инвариантных многообразий. Хорошо известно, что у системы (1) имеются инвариантные многообразия: устойчивое и неустойчивое, размерности которых совпадают с числом соответствующих элементов спектра матрицы линейной части системы. Очевидно, для обратимых систем размерности указанных многообразий совпадают и равны n . Широко распространенным и весьма полезным приемом является “выпрямление” этих многообразий, т.е. такая замена переменных, после

которой они превращаются в координатные подпространства. В нашем случае необходимо позаботиться о том, чтобы при такой замене переменных сохранялся автоморфизм системы. Покажем, что это всегда можно обеспечить.

После соответствующего линейного преобразования $\xi = Px$, $x = (x^1, x^2)$, нашу систему можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= -Ax^1 + f_1(x^1, x^2), \\ \dot{x}^2 &= Ax^2 + f_2(x^1, x^2), \end{aligned} \quad (8)$$

где A – матрица, спектр которой расположен справа от мнимой оси. Как отмечалось в предыдущем пункте, матрица B автоморфизма системы (8) равна $B = P^{-1}\tilde{B}P$, имеет структуру (6) и выполняются равенства (7). Кроме того, имеют место также следующие равенства: $f_1(B_1x^2, B_2x^1) = -B_1f_2(x^1, x^2)$, $f_2(B_1x^2, B_2x^1) = -B_2f_1(x^1, x^2)$.

У системы (8) имеются два инвариантных многообразия: устойчивое ($x^2 = \varphi(x^1)$) и неустойчивое ($x^1 = \tilde{\varphi}(x^2)$), содержащие начало координат. Наша цель – доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Для устойчивого и неустойчивого многообразий справедливы равенства*

$$\varphi(B_1x^1) = B_2\tilde{\varphi}(x^1), \quad \tilde{\varphi}(B_2x^2) = B_1\varphi(x^2). \quad (9)$$

Утверждение теоремы по сути дела означает, что “выпрямляющая” замена переменных

$$y^1 = x^1 - \tilde{\varphi}(x^2), \quad y^2 = x^2 - \varphi(x^1)$$

коммутирует с автоморфизмом системы и, следовательно, преобразованная система будет обладать автоморфизмом с матрицей B , а устойчивое и неустойчивое многообразия преобразованной системы будут являться линейными подпространствами $y^1 = 0$, $y^2 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся доказательством первого из равенств (9). Второе равенство доказывается аналогично.

Функции $\varphi(u)$, $\tilde{\varphi}(u)$ удовлетворяют уравнениям в частных производных

$$\begin{aligned} \varphi'_u(u)(-Au + f_1(u, \varphi(u))) &= A\varphi(u) + f_2(u, \varphi(u)), \\ \tilde{\varphi}'_u(u)(Au + f_2(\tilde{\varphi}(u), u)) &= -A\tilde{\varphi}(u) + f_1(\tilde{\varphi}(u), u). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $\varphi'(u)$, $\tilde{\varphi}'(u)$ – матрицы первых производных функций $\varphi(u)$, $\tilde{\varphi}(u)$.

Рассмотрим функцию $\psi(u) = B_2\tilde{\varphi}(B_1^{-1}u)$. Для того чтобы доказать наше утверждение, достаточно показать, что функция $\psi(u)$ удовлетворяет уравнению

$$\psi'_u(u)(-Au + f_1(u, \psi(u))) = A\psi(u) + f_2(u, \psi(u)). \quad (11)$$

Тогда из единственности устойчивого многообразия следует, что $\psi(u) \equiv \varphi(u)$, и равенство (9) доказано. Покажем справедливость (11).

Из определения функции $\psi(u)$ следует, что левая часть уравнения (11) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi'_u(u)(-Au + f_1(u, \psi(u))) &= B_2\tilde{\varphi}'_u(B_1^{-1}u)B_1^{-1}(-Au + f_1(u, B_2\tilde{\varphi}(B_1^{-1}u))) \\ &= -B_2\tilde{\varphi}'_u(B_1^{-1}u)(B_1^{-1}Au - B_1^{-1}f_1(u, B_2\tilde{\varphi}(B_1^{-1}u))) \\ &= -B_2\tilde{\varphi}'_u(B_1^{-1}u)(AB_1^{-1}u + f_2(B_2^{-1}B_2\tilde{\varphi}(B_1^{-1}u), B_1^{-1}u)) \\ &= -B_2\tilde{\varphi}'_u(B_1^{-1}u)(AB_1^{-1}u + f_2(\tilde{\varphi}(B_1^{-1}u), B_1^{-1}u)). \end{aligned} \quad (12)$$

Далее используем то, что функция $\tilde{\varphi}(u)$ удовлетворяет уравнению (10), которое мы запишем таким образом:

$$\tilde{\varphi}'_u(B_1^{-1}u)(AB_1^{-1}u + f_2(\tilde{\varphi}(B_1^{-1}u), B_1^{-1}u)) = -A\tilde{\varphi}(B_1^{-1}u) + f_1(\tilde{\varphi}(B_1^{-1}u), B_1^{-1}u).$$

Отсюда и из (12) получаем

$$\begin{aligned} \psi'_u(u)(-Au + f_1(u, \psi(u))) &= -B_2(-A\tilde{\varphi}(B_1^{-1}u) + f_1(\tilde{\varphi}(B_1^{-1}u), B_1^{-1}u)) \\ &= AB_2\tilde{\varphi}(B_1^{-1}u) - B_2f_1(\tilde{\varphi}(B_1^{-1}u), B_1^{-1}u) \\ &= AB_2\tilde{\varphi}(B_1^{-1}u) + f_2(u, B_2\tilde{\varphi}(B_1^{-1}u)) \\ &= A\psi(u) + f_2(u, \psi(u)), \end{aligned}$$

и равенство (11) установлено.

Использованное выше равенство $B_2f_1(\tilde{\varphi}(B_1^{-1}u), B_1^{-1}u) = -f_2(u, B_2\tilde{\varphi}(B_1^{-1}u))$ следует из того, что B является матрицей автоморфизма обратимой системы (8). Теорема доказана.

Отметим, что если $\xi(\xi^0, t)$ – решение обратимой системы (1), удовлетворяющее начальному условию $\xi(\xi^0, 0) = \xi^0$, и (2) – автоморфизмы этой обратимой системы, то имеют место равенства

$$\xi(\tilde{B}\xi^0, t) = \tilde{B}\xi(\xi^0, -t), \quad \xi(\tilde{B}^{-1}\xi^0, t) = \tilde{B}^{-1}\xi(\xi^0, -t). \quad (13)$$

Действительно, поскольку (2) является автоморфизмом обратимой системы (1), то вместе с $\xi(\xi^0, t)$ решением этой системы является и функция $\xi_1(\xi^0, t) = \tilde{B}^{-1}\xi(\tilde{B}\xi^0, -t)$, причем $\xi_1(\xi^0, 0) = \xi^0$. Из этого факта и из теоремы единственности, очевидно, следуют равенства (13). Таким образом, оператор сдвига по траекториям системы обладает тем же автоморфизмом, что и сама система.

2. Локальная гладкая эквивалентность систем уравнений. Следующий вопрос, который нас интересует, заключается в анализе ситуации, описываемой известной теоремой Стернберга–Ченя о локальной гладкой эквивалентности систем обыкновенных дифференциальных уравнений (теорема 12.2 из [4]). Достаточные условия такой эквивалентности и методы построения сопрягающего диффеоморфизма хорошо известны. Остается выяснить возможность сохранения автоморфизма системы уравнений при соответствующих ее преобразованиях.

Рассмотрим две системы уравнений

$$\dot{\xi} = Q_1(\xi), \quad (14)$$

$$\dot{\eta} = Q_2(\eta), \quad (15)$$

где $\xi, \eta, Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^r$, $r = 2n$, функции Q_1, Q_2 принадлежат классу C^l , $l \geq 1$, $Q_1(0) = Q_2(0) = 0$, $\partial Q_1(0)/\partial \xi = \partial Q_2(0)/\partial \eta = A = \text{diag}[-A, A]$, A – квадратная матрица размера n , спектр матрицы A лежит правее мнимой оси.

Пусть, кроме того, системы (14) и (15) являются обратимыми с линейным автоморфизмом (2) с матрицей B вида (6), т.е.

$$B^{-1}Q_1(B\xi) \equiv -Q_1(\xi), \quad B^{-1}Q_2(B\eta) \equiv -Q_2(\eta).$$

В соответствии с теоремой 1 будем считать, что у систем (14) и (15) имеются “выпрямленные” инвариантные многообразия

$$\begin{aligned} M_{1\xi} &= \{\xi_i = 0, 1 \leq i \leq n\}, & M_{2\xi} &= \{\xi_i = 0, n+1 \leq i \leq 2n\}, \\ M_{1\eta} &= \{\eta_i = 0, 1 \leq i \leq n\}, & M_{2\eta} &= \{\eta_i = 0, n+1 \leq i \leq 2n\}. \end{aligned}$$

Через $\Lambda = \{\lambda_i, 1 \leq i \leq n\}$ будем обозначать спектр матрицы A .

Если существует невырожденный диффеоморфизм $\xi = g(\eta)$ класса C^k , $k \geq 1$, приводящий систему (14) к виду (15) в некоторой окрестности начала координат, то говорят, что системы (14) и (15) C^k -эквивалентны (локально эквивалентны). Если при этом система (15) линейна, то говорят о C^k -линеаризации системы (14). Нас интересует существование указанного диффеоморфизма, коммутирующего с линейным автоморфизмом системы, т.е. такого, что $g(B\eta) \equiv Bg(\eta)$. В этом случае мы будем говорить о C^k -эквивалентности систем (14) и (15) с сохранением автоморфизма с матрицей B .

В работе [1] рассматривались причины, вследствие которых с точки зрения вопросов локальной гладкой эквивалентности естественным для автоморфизмов системы является условие

$$B^{\tilde{m}} = E, \tag{16}$$

где E – единичная матрица, а $\tilde{m} > 0$ – некоторое целое число. Это означает, что собственные числа матрицы B являются корнями степени $\tilde{m}$ из единицы, а также, что жорданова форма матрицы B является диагональной матрицей. Для обратимых систем матрица B имеет вид (6), в связи с чем число $\tilde{m}$ является четным $\tilde{m} = 2m$. В [1] было доказано, что условие (16) является достаточным для сохранения автоморфизма системы при ее гладких преобразованиях. Наряду с условием (16) естественно рассмотреть более слабый его аналог

$$|\mu_i| = 1, \quad 1 \leq i \leq 2n, \tag{16'}$$

где $\mu_1, \dots, \mu_{2n}$ – собственные числа матрицы B . В [1] был построен пример двух локально гладко эквивалентных систем (1), обладающих одним автоморфизмом (2), для которого не выполнено условие (16'), вследствие чего, как было показано, всякое гладкое преобразование одной системы в другую не коммутирует с этим автоморфизмом. При этом отметим, что в [1] речь шла не об обратимых системах. Соответствующий пример можно указать и для обратимых систем.

ПРИМЕР. Рассмотрим две системы уравнений в $\mathbb{R}^4$:

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y, \quad \dot{z} = z + x^2y, \quad \dot{w} = -w - xy^2, \tag{17}$$

$$\dot{x}_1 = x_1, \quad \dot{y}_1 = -y_1, \quad \dot{z}_1 = z_1, \quad \dot{w}_1 = -w_1. \tag{18}$$

Система (18) является линейной частью системы (17). Согласно [5] (см. также условие $S(k)$ между формулами (28) и (29)) существует диффеоморфизм класса C^1 , линеаризующий систему (17). Системы (17) и (18) являются обратимыми с автоморфизмом (2) с матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Здесь $\mu_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, $\mu_{3,4} = \pm\sqrt{8}$, т.е. условие (16') не выполнено. Если бы для системы (17) существовал линеаризующий невырожденный диффеоморфизм, коммутирующий с ее автоморфизмом, то у этой системы в некоторой окрестности начала координат существовало бы гладкое инвариантное многообразие вида

$$z = f(x, y), \quad w = g(x, y), \quad (20)$$

обладающее автоморфизмом системы, т.е. выполнялось бы условие

$$F(B\xi) = BF(\xi), \quad (21)$$

где

$$F(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z - f(x, y) \\ w - g(x, y) \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

Покажем, что это невозможно.

Пусть окрестность нуля, в которой существует инвариантное многообразие (25), имеет радиус ε , а δ – произвольное число, удовлетворяющее неравенству $0 < \delta < \varepsilon$. Проводя рассуждение, аналогичное тому, которое использовалось при доказательстве теоремы 1 в работе [6], можно показать, что функции $f(x, y)$, $g(x, y)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{x}{\delta} f\left(\delta, \frac{xy}{\delta}\right) = f(x, y) - x^2 y \ln \left| \frac{x}{\delta} \right|, \quad \frac{y}{\delta} g\left(\frac{xy}{\delta}, \delta\right) = g(x, y) - xy^2 \ln \left| \frac{y}{\delta} \right|.$$

Обозначив

$$\frac{1}{\delta} f\left(\delta, \frac{u}{\delta}\right) = h(u), \quad \frac{1}{\delta} g\left(\frac{u}{\delta}, \delta\right) = p(u),$$

из (21) получаем систему уравнений для функций $h(u)$, $p(u)$:

$$p(2u) = 2h(u), \quad h(2u) + 2u \ln 2 = 2p(u). \quad (22)$$

Из данной системы получаем, что функция $p(u)$ должна удовлетворять уравнению

$$p(4u) + 4u \ln 2 = 4p(u). \quad (23)$$

Отметим вместе с тем, что функция $p(u)$ по определению равна

$$p(u) = \frac{1}{\delta} g\left(\frac{u}{\delta}, \delta\right).$$

Поскольку по предположению функция

$$\frac{1}{\delta} g\left(\frac{u}{\delta}, \delta\right)$$

принадлежит классу C^1 , то ее можно представить в виде

$$\frac{1}{\delta} g\left(\frac{u}{\delta}, \delta\right) = a + bu + o(u).$$

Подставляя последнее выражение в уравнение (23), получаем

$$a + 4bu + 4u \ln 2 + o(u) = 4a + 4bu + o(u),$$

что невозможно. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

Вопрос о локальной гладкой эквивалентности обратимых систем решается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 2. *Для обратимых систем (14) и (15), где $l = k + 1$, с линейным автоморфизмом (2) с матрицей B вида (6), удовлетворяющей условию (16), существует целое число $N = N(k, \Lambda)$, обладающее следующим свойством: если при малых ξ для всех частных производных $G^{(i)}(\xi)$ порядка $i \leq k$ разности $G(\xi) = Q_1(\xi) - Q_2(\xi)$ справедлива оценка $\|G^{(i)}(\xi)\| \leq D \|(\xi_1, \dots, \xi_{2n})\|^{N-i}$ (D – некоторая константа), то для системы (14) существует невырожденная замена переменных класса C^k*

$$\xi = g(\eta), \quad (24)$$

удовлетворяющая условию $g(B\eta) = Bg(\eta)$ и приводящая эту систему к виду (15), т.е. системы (14) и (15) C^k -эквивалентны с сохранением автоморфизма.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует несколько способов построения сопрягающего диффеоморфизма. Для того чтобы такой диффеоморфизм коммутировал с автоморфизмом системы, воспользуемся схемой, предложенной в доказательстве теоремы 12.2 в [4, гл. IX].

Введем обозначения

$$\xi = (x, y), \quad x = (\xi_1, \dots, \xi_n), \quad y = (\xi_{n+1}, \dots, \xi_{2n}).$$

Рассмотрим функцию $\varphi(\xi) = \varphi(x, y) = -\varphi_1(\xi) + \varphi_2(\xi)$, где

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi) &= \varphi_1(x) = \|x\| + \|B_2 x\| + \|B_1 B_2 x\| + \|B_2 B_1 B_2 x\| + \dots + \|B_2 (B_1 B_2)^{m-1} x\|, \\ \varphi_2(\xi) &= \varphi_2(y) = \|y\| + \|B_1 y\| + \|B_2 B_1 y\| + \|B_1 B_2 B_1 y\| + \dots + \|B_1 (B_2 B_1)^{m-1} y\|, \\ \tilde{m} &= 2m. \end{aligned}$$

Отметим, что поскольку из равенства (16), где $\tilde{m} = 2m$, следует, что

$$(B_1 B_2)^m = (B_2 B_1)^m$$

– единичные матрицы, то имеют место равенства

$$\begin{aligned}\varphi_1(B_1x) &= \varphi_2(x), & \varphi_2(B_2y) &= \varphi_1(y), \\ \varphi(B\xi) &= -\varphi_1(B_1y) + \varphi_2(B_2x) = -\varphi_2(y) + \varphi_1(x) = -\varphi(\xi).\end{aligned}$$

Следуя обозначениям [4, с. 314], определим множества K^0, K^+, K^- следующим образом (несколько иначе, чем в [4]):

$$K^0 = \{\xi : \varphi(\xi) = 0\}, \quad K^+ = \{\xi : \varphi(\xi) > 0\}, \quad K^- = \{\xi : \varphi(\xi) < 0\}.$$

Как и в [4], обозначим $K^j = T^j K^0, j = 0, \pm 1, \dots$, где T – оператор сдвига на единицу времени по траекториям системы (14),

$$Q^0 = \{\xi : \xi \in K^+, T^{-1}\xi \in K^-\}, \quad Q^j = \{\xi : T^{-j}\xi \in K^+, T^{-j-1}\xi \in K^-\}.$$

Отметим, что существует число $\varepsilon > 0$ такое, что верны следующие оценки:

$$\begin{aligned}-(\mu_2 + \varepsilon)\varphi_1(\xi(\xi^0, t)) &< \frac{d\varphi_1(\xi(\xi^0, t))}{dt} < -(\mu_1 - \varepsilon)\varphi_1(\xi(\xi^0, t)), \\ (\mu_1 - \varepsilon)\varphi_2(\xi(\xi^0, t)) &< \frac{d\varphi_2(\xi(\xi^0, t))}{dt} < (\mu_2 + \varepsilon)\varphi_2(\xi(\xi^0, t)),\end{aligned}$$

где $\xi(\xi^0, t)$ – решение системы (14), удовлетворяющее начальному условию

$$\xi(\xi^0, 0) = \xi^0, \quad \mu_1 = \min(\operatorname{Re} \lambda_i, 1 \leq i \leq n), \quad \mu_2 = \max(\operatorname{Re} \lambda_i, 1 \leq i \leq n), \quad \mu_1 - \varepsilon > 0,$$

λ_i – элементы спектра матрицы A . Вследствие указанных оценок все определения являются корректными.

Для того чтобы решения систем (14) и (15) были определены при всех $-\infty < t < +\infty$, было бы удобно заменить функции $Q_i(\xi), i = 1, 2$, функциями, определенными при всех ξ и совпадающими с функциями $Q_i(\xi), i = 1, 2$, при малых ξ , но равными линейной части $A\xi$ вне некоторой окрестности начала координат. При этом важно сохранение обратимости преобразованных систем уравнений. Указанное преобразование по существу проводится так же, как и в лемме 3.1 в [4, с. 279–281], с тем лишь изменением, что в качестве сглаживающей функции надо взять бесконечно дифференцируемую функцию $\phi(\tau), \tau = \|\xi\|^2 + \|B\xi\|^2 + \dots + \|B^{2m-1}\xi\|^2$. При этом функция $\phi(\tau)$ выбирается так же, как и функция $\varphi(t)$ в указанной лемме 3.1 в [4], а именно: $\phi(\tau) = 1$ при малых значениях аргумента и равна нулю вне некоторой окрестности нуля, а при остальных τ она принимает значения между 0 и 1. Преобразование функций $Q_i(\xi), i = 1, 2$, получается умножением их нелинейных частей на построенную выше функцию $\phi(\|\xi\|^2 + \|B\xi\|^2 + \dots + \|B^{2m-1}\xi\|^2)$. Чтобы не усложнять обозначения, будем считать, что системы (14) и (15) уже удовлетворяют указанному свойству. Таким образом, решения систем (14) и (15) являются бесконечно продолжаемыми, и область определения отображений $T^t: \xi^0 \rightarrow \xi(\xi^0, t), T_1^t: \eta^0 \rightarrow \eta(\eta^0, t)$ совпадает со всем пространством.

В качестве сопрягающего диффеоморфизма для отображений T^t и T_1^t положим согласно упражнению 14.1 [4, с. 324] $R(\xi) = T_1^{-t(\xi)}T^t(\xi)\xi$, где $t(\xi)$ таково, что $T^{t(\xi)}\xi \in K^0, \xi \notin M_{1\xi} \cup M_{2\xi}$. Все рассуждения [4, с. 313–324] полностью сохраняются. Остается

убедиться в том, что сопрягающий диффеоморфизм коммутирует с автоморфизмом системы (14).

Из определения функции $\varphi(\xi)$ следует, что $\varphi(B\xi) = -\varphi(\xi)$; следовательно, если $\xi \in K^0$, то $B\xi \in K^0$. Таким образом, поскольку по определению числа $t(\xi^0)$

$$\xi(\xi^0, t(\xi^0)) \in K^0,$$

то $B\xi(\xi^0, t(\xi^0)) \in K^0$, откуда, в свою очередь с учетом (13) следует, что

$$\xi(B\xi^0, -t(\xi^0)) \in K^0.$$

Отсюда получаем, что $t(B\xi^0) = -t(\xi^0)$. Далее получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned} R(B\xi^0) &= T_1^{-t(B\xi^0)} T^{t(B\xi^0)} B\xi^0 = T_1^{-t(B\xi^0)} T^{-t(\xi^0)} B\xi^0 = T_1^{-t(B\xi^0)} B T^{t(\xi^0)} \xi^0 \\ &= B T_1^{t(B\xi^0)} T^{t(\xi^0)} \xi^0 = B T_1^{-t(\xi^0)} T^{t(\xi^0)} \xi^0 = B R(\xi^0). \end{aligned}$$

Четвертое равенство в этой цепочке следует из равенства (13), если его записать для решений системы (15): $\eta(B\eta^0, t) = B\eta(\eta^0, -t)$.

Коммутативность сопрягающего диффеоморфизма и автоморфизма B установлена. Теорема 2 доказана.

3. Гладкая линеаризация систем уравнений. Исследуем теперь проблему существования гладкого линеаризующего преобразования обратимой системы (1), коммутирующего с ее автоморфизмом (2).

По-прежнему мы будем считать, что у системы (1) устойчивое и неустойчивое многообразия “выпрямлены”, т.е. совпадают с соответствующими координатными подпространствами. Это, в частности, означает, что матрица $\tilde{A}$ линейной части системы (1) имеет блочно-диагональную структуру $\tilde{A} = \text{diag}[-A, A]$, где собственные числа матрицы A лежат правее мнимой оси. Напомним также, что матрица B линейного автоморфизма системы имеет вид (6).

В дальнейшем нам будет необходимо произвести некоторые линейные преобразования координат в исследуемой системе. В частности, будет полезно приведение матрицы линейной части системы к жордановой форме. В подобных случаях в новых координатах система может уже иметь комплексный вид. Важно отметить, что поскольку исходная система вещественна, то при этом всегда будет соблюдаться так называемое условие вещественности (см. [2, гл. 3, п. 1.9]). Поэтому можно без ограничения общности считать, что матрица линейной части системы (1) имеет жорданову форму, а сама система (1) и матрица B автоморфизма (2) удовлетворяют условию вещественности. Очевидно, что структура матрицы B по-прежнему имеет вид (6).

Хорошо известно, что с помощью преобразования, близкого к тождественному

$$\xi = x + F(x), \quad \|F(x)\| = o(\|x\|), \quad (25)$$

где $F(x)$ – полином от своих переменных, можно систему (1) привести к виду

$$\dot{x} = \tilde{A}x + R_1(x) + R_2(x). \quad (26)$$

Здесь $R_1(x)$ – полином, состоящий из нелинейных резонансных членов степени, не превосходящей некоторого целого числа N , а для функции $R_2(x)$ выполняется оценка $\|R_2(x)\| = o(\|x\|^N)$ при $\|x\| \rightarrow 0$. При этом число N можно выбрать сколь угодно большим. Кроме того, из [2, гл. 3, п. 1.9, 1.10] следует, что преобразование (25) можно выбрать таким, чтобы оно удовлетворяло условию вещественности, а также коммутировало с автоморфизмом системы, т.е. $F(Bx) = BF(x)$. Таким образом, система (26) является обратимой с автоморфизмом B , т.е. для функций $R_1(x), R_2(x)$ выполняются условия

$$R_1(Bx) = -BR_1(x), \quad R_2(Bx) = -BR_2(x).$$

Пусть теперь задано некоторое целое число $k > 0$. Пусть также для системы (26) выполнено неравенство $N > N(k, \Lambda)$, где $N(k, \Lambda)$ – число, существование которого утверждается в теореме 2. Тогда, применяя к системе (26) теорему 2, получаем, что существует близкое к тождественному преобразование, коммутирующее с автоморфизмом системы, приводящее эту систему к обратимой системе следующего вида

$$\dot{y} = \tilde{A}y + R_1(y). \quad (27)$$

Отметим, что из доказательства теоремы 2 следует, что указанное преобразование будет удовлетворять условию вещественности.

Для формулировки заключительных результатов запишем систему (27) в более детальном виде

$$\dot{y}_i = \varepsilon_i y_{i-1} + \lambda_i y_i + a_i(y), \quad 1 \leq i \leq 2n, \quad (28)$$

$\varepsilon_i = 0$ или $\varepsilon, \varepsilon > 0$,

$$a_i(y) = \sum_{|s|=2}^N a_s^i y^s,$$

$s = (s_1, \dots, s_{2n})$ – неотрицательные целочисленные наборы, $|s| = \sum_{i=1}^{2n} s_i$. Кроме того, считаем, что $\operatorname{Re} \lambda_{i+1} \leq \operatorname{Re} \lambda_i < 0$ при $1 \leq i \leq n-1$ и $\lambda_{i+n} = -\lambda_i, \varepsilon_{i+n} = \varepsilon_i$ при $1 \leq i \leq n$.

Для каждого целочисленного набора $s \in W = \bigcup_{i=1}^{2n} \{s : a_s^i \neq 0\}$ обозначим

$$\rho_{p,k}(s) = \begin{cases} \sum_{i=1}^p s_i |\operatorname{Re} \lambda_i| - k |\operatorname{Re} \lambda_p|, & 1 \leq p \leq n, \\ \sum_{i=n+1}^p s_i \operatorname{Re} \lambda_i - k \operatorname{Re} \lambda_p, & n+1 \leq p \leq 2n, \end{cases}$$

$$\rho_k(s) = \max_{1 \leq p \leq 2n} \rho_{p,k}(s).$$

Следуя терминологии работы [5], будем говорить, что набор s удовлетворяет *условию* $S(k)$, если выполняется неравенство $\rho_k(s) > 0$. Если же это неравенство выполняется для каждого набора $s \in W$, то будем говорить, что система (28) удовлетворяет условию $S(k)$.

Рассмотрим вместе с системой (28) соответствующую линейную систему

$$\dot{z}_i = \varepsilon_i z_{i-1} + \lambda_i z_i, \quad 1 \leq i \leq 2n. \quad (29)$$

Имеет место следующее утверждение (теорема 3 из [5]).

Если для системы (28) выполнено условие $S(k)$, то существует близкое к тождественному преобразование

$$y_i = z_i + h_i(z), \quad |h_i(z)| = o(\|z\|), \quad 1 \leq i \leq 2n, \quad (30)$$

класса C^k , приводящее систему (28) к виду (29), т.е. системы (28) и (29) C^k -эквивалентны.

Таким образом, условие $S(k)$ является достаточным условием C^k -линеаризации системы (28). Вопрос, который нам осталось обсудить, заключается в том, можно ли построить преобразование (30) так, чтобы оно коммутировало с автоморфизмом обратной системы (28). Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Если матрица B автоморфизма обратной системы (28) удовлетворяет условию (16), то условие $S(k)$ является достаточным условием для существования преобразования (30), приводящего эту систему к линейному виду (29) и коммутирующего с автоморфизмом системы, т.е. система (28) C^k -линеаризуема с сохранением обращающего ее автоморфизма.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Искомые функции $h_i(z)$ должны удовлетворять системе уравнений в частных производных, характеристическая система для которой имеет вид

$$\dot{z}_i = \varepsilon_i z_{i-1} + \lambda_i z_i, \quad \dot{h}_i = \varepsilon_i h_{i-1} + \lambda_i h_i + a_i(z + h), \quad 1 \leq i \leq 2n. \quad (31)$$

Наша цель показать, что у системы (31) имеется инвариантное многообразие класса C^k вида $h = \varphi(z)$, $\|\varphi(z)\| = o(\|z\|)$, удовлетворяющее условию $\varphi(Bz) = B\varphi(z)$. Это будет означать, что отображение $y = z + \varphi(z)$ является искомым.

Следуя технологии линеаризации, разработанной в [5], произведем в системе (31) замену переменных $h = g + \Phi(z)$, $\Phi(z) \in C^k$, после которой данная система примет вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= \varepsilon_i z_{i-1} + \lambda_i z_i, & 1 \leq i \leq n, \\ \dot{g}_i &= \varepsilon_i g_{i-1} + \lambda_i g_i + \tilde{a}_i(z, g) + \tilde{a}_i(z), & 1 \leq i \leq n, \end{aligned} \quad (32)$$

где функции $\tilde{a}_i(z, g), \tilde{a}_i(z)$ таковы, что $\tilde{a}_i(z, 0) \equiv 0$, $|\tilde{a}_i(z)| = o(\|z\|^N)$, причем число N можно сделать сколь угодно большим.

Ниже мы покажем, что функция $\Phi(z)$ может быть построена так, что

$$\Phi(Bz) = B\Phi(z). \quad (33)$$

Вследствие этого система (32) остается обратимой с линейным автоморфизмом (2) с матрицей B .

Применяя к системе (32) доказанную выше теорему 2, получаем, что существует преобразование $g = g^1 + \Psi(z)$, $\|\Psi(z)\| = o(\|z\|)$, $\Psi(z) \in C^k$, приводящее эту систему к виду

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= \varepsilon_i z_{i-1} + \lambda_i z_i, & 1 \leq i \leq 2n, \\ \dot{g}_i^1 &= \varepsilon_i g_i^1 + \lambda_i g_i^1 + \tilde{a}_i(z, g^1), & 1 \leq i \leq 2n. \end{aligned} \quad (34)$$

При этом для функции $\Psi(z)$ выполняется условие $\Psi(Bz) = B\Psi(z)$, т.е. преобразование коммутирует с автоморфизмом системы. У системы (34) многообразие $g^1 = 0$ является

инвариантным; следовательно, у системы (32) многообразие $g = \Psi(z)$ также инвариантно, из чего следует, что преобразование $h = \varphi(z) = \Phi(z) + \Psi(z) \in C^k$ является искомым и удовлетворяет требуемому условию $\varphi(Bz) = B\varphi(z)$.

Нам осталось показать, что функция $\Phi(z)$ может быть построена так, что будет выполнено условие (33).

В работе [5] вектор-функция $\Phi(z) = (\Phi_1(z), \dots, \Phi_{2n}(z))$ строится следующим образом:

$$\Phi_i(z) = \sum_{|s|=2}^N b_s^i z^s T^\omega, \quad 1 \leq i \leq 2n, \quad (35)$$

где z^s – резонансные наборы, удовлетворяющие условию $S(k)$, $T^\omega = t_1^{\omega_1} \dots t_{2n}^{\omega_{2n}}$ – мономы от переменных $t_1(z), \dots, t_{2n}(z)$, причем функции $t_j(z)$, $1 \leq j \leq 2n$, таковы, что производная каждой из них в силу линейной системы (29) равна единице.

Сохраняя идею построения функций $t_j(z)$, мы внесем в их конструкцию некоторые изменения. Пусть сначала $1 \leq j \leq n$. Для каждого числа $1 \leq j \leq n$ определим $q(j)$ как максимальное из чисел $1 \leq i \leq n$, для которых $\operatorname{Re} \lambda_i = \operatorname{Re} \lambda_j$. Для $n+1 \leq j \leq 2n$ определим число $q(j)$ как максимальное среди чисел $n+1 \leq i \leq 2n$, для которых $\operatorname{Re} \lambda_i = \operatorname{Re} \lambda_j$.

В качестве функций $t_j(z) = t_j(z_1, z_2, \dots, z_{2n})$ рассмотрим взятое с обратным знаком время, за которое точка

$$\tilde{z} = \begin{cases} (z_1, z_2, \dots, z_{q(j)}, 0, \dots, 0), & 1 \leq j \leq n, \\ (0, \dots, 0, z_{n+1}, z_{n+2}, \dots, z_{q(j)}, 0, \dots, 0), & n+1 \leq j \leq 2n, \end{cases}$$

достигнет поверхности $R(\tilde{z}) = \varepsilon$, $R(\tilde{z}) = \|\tilde{z}\|^2 + \|B\tilde{z}\|^2 + \dots + \|B^{2m-1}\tilde{z}\|^2$, где число m таково, что выполняется условие (16) $B^{2m} = E$.

Нетрудно видеть, что для функций $t_j(z)$ выполняется условие $t_p(Bz) = -t_q(z)$, где числа p, q таковы, что $|p - q| = n$, $1 \leq p, q \leq 2n$. Отсюда следует, что

$$t_j(B^2 z) = t_j(z), \quad 1 \leq j \leq 2n. \quad (36)$$

В [5] функции $\Phi_i(z)$ определяются по формуле (35). Мы несколько изменим их определение. Компоненты $\Phi_i(z)$, $1 \leq i \leq n$, вектор-функции $\Phi^1(z) = (\Phi_1(z), \dots, \Phi_n(z))$ определим по формуле (35), а вектор-функцию $\Phi^2(z) = (\Phi_{n+1}(z), \dots, \Phi_{2n}(z))$ определим так:

$$\Phi^2(z) = B_2 \Phi^1(B^{-1} z),$$

где $\begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ B_2 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица автоморфизма системы.

Из построения функций $\Phi_i(z)$, $1 \leq i \leq n$, изложенного в [5], следует, что после преобразования $h = g + \Phi(z)$ система (31) примет вид (32), где условие $|\tilde{a}_i(z)| = o(\|z\|^N)$ будет выполняться при $1 \leq i \leq n$. Вместе с тем, как будет показано ниже, построенное преобразование коммутирует с автоморфизмом системы. Вследствие этого приведенная оценка будет выполняться для функций $\tilde{a}_i(z)$ и при $n+1 \leq i \leq 2n$. Таким образом, построенная вектор-функция $\Phi(z) = (\Phi_1(z), \dots, \Phi_{2n}(z))$ будет удовлетворять всем необходимым для C^k -линеаризации системы свойствам, указанным в [5]. Остается проверить коммутативность построенного преобразования и автоморфизма системы,

т.е. справедливость равенства $\Phi(Bz) = B\Phi(z)$. Это равенство сводится к двум следующим:

$$\Phi^1(Bz) = B_1\Phi^2(z), \quad (37)$$

$$\Phi^2(Bz) = B_2\Phi^1(z). \quad (38)$$

Равенство (38) следует непосредственно из определения функции $\Phi^2(z)$. Равенство (37) с учетом (38) эквивалентно следующему:

$$\Phi^1(B^2z) = B_1B_2\Phi^1(z). \quad (39)$$

Убедимся в справедливости последнего равенства.

Для функций $\Phi_i(z)$, $1 \leq i \leq n$, определенных по формуле (35), определим следующие функции:

$$\tilde{\Phi}_i(z) = \sum_{|s|=2}^N b_s^i z^s, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \tilde{\Phi}^1(z) = (\tilde{\Phi}_1(z), \dots, \tilde{\Phi}_n(z)),$$

и, кроме того, определим

$$\tilde{\Phi}^2(z) = (\tilde{\Phi}_{n+1}(z), \dots, \tilde{\Phi}_{2n}(z)) = -B_2\tilde{\Phi}^1(B^{-1}z).$$

Из способа определения функций $\tilde{\Phi}_i(z)$, $1 \leq i \leq n$, приведенного в [5], следует, что для них выполняется условие $\tilde{\Phi}^1(B^2z) = B_1B_2\tilde{\Phi}^1(z)$. Из этого условия с учетом равенства (36) следует (39). Итак, требуемое преобразование системы (31) построено. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Остается пока неисследованным вопрос о гладкой эквивалентности и линеаризации с сохранением автоморфизма систем, удовлетворяющих условию (16'), но не удовлетворяющих условию (16), т.е. о достаточности условия (16').

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В работе [1] допущена опечатка в определении функций $t_{\overline{m}}(z)$. В формулах в пятой строке снизу на с. 577 вместо $\overline{m}$ следует читать m .

Автор выражает искреннюю благодарность А.Д. Брюно за полезные обсуждения вопросов, связанных с проблематикой данной работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Самовол В.С. Гладкая эквивалентность дифференциальных уравнений и линейные автоморфизмы // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 4. С. 567–578.
- [2] Брюно А.Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979.
- [3] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.
- [4] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
- [5] Самовол В.С. Линеаризация систем дифференциальных уравнений в окрестности инвариантных тороидальных многообразий // Тр. ММО. 1979. Т. 38. С. 187–219.
- [6] Самовол В.С. О необходимом и достаточном условии гладкой линеаризации автономной системы на плоскости в окрестности особой точки // Матем. заметки. 1989. Т. 46. № 1. С. 67–77.