Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Г. Томин, О некоторых формулах первого регуляризованного следа для дискретных операторов, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 1, 109–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm724>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 03:10:22

УДК 517.5

О НЕКОТОРЫХ ФОРМУЛАХ ПЕРВОГО РЕГУЛЯРИЗОВАННОГО СЛЕДА ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Н. Г. ТОМИН

Выведены формулы первого регуляризованного следа (типа абстрактной формулы Гельфанда–Левитана) для дискретных операторов при различных удобных для проверки условиях. Доказательство основного результата проводится методом контурного интегрирования с учетом поправок аналитической теории возмущений и использует подход, который предложил ранее М. Достанич. Некоторые известные формулы следов обобщаются и уточняются. Приводятся примеры применения полученных в статье абстрактных формул к нахождению конкретных формул следов для обыкновенных дифференциальных операторов и операторов в частных производных.

Библиография: 15 названий.

Проблема регуляризованных следов дискретных операторов восходит к работе [1]. Рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля

$$-u'' + p(x)u = \mu u, \quad u(0) = 0, \quad u(\pi) = 0, \quad (1)$$

где $p(x)$ – вещественная непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0, \pi]$ функция. В [1] доказано, что для расположенных в порядке возрастания собственных чисел $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ задачи (1) справедлива формула

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu_n - n^2 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} p(x) dx \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} p(x) dx - \frac{p(0) + p(\pi)}{4}. \quad (2)$$

В [2] показано, что равенство (2) может быть записано в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n - (Pu_n, u_n)) = 0. \quad (3)$$

Здесь $\lambda_n = n^2$ и $u_n = \sqrt{2/\pi} \sin nx$ ($n \in \mathbb{N}$) – собственные числа и соответствующие им собственные функции самосопряженного полуограниченного снизу в $L^2(0, \pi)$ дифференциального оператора T , порожденного задачей Штурма–Лиувилля $-u'' = \lambda u$, $u(0) = u(\pi) = 0$; P есть линейный ограниченный в $L^2(0, \pi)$ оператор, действующий по правилу $(Pu)(x) = p(x)u(x) \quad \forall u \in L^2(0, \pi)$. Таким образом, $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных чисел возмущенного оператора $\tilde{T} = T + P$.

Формулу вида (3) и ее аналоги, отличающиеся различными способами суммирования к 0 частичных сумм ряда в левой части (3), будем называть, следуя [3], *абстрактными формулами Гельфанда–Левитана*.

Возникает задача описания в сепарабельном гильбертовом пространстве возможно более широких классов дискретных самосопряженных полуограниченных снизу операторов T и возмущающих линейных операторов P (как правило, ограниченных или подчиненных некоторой степени оператора T) таких, что для оператора $\tilde{T} = T + P$ в той или иной форме справедлива абстрактная формула Гельфанда–Левитана. В этом направлении известны различные работы, из которых отметим статьи [3]–[5]. Этой же задаче посвящена и настоящая работа.

Пусть H – сепарабельное комплексное гильбертово пространство, $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в H , E – тождественный (единичный) оператор в H . Через $\mathcal{D}(V)$ и $\sigma(V)$ обозначаем соответственно область определения и спектр линейного оператора V , действующего в H .

Пусть $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$, причем $\lambda_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$, $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ – ортонормированная полная в H система,

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (\cdot, u_n) u_n, \quad \mathcal{D}(T) = \left\{ x \in H \mid \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |(x, u_n)|^2 < +\infty \right\}.$$

Таким образом, T – дискретный самосопряженный полуограниченный снизу в H оператор; u_n – собственный вектор оператора T , соответствующий собственному числу λ_n . Через ν_n обозначаем кратность собственного числа λ_n ; $\Delta\lambda_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Пусть $\{\lambda'_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность всех попарно различных собственных чисел оператора T , занумерованных в порядке возрастания; ν'_n – кратность собственного числа λ'_n ; $\Delta\lambda'_n = \lambda'_{n+1} - \lambda'_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

При $0 \leq \gamma < 1$ и $\lambda_0 < \lambda_1$ говорим, что оператор P подчинен оператору $(T - \lambda_0 E)^\gamma$, и пишем $P \prec (T - \lambda_0 E)^\gamma$, если P – линейный замкнутый в H оператор, $\mathcal{D}(P) \supset \mathcal{D}(T)$ и при некотором $A_0 > 0$ неравенство $\|Px\| \leq A_0 \|(T - \lambda_0 E)^\gamma x\|$ выполняется $\forall x \in \mathcal{D}(T)$. В частности, при $\gamma = 0$ оператор P ограничен в H , $\mathcal{D}(P) = H$ и $\|P\| \leq A_0$; в этом случае можно положить $A_0 = \|P\|$.

Сформулируем основной результат настоящей работы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняются следующие условия:

- 1) при некоторых $q \in (0, 1)$, $C_1 > 0$ и всех достаточно больших натуральных n имеем

$$\Delta\lambda'_n \geq C_1 (\lambda'_{n+1})^q; \quad (4)$$
- 2) $\nu'_n \leq C_2 (\lambda'_n)^\beta$ при $0 \leq \beta < q$, $C_2 > 0$ и всех достаточно больших натуральных n ;
- 3) $P \prec (T - \lambda_0 E)^\gamma$ при $0 \leq \gamma < (q - \beta)/2$ и $\lambda_0 < \lambda_1$.

Тогда оператор $\tilde{T} = T + P$ имеет ядерную резольвенту и для его собственных чисел μ_n , $n \in \mathbb{N}$, занумерованных в порядке возрастания модулей с учетом алгебраических кратностей, справедлива формула

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \sum_{\lambda_n \leq \lambda} (\mu_n - \lambda_n - (Pu_n, u_n)) = 0. \quad (5)$$

Условие 1) теоремы 1 может быть записано в следующем виде: при $q \in (0, 1)$, $C_1 > 0$ и всех достаточно больших n из неравенства $\lambda_n < \lambda_{n+1}$ следует $\Delta\lambda_n \geq C_1 \lambda_{n+1}^q$. Условие 2) равносильно следующему условию: $\nu_n \leq C_2 \lambda_n^\beta$ при $0 \leq \beta < q$, $C_2 > 0$ и всех достаточно больших n .

В теореме 1 статьи [5] утверждается справедливость формулы следов (5) при выполнении следующих условий: P – ограниченный линейный оператор в H , $\lambda_1 > 0$ и при всех натуральных n

$$0 < C_3 \leq \frac{\Delta\lambda'_n}{(\lambda'_n)^q} \leq C_4 < +\infty, \quad (6)$$

где $q \in (0, 1)$. Согласно теореме 5 из [5] формула (5) справедлива при выполнении условия $\lambda_1 > 0$, соотношения (6) с $q \in (1/2, 1)$ и условия $P \prec T^\gamma$ для замкнутого оператора P , $\gamma \in [0, q - 1/2)$ и $\lambda_0 = 0$.

Ограничение (4) на собственные числа оператора T является более слабым, чем (6). Действительно, в [5] показано, что условие (6) равносильно условию

$$0 < C_5 \leq \frac{\Delta\lambda'_n}{n^{q/(1-q)}} \leq C_6 < +\infty,$$

и при его выполнении имеем

$$0 < C_7 \leq \frac{\lambda'_n}{n^{1/(1-q)}} \leq C_8 < +\infty.$$

Поэтому из (6) следует (4); обратное, очевидно, неверно.

В указанных выше формулировках справедливость теорем 1 и 5 из [5] вызывает сомнения, поскольку в них нет никаких ограничений на кратности собственных чисел оператора T . Доказательства этих теорем в [5] являются верными только при выполнении нигде явно в [5] не сформулированного, но фактически постоянно используемого дополнительного условия $\nu_n \leq C_2$, соответствующего случаю $\beta = 0$ в теореме 1 настоящей статьи. С учетом этого дополнительного условия теорема 1 из [5] слабее частного случая теоремы 1 настоящей статьи, соответствующего $\beta = \gamma = 0$, а теорема 5 из [5] слабее частного случая теоремы 1 настоящей статьи, соответствующего $\beta = 0$ и условию

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Доказательство проводится методом контурного интегрирования с учетом поправок аналитической теории возмущений на основе подхода, предложенного в [5].

Прежде всего заметим, что если теорема 1 справедлива при дополнительном условии (7), то она справедлива и в общем случае. Чтобы убедиться в этом, достаточно в условиях теоремы 1 перейти от операторов T и P соответственно к операторам $T_0 = T - \lambda_0 E$ и $P_0 = P + \lambda_0 E$. Поэтому всюду ниже при доказательстве теоремы 1, не умаляя общности, считаем выполненным условие (7), а неравенства (4) и $\nu_n \leq C_2 \lambda_n^\beta$ полагаем справедливыми при всех $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $\mathcal{B}(H)$ – банахово пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих в H и определенных на всем пространстве H ; $\mathcal{S}(H)$ – банахово пространство всех ядерных в H операторов с ядерной нормой $|\cdot|_1$. Далее $R_\lambda = (T - \lambda E)^{-1}$ – резольвента оператора T и $\tilde{R}_\lambda = (\tilde{T} - \lambda E)^{-1}$ – резольвента оператора $\tilde{T}$. Полагаем

$\Omega = \mathbb{C} \setminus \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \neq \lambda_n \ \forall n \in \mathbb{N}\}$, $\Omega' = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda - \lambda_n| > A_0 \lambda_n^\gamma \ \forall n \in \mathbb{N}\}$, $K' = \mathbb{C} \setminus \Omega'$.

Для любого $\tau \in [0, q - \beta)$ и для любого $\lambda \in \Omega$ оператор $T^\tau R_\lambda$ является ядерным в H . Действительно, $\lambda_n^\tau / |\lambda_n - \lambda| \sim \lambda_n^{\tau-1}$ при $n \rightarrow \infty$, а

$$\sum_{n=\nu_1+1}^{\infty} \lambda_n^{\tau-1} = \sum_{n=2}^{\infty} \nu'_n (\lambda'_n)^{\tau-1} \leq C_9 \sum_{n=2}^{\infty} (\lambda'_n)^t \Delta \lambda'_{n-1} < C_9 \int_{\lambda_1}^{\infty} \lambda^t d\lambda < +\infty,$$

где $C_9 = C_2/C_1 > 0$ и $t = \beta - q + \tau - 1 < -1$. Поэтому

$$|T^\tau R_\lambda|_1 \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^\tau}{|\lambda_n - \lambda|} < +\infty.$$

Полагая $\tau = 0$ и $\tau = \gamma$, получаем ядерность операторов R_λ и $B_\lambda \equiv T^\gamma R_\lambda$ при любом $\lambda \in \Omega$. Оператор $Q_\lambda \equiv PR_\lambda$ также является ядерным в $H \ \forall \lambda \in \Omega$, так как $Q_\lambda = P_1 B_\lambda$, где после продолжения по непрерывности $P_1 = PT^{-\gamma} \in \mathcal{B}(H)$ ($\|P_1\| \leq A_0$).

Легко видеть, что $\Omega' = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \|B_\lambda\| < 1/A_0\}$ и для всякого компакта $K \subset \Omega'$

$$\rho(K) \equiv \max_K \|B_\lambda\| < \frac{1}{A_0}.$$

Всюду на Ω' имеем $\tilde{T} - \lambda E = (E + Q_\lambda)(T - \lambda E)$, $\|Q_\lambda\| \leq A_0 \|B_\lambda\| < 1$ и $R_\lambda \in \mathcal{S}(H)$. Следовательно, для любого $\lambda \in \Omega'$

$$\exists (E + Q_\lambda)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m Q_\lambda^m \in \mathcal{B}(H)$$

и $\exists \tilde{R}_\lambda = (\tilde{T} - \lambda E)^{-1} = R_\lambda (E + Q_\lambda)^{-1} \in \mathcal{S}(H)$, откуда вытекает равенство

$$\tilde{R}_\lambda = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m R_\lambda Q_\lambda^m \quad (8)$$

в пространстве $\mathcal{S}(H)$; в частности, получаем $\sigma(\tilde{T}) \subset K'$.

Пусть $\omega \in \Omega'$, $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность всех собственных чисел ядерного оператора $\tilde{R}_\omega$, занумерованных в порядке убывания модулей с учетом алгебраических кратностей; отметим, что $\xi_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, так как оператор $\tilde{R}_\omega$ обратим. Если $0 \neq x \in H$ и $0 \neq \xi \in \mathbb{C}$, то, как нетрудно проверить, для любого натурального показателя s равенство $(\tilde{R}_\omega - \xi E)^s x = 0$ выполняется в том и только том случае, когда $x \in \mathcal{D}(\tilde{T}^s)$ и $(\tilde{T} - (\omega + 1/\xi)E)^s x = 0$. Поэтому последовательность $\{\omega + 1/\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ состоит из всех собственных чисел оператора $\tilde{T}$, причем корневое подпространство для собственного числа $\omega + 1/\xi_n$ оператора $\tilde{T}$ совпадает с корневым подпространством для собственного числа ξ_n оператора $\tilde{R}_\omega$ и, следовательно, конечномерно. Перенумеровав члены бесконечно большой последовательности $\{\omega + 1/\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в порядке возрастания модулей, получим последовательность $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ всех собственных чисел оператора $\tilde{T}$, занумерованных в порядке возрастания модулей с учетом алгебраических кратностей; очевидно, что $\mu_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Если $\lambda \neq \mu_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ и $\lambda \neq \omega$, то $(\lambda - \omega)^{-1} \notin \sigma(\tilde{R}_\omega)$;

следовательно, $\exists(E + (\omega - \lambda)\tilde{R}_\omega)^{-1} \in \mathcal{B}(H)$. Но тогда из операторного равенства $\tilde{T} - \lambda E = (\tilde{T} - \omega E)(E + (\omega - \lambda)\tilde{R}_\omega)$ и соотношения $\tilde{R}_\omega \in \mathcal{S}(H)$ получаем, что $\exists \tilde{R}_\lambda = (E + (\omega - \lambda)\tilde{R}_\omega)^{-1}\tilde{R}_\omega \in \mathcal{S}(H) \subset \mathcal{B}(H)$. Таким образом, $\lambda \notin \sigma(\tilde{T})$, $\sigma(\tilde{T}) = \{\mu_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и резольвента $\tilde{R}_\lambda$ оператора $\tilde{T}$ является ядерным оператором в $H \quad \forall \lambda \notin \sigma(\tilde{T})$. Поскольку $\sigma(\tilde{T}) \subset K'$, то $\forall n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N}$ такое, что $|\mu_n - \lambda_k| \leq A_0 \lambda_k^\gamma$.

Так как для каждого компакта $K \subset \Omega'$ при всех $\lambda \in K$ и всех $m = 0, 1, 2, \dots$ имеем $|(-1)^m R_\lambda Q_\lambda^m|_1 \leq |R_\lambda|_1 \|Q_\lambda\|^m \leq \tilde{C}(A_0 \rho(K))^m$, где $\rho(K) < 1/A_0$ и $|R_\lambda|_1 \leq \tilde{C} \quad \forall \lambda \in K$, то ряд в правой части (8) сходится к $\tilde{R}_\lambda$ по ядерной норме равномерно на компактах из области Ω' . Поэтому для любого $s = 0, 1, 2, \dots$ и всех $\lambda \in \Omega'$ выполняется равенство

$$\lambda^s \operatorname{Sp} \tilde{R}_\lambda = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \lambda^s \operatorname{Sp}(R_\lambda Q_\lambda^m), \quad (9)$$

и ряд в правой части (9), составленный из числовых аналитических в области Ω функций, сходится равномерно на компактах из Ω' . Левая часть (9) является аналитической функцией в области $\tilde{\Omega} \equiv \mathbb{C} \setminus \sigma(\tilde{T})$.

Нетрудно убедиться, что в $\mathcal{S}(H) \quad \forall \lambda \in \Omega \exists B'_\lambda \equiv dB_\lambda/d\lambda = B_\lambda R_\lambda$, откуда $Q'_\lambda = P_1 B'_\lambda = Q_\lambda R_\lambda$. Следовательно, $\forall m \in \mathbb{N}, \forall \lambda \in \Omega$ имеем

$$\begin{aligned} (\operatorname{Sp} Q_\lambda^m)' &= \operatorname{Sp}(Q_\lambda^m)' = \operatorname{Sp}\left(\sum_{j=0}^{m-1} Q_\lambda^j Q'_\lambda Q_\lambda^{m-1-j}\right) = \sum_{j=0}^{m-1} \operatorname{Sp}(Q_\lambda^j Q'_\lambda Q_\lambda^{m-1-j}) \\ &= m \operatorname{Sp}(Q_\lambda^{m-1} Q'_\lambda) = m \operatorname{Sp}(R_\lambda Q_\lambda^m). \end{aligned}$$

Таким образом, при всех $m \in \mathbb{N}$ и $\lambda \in \Omega$ справедливо равенство

$$\operatorname{Sp}(R_\lambda Q_\lambda^m) = \frac{1}{m} \frac{d}{d\lambda} \operatorname{Sp} Q_\lambda^m. \quad (10)$$

Пусть Γ – замкнутый спрямляемый контур, лежащий в области Ω' и ограничивающий конечную область G комплексной плоскости. Поскольку $\lambda_n \rightarrow \infty$ и $\mu_n \rightarrow \infty$, то в G содержится лишь конечное число собственных чисел каждого из операторов T и $\tilde{T}$. Контур Γ является компактом, лежащим в области Ω' , поэтому при любом $s = 0, 1, 2, \dots$ ряд в правой части (9) равномерно сходится на Γ к левой части (9), и его можно проинтегрировать почленно по контуру Γ . С учетом (10) при отрицательном направлении движения по контуру Γ получаем

$$\int_{\Gamma} \lambda^s \operatorname{Sp} \tilde{R}_\lambda d\lambda = \int_{\Gamma} \lambda^s \operatorname{Sp} R_\lambda d\lambda + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \int_{\Gamma} s \lambda^{s-1} \operatorname{Sp} Q_\lambda^m d\lambda. \quad (11)$$

Так как для любого $s = 0, 1, 2, \dots$ имеем

$$\lambda^s \operatorname{Sp} R_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^s}{\lambda_n - \lambda} \quad \forall \lambda \in \Omega, \quad \lambda^s \operatorname{Sp} \tilde{R}_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^s}{\mu_n - \lambda} \quad \forall \lambda \in \tilde{\Omega},$$

причем оба эти ряда сходятся равномерно на Γ (ввиду их абсолютной сходимости и ограниченности множества Γ на комплексной плоскости), то эти ряды можно почленно

проинтегрировать по контуру Γ (как и ранее, выбираем отрицательное направление). Следовательно, при любом $s = 0, 1, 2, \dots$ справедливы равенства

$$\int_{\Gamma} \lambda^s \operatorname{Sp} R_{\lambda} d\lambda = 2\pi i \sum_{\lambda_n \in G} \lambda_n^s, \quad \int_{\Gamma} \lambda^s \operatorname{Sp} \tilde{R}_{\lambda} d\lambda = 2\pi i \sum_{\mu_n \in G} \mu_n^s. \quad (12)$$

При $s = 0$ из (11) и (12) получаем

$$\sum_{\mu_n \in G} 1 = \sum_{\lambda_n \in G} 1 \quad (13)$$

(свойство устойчивости корневых кратностей).

Рассмотрим компакт $K \subset \Omega'$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ $\exists \tau_n \in K$ такой, что $|\lambda_n - \lambda| \geq |\lambda_n - \tau_n| \quad \forall \lambda \in K$. Но тогда $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \lambda \in K$ имеем

$$\left| \frac{\lambda_n^{\gamma}}{\lambda_n - \lambda}(\cdot, u_n)u_n \right|_1 = \frac{\lambda_n^{\gamma}}{|\lambda_n - \lambda|} \leq \frac{\lambda_n^{\gamma}}{|\lambda_n - \tau_n|}.$$

Поскольку $\lambda_n \rightarrow +\infty$, а последовательность $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена, то $\lambda_n^{\gamma}/|\lambda_n - \tau_n| \sim \lambda_n^{\gamma-1}$ при $n \rightarrow +\infty$. Согласно доказанному выше

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\gamma-1} < +\infty;$$

следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^{\gamma}}{|\lambda_n - \tau_n|} < +\infty.$$

Таким образом, формула

$$B_{\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^{\gamma}}{\lambda_n - \lambda}(\cdot, u_n)u_n$$

справедлива в смысле сходимости по ядерной норме, равномерной на компактах из Ω' . Так как $Q_{\lambda} = P_1 B_{\lambda}$, где $P_1 \in \mathcal{B}(H)$, $P_1 u_n = \lambda_n^{-\gamma} P u_n$ и $\operatorname{Sp}[(\cdot, u_n) P u_n] = (P u_n, u_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то $\forall \lambda \in \Omega'$ справедливы формулы

$$Q_{\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cdot, u_n) P u_n}{\lambda_n - \lambda} \quad \text{в } \mathcal{S}(H), \quad \operatorname{Sp} Q_{\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(P u_n, u_n)}{\lambda_n - \lambda},$$

причем ряды в их правых частях сходятся равномерно на компактах из Ω' . Интегрируя в последнем равенстве почленно по контуру Γ в отрицательном направлении, находим

$$\int_{\Gamma} \operatorname{Sp} Q_{\lambda} d\lambda = 2\pi i \sum_{\lambda_n \in G} (P u_n, u_n). \quad (14)$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$ полагаем $r_n = (\lambda'_n + \lambda'_{n+1})/2$, $\Gamma_n = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = r_n\}$, $G_n = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < r_n\}$. Очевидно, K' есть объединение всех замкнутых шаров $\bar{K}_n = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda - \lambda'_n| \leq A_0(\lambda'_n)^{\gamma}\}$, где $n \in \mathbb{N}$. В силу условия 1) теоремы 1

и неравенства $\gamma < q$ получаем $\Delta \lambda'_n / (\lambda'_n)^\gamma \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$, поэтому существует натуральное число N такое, что $\forall n \geq N$ справедливы соотношения $\Gamma_n \subset \Omega'$ и $G_n \cap K' = \overline{K}_1 \cup \overline{K}_2 \cup \dots \cup \overline{K}_n$. Применяя (13) к областям G_n ($n \geq N$) и полагая $n_0 = \nu'_1 + \nu'_2 + \dots + \nu'_N$, находим, что $\mu_n \in G_N \cap K'$ при $n = 1, \dots, n_0$ и $|\mu_n - \lambda_n| \leq A_0 \lambda_n^\gamma \forall n > n_0$. В частности, при $N = 1$ имеем $|\mu_n - \lambda_n| \leq A_0 \lambda_n^\gamma \forall n \in \mathbb{N}$.

Следовательно, если $\Gamma \subset \Omega'$ и $\overline{K}_j \subset G$ для всех $j = 1, \dots, N$, то при $s = 1$ равенство (11) с учетом (12)–(14) может быть записано в виде

$$\sum_{\lambda_n \in G} (\mu_n - \lambda_n - (Pu_n, u_n)) = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{2\pi i m} \int_{\Gamma} \text{Sp } Q_{\lambda}^m d\lambda \equiv J(\Gamma). \quad (15)$$

Учитывая, что $\|Q_{\lambda}\| \leq A_0 \rho(\Gamma) < 1 \quad \forall \lambda \in \Gamma$, находим

$$\begin{aligned} 4\pi |J(\Gamma)| &\leq \sum_{m=2}^{\infty} \int_{\Gamma} |Q_{\lambda}^m|_1 |d\lambda| \leq A_0 \sum_{m=2}^{\infty} \int_{\Gamma} |B_{\lambda}|_1 \|Q_{\lambda}\|^{m-1} |d\lambda| \\ &\leq A_0 \max_{\Gamma} |B_{\lambda}|_1 \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\Gamma} \|Q_{\lambda}\|^m |d\lambda| \leq A_0 \max_{\Gamma} |B_{\lambda}|_1 \int_{\Gamma} \sum_{m=1}^{\infty} \|Q_{\lambda}\|^m |d\lambda|. \end{aligned}$$

Так как всюду на Γ справедливо неравенство

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|Q_{\lambda}\|^m = \frac{\|Q_{\lambda}\|}{1 - \|Q_{\lambda}\|} \leq \frac{A_0 \|B_{\lambda}\|}{1 - A_0 \rho(\Gamma)},$$

то получаем следующую оценку при $c(\Gamma) = A_0^2 / (4\pi(1 - A_0 \rho(\Gamma)))$:

$$|J(\Gamma)| \leq c(\Gamma) \max_{\Gamma} |B_{\lambda}|_1 \int_{\Gamma} \|B_{\lambda}\| |d\lambda|. \quad (16)$$

Вернемся к контуру Γ_n при $n \geq N$. Полагаем $d_n = \Delta \lambda'_n / 2$, $v_n = d_n / r_n$. С учетом условия 1) теоремы 1 получаем

$$\frac{C_1}{2r_n^{1-q}} \leq v_n < 1. \quad (17)$$

Пусть $\lambda \in \Gamma_n$, т.е. $\lambda = r_n e^{i\theta}$, где $|\theta| \leq \pi$. Нетрудно убедиться, что ввиду выполнения условий $\lambda \in \Gamma_n$ и $0 \leq \gamma < 1/2$ функция $\varphi(u) \equiv u^\gamma / |u - \lambda|$ убывает на промежутке $(r_n, +\infty)$. Поэтому $\forall m > n$ находим $(\lambda'_m)^\gamma / |\lambda'_m - \lambda| \leq (\lambda'_{n+1})^\gamma / |\lambda'_{n+1} - \lambda|$. Поскольку, кроме того, $\forall m \leq n$ имеем $(\lambda'_m)^\gamma / |\lambda'_m - \lambda| \leq (\lambda'_n)^\gamma / |\lambda'_n - \lambda|$, то $\forall \lambda \in \Gamma_n$ получаем

$$\|B_{\lambda}\| = \max_{m \geq 1} \frac{(\lambda'_m)^\gamma}{|\lambda'_m - \lambda|} \leq (\lambda'_{n+1})^\gamma \max_{1 \leq m \leq n+1} \frac{1}{|\lambda'_m - \lambda|}.$$

Так как $|u - \lambda| \geq r_n \psi_n(\theta) \quad \forall u \in F_n \equiv (0, \lambda'_n] \cup [\lambda'_{n+1}, +\infty)$, где $\psi_n(\theta) = \max\{|\sin \theta|, v_n\}$ при $|\theta| < \pi/2$ и $\psi_n(\theta) = 1$ при $\pi/2 \leq |\theta| \leq \pi$, то с учетом неравенства $\lambda'_{n+1} < 2r_n$ находим $\|B_{\lambda}\| \leq 2^\gamma r_n^{\gamma-1} / \psi_n(\theta)$.

Отсюда следует, что $\rho(\Gamma_n) \leq 2^\gamma r_n^\gamma / d_n \leq 2^{\gamma+1} r_n^{\gamma-q} / C_1$. Так как $\gamma < q$, то $\rho(\Gamma_n) \rightarrow 0$ и $c(\Gamma_n) \rightarrow A_0^2 / (4\pi)$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому для любого $n \geq N$ и некоторой постоянной $C_{10} > 0$ выполняется неравенство

$$|c(\Gamma_n)| \leq C_{10}. \quad (18)$$

Ввиду равенства $|d\lambda| = r_n d\theta$ и четности функции $\psi_n(\theta)$ получаем

$$\frac{1}{2^{\gamma+1}r_n^\gamma} \int_{\Gamma_n} \|B_\lambda\| |d\lambda| \leq \int_0^\pi \frac{d\theta}{\psi_n(\theta)} \leq \int_0^{v_n} \frac{d\theta}{v_n} + \frac{\pi}{2} \int_{v_n}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\theta} + \int_{\pi/2}^\pi d\theta \leq 1 + \frac{\pi}{2} \ln \frac{\pi e}{2v_n}.$$

Отсюда в силу (17) $\exists C_{11} > 0$ такая, что $\forall n \geq N$

$$\int_{\Gamma_n} \|B_\lambda\| |d\lambda| \leq C_{11} r_n^\gamma \ln(1 + r_n). \quad (19)$$

Для всех $\lambda \in \Gamma_n$ и $u \geq 0$ верно неравенство $|u - \lambda| \geq |u - r_n|$, поэтому $\forall m \in \mathbb{N}$ $|\lambda'_m - \lambda| \geq |\lambda'_m - r_n|$. Следовательно, $\forall \lambda \in \Gamma_n$ получаем

$$|B_\lambda|_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\nu'_m(\lambda'_m)^\gamma}{|\lambda'_m - \lambda|} \leq |B_{r_n}|_1 = \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} \quad (20)$$

при $a_{mn} = \nu'_m(\lambda'_m)^\gamma / |\lambda'_m - r_n|$. Для всех $n \geq N$ и $m \in \mathbb{N}$ находим $0 < a_{mn} \leq \nu'_m \rho(\Gamma_n)$, поэтому

$$0 < a_{mn} \leq \frac{2^{\gamma+1}C_9}{r_n^\delta}, \quad (21)$$

где $\delta = q - \beta - \gamma \in (0, 1)$. Пусть $g_n(u) = 1/(u^\delta |u - r_n|)$ при $0 < u \neq r_n$. Функция $g_n(u)$ положительна, возрастает на $[u_n, r_n)$ и убывает на каждом из промежутков $(0, u_n]$ и $(r_n, +\infty)$, где $u_n = \delta r_n / (1 + \delta) \in (0, r_n/2)$. Так как $\forall m \geq 2$ имеем $a_{mn} \leq C_9 g_n(\lambda'_m) \min\{\Delta \lambda'_{m-1}, \Delta \lambda'_m\}$, то

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} \leq a_{1n} + a_{nn} + a_{n+1,n} + C_9 \int_{F_n} g_n(u) du. \quad (22)$$

После подстановки $y = (u - r_n)/r_n$ получаем

$$r_n^\delta \int_{F_n} g_n(u) du = I(Y_n) \leq I(Y_0) + w_n, \quad \text{где } I(Y) = \int_Y \frac{dy}{(1+y)^\delta |y|}, \quad (23)$$

$Y_0 = (-1, -1/2] \cup [1/2, +\infty)$ и $\forall n \geq N$ $Y_n = (-1, -v_n] \cup [v_n, +\infty)$; $w_n = 0$ при $v_n \geq 1/2$, $w_n = I(Y_n \setminus Y_0)$ при $v_n < 1/2$. При $v_n < 1/2$ $\forall y \in Y_n \setminus Y_0$ имеем $(1+y)^\delta |y| \geq |y|/2^\delta$, поэтому $w_n \leq 2^{\delta+1} \ln[1/(2v_n)]$. Отсюда с учетом (20)–(23) и (17) находим, что $\exists C_{12} > 0$ такая, что $\forall n \geq N$

$$\max_{\Gamma_n} |B_\lambda|_1 \leq C_{12} \frac{\ln(1 + r_n)}{r_n^\delta}. \quad (24)$$

Применяя (15) к контуру Γ_n , с учетом (16), (18), (19) и (24) получаем, что при всех $n \geq N$ справедлива оценка

$$|J(\Gamma_n)| \leq C_{13} r_n^{2\gamma - q + \beta} \ln^2(1 + r_n), \quad (25)$$

где $C_{13} = C_{10} C_{11} C_{12} > 0$. Так как по условию 3) теоремы $2\gamma - q + \beta < 0$, из (25) следует $J(\Gamma_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Но тогда в силу (15) имеем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{\lambda_m \leq \lambda'_n} (\mu_m - \lambda_m - (Pu_m, u_m)) = 0,$$

что равносильно предельному соотношению (5). Теорема доказана.

Налагаем следующее условие на собственные числа оператора T :

$$\lambda_n = B_1 n^{\alpha_1} + B_2 n^{\alpha_2} + \dots + B_m n^{\alpha_m} + o(n^\delta),$$

$m \in \mathbb{N}$, $\alpha = \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_m \geq \delta$, $\alpha > 1$, $B_1 > 0$, $0 \neq B_j \in \mathbb{R}$ при $j > 1$.

(26)

ТЕОРЕМА 2. Если условие (26) выполняется при $\delta \leq \alpha - 1$, а $P \prec (T - \lambda_0 E)^\gamma$ при $0 \leq \gamma < (\alpha - 1)/(2\alpha)$ и $\lambda_0 < \lambda_1$, то для оператора $\tilde{T} = T + P$ справедлива формула следов

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n - (Pu_n, u_n)) = 0. \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не умаляя общности, можно считать, что $\delta = \alpha - 1$. Полагая $q = (\alpha - 1)/\alpha$ и учитывая, что при $n \rightarrow \infty$ $\lambda_n \sim B_1 n^\alpha$ и $\lambda_{n+1} \sim \lambda_n$, получаем

$$\begin{aligned} \Delta \lambda_n &= B_1((n+1)^{\alpha_1} - n^{\alpha_1}) + \dots + B_m((n+1)^{\alpha_m} - n^{\alpha_m}) + o(n^{\alpha-1}) \\ &= B_1(\alpha_1 n^{\alpha_1-1} + o(n^{\alpha_1-1})) + \dots + B_m(\alpha_m n^{\alpha_m-1} + o(n^{\alpha_m-1})) + o(n^{\alpha-1}) \\ &= \alpha B_1 n^{\alpha-1} + o(n^{\alpha-1}) \sim \alpha B_1^{1/\alpha} \lambda_{n+1}^q. \end{aligned}$$

Следовательно, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n \geq N_0$ имеем $\lambda_{n+1} > 0$ и $\Delta \lambda_n \geq C_1 \lambda_{n+1}^q$, где $C_1 = \alpha B_1^{1-q}/2 > 0$. В частности, отсюда получаем $\Delta \lambda_n > 0 \quad \forall n \geq N_0$, поэтому $\nu_n = 1 \quad \forall n > N_0$ и условие 2) теоремы 1 выполнено при $\beta = 0$. Условие 1) теоремы 1 выполнено при $q = (\alpha - 1)/\alpha$. Поскольку по условию $0 \leq \gamma < q/2 = (q - \beta)/2$, то выполнено и условие 3) теоремы 1. Применяя теорему 1, получаем формулу следов (5). Ввиду того, что в рассматриваемом случае все собственные числа оператора T за исключением, быть может, лишь конечного их числа однократны, формула (5) записывается в виде (27). Теорема доказана.

ПРИМЕР 1. Пусть T_1 – самосопряженный дифференциальный оператор в $L^2(0, \pi)$, порожденный задачей Штурма–Лиувилля $-u'' = \lambda u$, $u(0) = u(\pi) = 0$; $\forall s > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n(x) = \sqrt{2/\pi} \sin nx$ есть собственная функция оператора $T_s = T_1^s$, соответствующая собственному числу $\lambda_n^s = n^{2s}$. Пусть P – линейный ограниченный оператор в $L^2(0, \pi)$, заданный равенством $(Pu)(x) = p(x)u(x)$, где $p(x)$ – комплекснозначная функция класса $L^\infty(0, \pi)$. Условия теоремы 2 очевидным образом выполняются для операторов $T = T_s$ и P при любом $s > 1/2$, $\alpha = 2s$, $m = B_1 = \lambda_1 = 1$, $\gamma = \lambda_0 = 0$ и любом $\delta \leq 2s - 1$. Согласно теореме 2 собственные числа $\{\mu_n^{(s)}\}_{n=1}^\infty$ оператора $\tilde{T} = T_s + P$, занумерованные по возрастанию модулей, удовлетворяют формуле следов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu_n^{(s)} - n^{2s} - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi p(x) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi p(x) \cos 2nx dx \right) = 0. \quad (28)$$

Из (28) следует (при $s = 1$ это отмечено в [6]), что при $s > 1/2$ ряд в левой части формулы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu_n^{(s)} - n^{2s} - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi p(x) dx \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi p(x) dx - S(q; 0) \quad (29)$$

сходится тогда и только тогда, когда ряд Фурье функции $q(x) = (p(x) + p(\pi - x))/4$ по системе косинусов $\{1/\sqrt{\pi}, \sqrt{2/\pi} \cos x, \sqrt{2/\pi} \cos 2x, \dots\}$ сходится в точке $x = 0$ к некоторому числу $S(q; 0)$; при этом имеет место формула (29). Формула (2) является следствием формулы следов (29) при $s = 1$ и $p \in C^1[0, \pi]$.

ПРИМЕР 2. Пусть T_s – оператор из примера 1. При $s > 1/4$ для всех $u \in \mathcal{D}(T_s)$ справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(u, u_n)| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4s}} \|T_s u\|^2}; \quad (30)$$

следовательно, имеет место вложение $\mathcal{D}(T_s) \subset C[0, \pi]$. Поэтому можно ввести действующий в $L^2(0, \pi)$ линейный оператор P , определенный на объединении всех $\mathcal{D}(T_s)$ при $s > 1/4$ по правилу $(Pu)(x) = r(x)u(x_0)$, где $x_0 \in (0, \pi)$ и $r \in L^2(0, \pi)$. Из (30) следует, что $P \prec T_s$ при $s > 1/4$. Таким образом, все условия теоремы 2 выполнены для операторов $T = T_s$ и P при любом $s > 1$ и $\alpha = 2s$, $m = B_1 = \lambda_1 = 1$, $\lambda_0 = 0$, $1/(4s) < \gamma < (2s - 1)/(4s)$ и $\delta \leq 2s - 1$. Применяя теорему 2, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu_n^{(s)} - n^{2s} - \frac{2}{\pi} \sin nx_0 \int_0^{\pi} r(x) \sin nx \, dx \right) = 0, \quad (31)$$

где $\{\mu_n^{(s)}\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные числа оператора $\tilde{T}_s = T_s + P$, занумерованные в порядке возрастания модулей. Из неравенства (31) находим, что ряд в левой части формулы

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n^{(s)} - n^{2s}) = Q(r; x_0) \quad (32)$$

сходится тогда и только тогда, когда ряд Фурье $\sigma_1[r]$ функции $r(x)$ по системе синусов $\{\sqrt{2/\pi} \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ на $[0, \pi]$ сходится в точке x_0 к некоторому числу $Q(r; x_0) \in \mathbb{C}$; при этом справедлива формула следов (32). В частности, при $s = k$, где $k = 2, \dots, \infty$, формула (32) является формулой следов для собственных чисел $\mu_n^{(k)}$ граничной задачи

$$\begin{aligned} -u^{(2k)}(x) + r(x)u(x_0) &= \mu u(x) \quad \text{на } [0, \pi], \\ u(0) = u''(0) = \dots &= u^{(2k-2)}(0) = 0, \\ u(\pi) = u''(\pi) = \dots &= u^{(2k-2)}(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Если $r \in C^1[0, \pi]$ и $r(0) = 0$, $r(\pi) = 0$, то $\sigma_1[r]$ абсолютно сходится и $Q(r; x_0) = r(x_0)$. Именно при таких условиях на функцию r формула (32) с правой частью, замененной на $r(x_0)$, была получена в частном случае $k = 3$ в [5].

ЛЕММА 1. Если

$$\{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \{Aj^\alpha + D \mid 0 \leq j \in \mathbb{Z}\}, \quad \text{где } \alpha > 1, A > 0, D \in \mathbb{R}, \quad (33)$$

то выполняется условие 1) теоремы 1 при $q = (\alpha - 1)/\alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (33) $\forall n \in \mathbb{N}$ найдется целое неотрицательное число j_n такое, что $\lambda_n = Aj_n^\alpha + D$. Отсюда вытекает асимптотическое соотношение $j_{n+1} - 1 \sim (\lambda_{n+1}/A)^{1/\alpha}$ при $n \rightarrow \infty$, поэтому $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n \geq N_1$ имеем $\lambda_n > 0$ и $j_{n+1} - 1 \geq \lambda_{n+1}^{1/\alpha}/(2A^{1/\alpha})$. Если $n \geq N_1$ и $\lambda_n \neq \lambda_{n+1}$, то $j_n \leq j_{n+1} - 1$ и

$$\Delta\lambda_n = A(j_{n+1}^\alpha - j_n^\alpha) \geq A(j_{n+1}^\alpha - (j_{n+1} - 1)^\alpha) \geq A\alpha(j_{n+1} - 1)^{\alpha-1} \geq C_1\lambda_{n+1}^q$$

при $q = (\alpha - 1)/\alpha \in (0, 1)$ и $C_1 = \alpha 2^{1-\alpha} A^{1/\alpha} > 0$.

Из теоремы 1 и леммы 1 следует

ТЕОРЕМА 3. Если выполнено условие (33), $\nu_n \leq C_2 \lambda_n^\beta$ при всех достаточно больших n , а $P \prec (T - \lambda_0 E)^\gamma$, где $0 \leq \beta < (\alpha - 1)/\alpha$, $0 \leq 2\gamma < (\alpha - 1)/\alpha - \beta$, $C_2 > 0$ и $\lambda_0 < \lambda_1$, то для оператора $\tilde{T}$ справедлива формула (5).

В следующих ниже примерах 3 и 4 суммой двойного ряда будем называть предел его сферических частичных сумм.

ПРИМЕР 3. Пусть T_1 – самосопряженный дифференциальный оператор в $L^2(K)$, порожденный задачей Неймана для оператора Лапласа $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ на квадрате $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, y \leq \pi\}$:

$$\Delta u + \lambda u = 0 \text{ на } K, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial K} = 0. \quad (34)$$

Пусть $U = \{u_{mn}\}_{m,n=0}^\infty$ – полная ортонормированная система в $L^2(K)$, где $u_{mn}(x, y) = (2/\pi)\sqrt{\tau_m \tau_n} \cos mx \cos ny$ – собственная функция оператора $T_\alpha = T_1^\alpha$ ($\alpha > 0$), соответствующая его собственному числу λ_{mn}^α ; здесь $\lambda_{mn} = m^2 + n^2$, $\tau_m = 1$ при $m \in \mathbb{N}$ и $\tau_0 = 1/2$. Согласно известному результату В. Серпинского количество точек с целочисленными координатами в круге $x^2 + y^2 \leq \lambda$ равно $\pi\lambda + O(\lambda^{1/3})$, поэтому кратность собственного числа λ_{mn}^α оператора T_α есть $O(\lambda_{mn}^{1/3})$. Таким образом, все условия, налагаемые на оператор T в теореме 3, выполнены для оператора $T = T_\alpha$ при $\alpha > 4/3$, $\beta = 1/(3\alpha)$, $A = 1$, $D = 0$.

Пусть $(Pu)(x, y) = p(x, y)u(x, y) \quad \forall u \in L^2(K)$ при $p \in L^\infty(K)$. Тогда P – ограниченный линейный оператор в $L^2(K)$ и при любом $\alpha > 4/3$ для операторов T_α и P выполнены все условия теоремы 3 (с $\lambda_0 = -1$, $\lambda_1 = 0$, $\gamma = 0$). Согласно теореме 3 при любом $\alpha > 4/3$ собственные числа оператора $\tilde{T}_\alpha = T_\alpha + P$ можно с учетом алгебраических кратностей записать в виде двойной последовательности $\{\mu_{mn}^{(\alpha)}\}_{m,n=1}^\infty$ так, что

$$\sum_{m,n=0}^\infty \left(\mu_{mn}^{(\alpha)} - (m^2 + n^2)^\alpha - \iint_K p(x, y) u_{mn}^2(x, y) dx dy \right) = 0. \quad (35)$$

Из (35) вытекает следующее утверждение (см. [6]): двойной числовой ряд в левой части формулы

$$\sum_{m,n=0}^\infty \left(\mu_{mn}^{(\alpha)} - \lambda_{mn}^\alpha - \frac{\tau_m \tau_n}{\pi^2} \iint_K p(x, y) (1 + \cos 2mx + \cos 2ny) dx dy \right) = S \quad (36)$$

имеет конечную сумму тогда и только тогда, когда двойной тригонометрический ряд Фурье $\sigma[q]$ функции $q(x, y) = (p(x, y) + p(\pi - x, y) + p(x, \pi - y) + p(\pi - x, \pi - y))/16$ по системе U на квадрате K имеет в точке $(0, 0)$ конечную сумму $S \in \mathbb{C}$; при этом справедлива формула (36). В [6] формулы следов (35) и (36) рассматривались при $\alpha > 3/2$.

ПРИМЕР 4. Пусть T_α – оператор из примера 3. Так как

$$\sum_{m,n=0}^\infty |(u, u_{mn})| \leq \sqrt{\sum_{m,n=0}^\infty \frac{1}{[(m^2 + n^2)^\alpha + 1]^{2\gamma}}} \|(T_\alpha + E)^\gamma u\| \quad (37)$$

при $\alpha > 0$, $\gamma > 1/(2\alpha)$ и $u \in \mathcal{D}(T_\alpha^\gamma)$, то $\mathcal{D}(T_\alpha) \subset C(K) \quad \forall \alpha > 1/2$. Пусть P – линейный оператор в $L^2(K)$, определенный на объединении всех $\mathcal{D}(T_\alpha)$ при $\alpha > 1/2$ по

правилу $(Pu)(x, y) = r(x, y)u(x_0, y_0)$, где $r \in L^2(K)$, $(x_0, y_0) \in K$. Из (37) получаем $P \prec (T_\alpha + E)^\gamma$ при $\alpha > 1/2$ и $1/\alpha < 2\gamma < 2$. Следовательно, для операторов $T = T_\alpha$ и P выполняются все условия теоремы 3 при $\alpha > 7/3$, $\beta = 1/(3\alpha)$, $1/\alpha < 2\gamma < 1 - 4/(3\alpha)$, $A = 1$, $D = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_0 = -1$. Согласно теореме 3 собственные числа оператора $\tilde{T}_\alpha = T_\alpha + P$ при любых $\alpha > 7/3$ и $r \in L^\infty(K)$ можно с учетом алгебраических кратностей записать в виде двойной последовательности $\{\mu_{mn}^{(\alpha)}\}_{m,n=0}^\infty$ так, что

$$\sum_{m,n=0}^\infty \left(\mu_{mn}^{(\alpha)} - \lambda_{mn}^\alpha - u_{mn}(x_0, y_0) \iint_K r(x, y) u_{mn}(x, y) dx dy \right) = 0. \quad (38)$$

Если двойной ряд Фурье $\sigma[r]$ функции $r(x, y)$ по системе U на квадрате K имеет в точке (x_0, y_0) конечную сумму $S(r; x_0, y_0) \in \mathbb{C}$, то формула следов (38) записывается в виде

$$\sum_{m,n=0}^\infty (\mu_{mn}^{(\alpha)} - (m^2 + n^2)^\alpha) = S(r; x_0, y_0). \quad (39)$$

Если же $\sigma[r]$ не имеет конечной суммы в точке (x_0, y_0) , то нет конечной суммы и у двойного ряда в левой части (39).

ЛЕММА 2. Из условия (26) при $\delta > \alpha - 1$ следует $\nu_n = o(\lambda_n^\beta)$, где $\beta = (1 - \alpha + \delta)/\alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ — строго возрастающая последовательность всех натуральных чисел n_k , для которых $\lambda_{n_k} < \lambda_{n_k+1}$; полагаем $q_k = \nu_{n_k} - 1$. Так как $\forall k \in \mathbb{N} \lambda_{n_k} - \lambda_{n_k - q_k} = 0$, то из (26) находим при всех $s \geq \delta$

$$B_1(n_k^{\alpha_1} - (n_k - q_k)^{\alpha_1}) + \dots + B_m(n_k^{\alpha_m} - (n_k - q_k)^{\alpha_m}) = o(n_k^s). \quad (40)$$

При $s = \alpha$ равенство (40) записывается в виде $B_1(1 - (1 - q_k/n_k)^\alpha) = o(1)$, откуда ввиду неравенства $B_1 \neq 0$ получаем $q_k = o(n_k)$. Но тогда $\forall j = 1, \dots, m \ n_k^{\alpha_j} - (n_k - q_k)^{\alpha_j} = \alpha_j q_k n_k^{\alpha_j-1} (1 + o(1))$, поэтому из (40) при $s = \delta$ следует $B_1 \alpha q_k n_k^{\alpha-1} = o(n_k^\delta)$, т.е. $q_k = o(n_k^{1-\alpha+\delta})$. Ввиду (26) $\lambda_{n_k} \sim B_1 n_k^\alpha$, поэтому имеем $\nu_{n_k} = o(\lambda_{n_k}^\beta)$ или, что то же самое, $\nu_n = o(\lambda_n^\beta)$.

ТЕОРЕМА 4. Предположим, что

- 1) если $\lambda_n \neq \lambda_{n+1}$, то $\Delta \lambda_n \geq C n^{\alpha-1}$, где $\alpha > 1$ и $C > 0$;
- 2) условие (26) выполняется при $\alpha - 1 < \delta < 2\alpha - 2$;
- 3) $P \prec (T - \lambda_0 E)^\gamma$ при $0 \leq 2\gamma < (2\alpha - 2 - \delta)/\alpha$ и $\lambda_0 < \lambda_1$.

Тогда справедлива формула следов (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (26) следует $n \sim (\lambda_{n+1}/B_1)^{1/\alpha}$, поэтому $n \geq 2(\lambda_{n+1}/B_1)^{1/\alpha}$ при всех достаточно больших n . Отсюда и из условия 1) вытекает выполнение условия 1) теоремы 1 при $q = (\alpha - 1)/\alpha$. Из условия 2) и леммы 2 следует выполнение условия 2) теоремы 1 при $\beta = (1 - \alpha + \delta)/\alpha$. Согласно условию 3) выполняется также условие 3) теоремы 1. Остается применить теорему 1.

ТЕОРЕМА 5. Пусть

- 1) выполнено условие (33);
- 2) выполнено условие (26) при $\alpha - 1 < \delta < 2\alpha - 2$;
- 3) $P \prec (T - \lambda_0 E)^\gamma$ при $0 \leq 2\gamma < (2\alpha - 2 - \delta)/\alpha$ и $\lambda_0 < \lambda_1$.

Тогда справедлива формула следов (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 1 из условия 1) следует выполнение условия 1) теоремы 1 при $q = (\alpha - 1)/\alpha$. Отсюда с учетом условия 2) получаем выполнение условия 1) теоремы 4. Все условия теоремы 4 выполнены, поэтому справедлива формула (5).

В 1991 году В.В. Дубровский в статье [3] рассмотрел следующую теорему: *если оператор T удовлетворяет условию*

$$\lambda_n = B_1 n^\alpha + o(n^\delta), \quad \text{где } \alpha > \frac{3}{2}, \delta \leq \alpha, \delta < 2\alpha - 2, B_1 > 0, \quad (41)$$

и P – ограниченный линейный оператор в H , то найдется возрастающая стремящаяся к $+\infty$ числовая последовательность $\{h_k\}_{k=1}^\infty$ такая, что для оператора $\tilde{T} = T + P$ справедлива формула следов

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{\lambda_n \leq h_k} (\mu_n - \lambda_n - (Pu_n, u_n)) = 0. \quad (42)$$

Заметим, что вместо ограничений (41) на α и δ в [3] используется условие $1/2 < \delta/2 < \alpha - 1 \leq \delta \leq \alpha$, однако при выполнении (41) его всегда можно удовлетворить, увеличив при необходимости δ .

Условие (41) является частным случаем условия (26). При $\delta \leq \alpha - 1$ согласно теореме 2 справедлива формула следов (27), следствием которой является формула (42). При $\delta > \alpha - 1$ из (41), так же, как из (26), не следует условие 1) теоремы 1, поэтому при таких δ теорема Дубровского [3] не вытекает из теоремы 1. Однако если в условиях теоремы Дубровского [3] при $\delta > \alpha - 1$ дополнительно выполняется условие 1) теоремы 4, то согласно теореме 4 имеет место формула следов (5), уточняющая формулу (42).

В частности, справедлива следующая теорема, вытекающая из теоремы 5 и впервые доказанная в работе [6], систематически использующей условие (33): *если оператор T удовлетворяет условиям (41) и (33), а P – линейный ограниченный оператор в H , то для оператора $\tilde{T} = T + P$ верна формула следов (5)*. На основе этой теоремы в [6] получены конкретные формулы следов для оператора $(-\Delta)^\alpha + p(x, y)$ в $L^2(G)$, где $\alpha > 3/2$ и комплекснозначный потенциал $p(x, y)$ принадлежит различным классам пространства $L^\infty(G)$, для случаев, когда плоская область G есть прямоугольник с измеримыми квадратами сторон, равнобедренный прямоугольный треугольник, прямоугольный треугольник с острым углом $\pi/6$ и равносторонний треугольник. При этом наряду с задачами Дирихле и Неймана рассмотрены все возможные смешанные граничные задачи следующего типа: на некоторых сторонах многоугольника G задано условие Дирихле, а на оставшихся сторонах – условие Неймана (для прямоугольника рассмотрены также периодические граничные условия). Все эти конкретные формулы следов из [6] (некоторые из них приведены в [7]–[9], причем в [7] и [8] – в более слабой форме типа (42)) могут быть получены также на основе теоремы 3 или теоремы 5, поэтому аналогично формулам следов из примера 3 они верны не только при $\alpha > 3/2$, но и при всех $\alpha > 4/3$. В более ранних работах [10]–[12] рассматривались случаи задачи Дирихле и периодических граничных условий для прямоугольников с определенными отношениями сторон при $\alpha \geq 2$ и достаточно гладких потенциалах $p(x, y)$. Согласно [13] в случае равнобедренного прямоугольного треугольника, граничных условий Дирихле и ограниченного самосопряженного оператора P формула следов (42) остается верной для оператора $(-\Delta)^\alpha + P$ при всех $\alpha > 93/80$.

Отметим, что теоремы 1, 2 и в частном случае $\gamma = 0$ теорема 3 анонсированы ранее в [14] и [15].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гельфанд И. М., Левитан Б. М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88. № 4. С. 593–596.
- [2] Дикий Л. А. Формулы следов для оператора Штурма–Лиувилля // УМН. 1958. Т. 13. № 3. С. 111–143.
- [3] Дубровский В. В. К абстрактной формуле Гельфанда–Левитана // УМН. 1991. Т. 46. № 3. С. 187–188.
- [4] Баскаков А. Г. Формулы регуляризованных следов для степеней возмущенных спектральных операторов // Изв. вузов. Матем. 1985. № 8. С. 68–71.
- [5] Dostanić M. Trace formulas of Gelfand–Levitan type // Publications de l'Institut Mathématique. 1994. V. 55. P. 51–63.
- [6] Томина И. В. Регуляризованные следы степени оператора Лапласа с потенциалом на треугольниках. Дисс. . . к. ф.-м. н. Владимир: ВГПУ, 1995.
- [7] Дубровский В. В., Томина И. В. О регуляризованном следе для степени оператора Лапласа на равнобедренном прямоугольном треугольнике // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 12. С. 2177–2179.
- [8] Томина И. В. Регуляризованный след степени оператора Лапласа на прямоугольном равнобедренном треугольнике в случае задачи Неймана // УМН. 1994. Т. 49. № 4. С. 177–178.
- [9] Томина И. В. Первый регуляризованный след степени оператора Лапласа на прямоугольном треугольнике с углом $\pi/6$ в случае задачи Дирихле // Фундамент. и прикл. матем. 1995. Т. 1. № 2. С. 59–61.
- [10] Садовничий В. А., Дубровский В. В. О некоторых соотношениях для собственных чисел дискретных операторов. Формулы следов для дифференциальных операторов в частных производных // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 11. С. 2033–2042.
- [11] Дубровский В. В. Асимптотика собственных чисел дискретных операторов // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1978. Т. 4. С. 227–231.
- [12] Дубровский В. В. Регуляризованный след билапласиана с периодическими краевыми условиями на квадрате // Докл. АН БССР. 1980. Т. 24. № 3. С. 210–213.
- [13] Дубровский В. В., Пузанкова Е. А. Оценка разности спектральных функций степени оператора Лапласа, заданного на треугольнике, в L_p при $1 \leq p \leq 2$ // Докл. РАН. 1999. Т. 365. № 3. С. 311–313.
- [14] Томин Н. Г. Об одной абстрактной формуле следов для дискретных операторов // Тезисы докладов математической школы “Понтрягинские чтения – 9”. Воронеж: ВГУ, 1998. С. 197.
- [15] Томин Н. Г. О первом регуляризованном следе дискретного оператора // Тезисы докладов международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина. Дифференциальные уравнения. М.: МГУ, 1998. С. 165–167.