Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. М. Тригуб, О приближении гладких функций и констант многочленами с целыми и натуральными коэффициентами, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 1, 123–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm725>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 15:40:25

УДК 517.51

О ПРИБЛИЖЕНИИ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ И КОНСТАНТ МНОГОЧЛЕНАМИ С ЦЕЛЫМИ И НАТУРАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Р. М. Тригуб

Усиливаются прямые теоремы о приближении гладких функций многочленами с целыми коэффициентами. Получены первые теоремы о приближении многочленами с натуральными коэффициентами.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. Формулировка результатов. А. О. Гельфонд [1] доказал аналоги классических теорем Д. Джексона и С. Н. Бернштейна для приближения многочленами с целыми коэффициентами на отрезке $[0, 1]$. Общие прямые теоремы о целочисленных приближениях для любого отрезка длины меньше четырех получены автором [2] (см. также обзорные статьи [3] и [4]).

В настоящей статье доказывается следующий асимптотически точный результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть при некотором $r \in \mathbb{N}$ производная $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна и $|f^{(r)}(x)| \leq 1$ почти всюду на $[0, 1]$, а $f^{(\nu)}(0)/\nu!$ и $f^{(\nu)}(1)/\nu! \in \mathbb{Z}$ при $0 \leq \nu \leq r-1$ (эти арифметические условия и необходимы). Тогда для любого $n \geq 4r+2$ можно построить многочлен q_n степени не выше n с целыми коэффициентами такой, что $\forall x \in [0, 1]$

$$|f(x) - q_n(x)| \leq K_r \left(\frac{\sqrt{x(1-x)}}{n} \right)^r + \gamma(r) \frac{(\sqrt{x(1-x)})^{r-1}}{n^{r+1}},$$

где постоянная $\gamma(r)$ зависит лишь от r , а константу

$$K_r := \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}}$$

нельзя заменить меньшей.

Без ограничений на коэффициенты эта теорема получена в [5] (в случае $r = 1$ – С. М. Никольским, В. Н. Темляковым).

Приближение функций многочленами с положительными коэффициентами – новая тема, возникшая в связи с одной задачей о спектре положительного оператора [6] (см. также [7]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $r \in \mathbb{Z}_+ := \mathbb{Z} \cap [0, \infty)$. Если $f \in C^r[-2, 0]$, а $f^{(\nu)}(0)/\nu! \in \mathbb{Z}_+$ ($0 \leq \nu \leq r$), $f^{(\nu)}(-1)/\nu! \in \mathbb{Z}$ ($0 \leq \nu \leq r$) и

$$2^{\nu-r-1} \left(\frac{f^{(\nu)}(-2)}{\nu!} - \sum_{k=\nu}^r \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \binom{k}{\nu} (-2)^{k-\nu} \right) \in \mathbb{Z} \quad (0 \leq \nu \leq r)$$

(все эти арифметические условия и необходимы), то для любого $n \geq 3r+3$ можно построить многочлен q_n^+ с коэффициентами из $\mathbb{Z}_+$, удовлетворяющий $\forall x \in [-2, 0]$ неравенствам

$$|f^{(\nu)}(x) - (q_n^+)^{(\nu)}(x)| \leq \gamma(r) \left(\frac{\sqrt{|x|(x+2)}}{n} \right)^{r-\nu} \left(\omega\left(f^{(r)}; \frac{\sqrt{|x|(x+2)}}{n}\right) + \frac{\sqrt{|x|(x+2)}}{n} \right) \\ (0 \leq \nu \leq r),$$

где $\omega(f^{(r)}; h)$ – модуль непрерывности $f^{(r)}$ шага $h \geq 0$.

Без ограничений на коэффициенты эта теорема получена С. А. Теляковским (см. [8], $\nu = 0$) и И. Е. Гопенгаузом [9] (независимо). Здесь добавлено, что при некоторых условиях на отрезок и функцию коэффициенты приближающих многочленов можно считать целыми и положительными.

Пусть теперь $\lambda \in (-1, 1)$ и $\lambda \neq 0$, а отрезок $[a, b] \subset (-1, 0)$. Полагаем

$$E_n(\lambda; a, b; W) := \min_{\substack{c_k \in W \\ 0 \leq k \leq n}} \max_{[a, b]} \left| \lambda - \sum_{k=0}^n c_k x^k \right|.$$

Вопрос о наилучшем приближении константы многочленами с целыми коэффициентами ($W = \mathbb{Z}$) ставил Бернштейн (см. [2]–[4]). В следующей теореме выделены случаи, когда порядок убывания последовательности $E_n(\lambda; a, b; \mathbb{Z}_+)$ при $n \rightarrow \infty$ удалось найти.

ТЕОРЕМА 3. I. Если $|b|(1-a)^2 < |a|(1+a)^2$ или $a+b = -1/q$, $q \in \mathbb{N}$, и $\sqrt{|a+b|} \times (\sqrt{|a|} + \sqrt{|b|}) < 2(\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|})$, то

$$E_n(\lambda; a, b; \mathbb{Z}_+) \asymp \left(\frac{\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}}{\sqrt{|a|} + \sqrt{|b|}} \right)^n$$

(двустороннее неравенство с положительными константами, не зависящими от n).

II. Если $|b|(1-a)^2 > |a|(1+a)^2$ и $a = -1/q$, то $\forall \lambda \neq \pm p/q^s$ ($p, q, s \in \mathbb{N}$) при бесконечно многих n

$$E_n(\lambda; a, b; \mathbb{Z}_+) \asymp |a|^n$$

(оценка сверху справедлива $\forall n$).

III. Если $0.1 < |b| < 0.5 \leq |a| \leq 1+b$ и $\lambda \neq p/2^s$, то при бесконечно многих n

$$E_n(\lambda; a, b; \mathbb{Z}_+) \asymp 2^{-n}$$

(оценка сверху справедлива $\forall n$).

IV. Если $\lambda = p/q^s$, $a+b = -2/q$, $b = -r/(rq+1)$ ($p, q, s, r \in \mathbb{N}$), то $\forall n$

$$E_n(\lambda; a, b; \mathbb{Z}_+) \asymp \left(\frac{b-a}{|a+b|} \right)^n.$$

2. Вспомогательные утверждения. Для доказательства приведенных теорем воспользуемся некоторыми результатами о приближении многочленами p_n степени не выше n , начиная с известной теоремы А. Ф. Тимана и неравенства Дзядыка–Лебеда–Брудного для производной многочлена (см. [10], а также [11]). Понадобятся также экстремальные и арифметические свойства полиномов Чебышева (см., например, ниже лемму 6).

Через $\gamma(a, b, c)$ обозначаем константы, зависящие лишь от a, b и c . Для любого $n \in \mathbb{N}$ и $x \in [-1, 1]$ полагаем

$$\delta_n(x) := \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}, \quad \delta_{n,o}(x) := \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}.$$

ЛЕММА 1. (См. [2, лемма 1 и замечание 2].) Если $f \in C^r[-1, 1]$ и $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in [-1, 1]$

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \delta_n^r(x) \omega(f^{(r)}; \delta_n(x)), \quad (1)$$

то при некоторой константе $\gamma = \gamma(r) \quad \forall \nu \in [0, r]$

$$|f^{(\nu)}(x) - p_n^{(\nu)}(x)| \leq \gamma \delta_n^{r-\nu}(x) \omega(f^{(r)}; \delta_n(x)), \quad |p_n^{(r+1)}(x)| \leq \gamma \frac{\omega(f^{(r)}; \delta_n(x))}{\delta_n(x)}.$$

ЛЕММА 2. Для любых m, k и $n \in \mathbb{N}$ можно построить многочлен p_n степени $\leq n$ такой, что $\forall x \in [0, 1]$

$$|x^m - x^{m+k} p_n(x)| \leq \gamma(m, k) \min \left\{ \frac{1}{n^{2m}}, x^m \right\}.$$

Это неравенство с оценкой γn^{-2m} получено в [2, лемма 2'']. Но тогда в силу неравенства А. А. Маркова для производной (см., например, [10]) m -я производная многочлена, стоящего под знаком модуля, ограничена по n и в силу формулы Тейлора имеем оценку γx^m .

ЛЕММА 3. Пусть X – многочлен с целыми коэффициентами и $0 \leq X(x) < 1 \quad \forall x \in [a, b]$. Если многочлен p_n делится без остатка на X^m при некотором $m \in \mathbb{N}$, то существует многочлен q_n с целыми коэффициентами такой, что $\forall x \in [a, b]$

$$|p_n(x) - X^m(x) q_n(x)| \leq \frac{\gamma}{n^{2m}},$$

где константа γ зависит лишь от a, b, m и X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из лемм 2'' и 3 статьи [2].

ЛЕММА 4. I. Если многочлен p_n удовлетворяет неравенству (1), $p_n^{(\nu)}(-1) = f^{(\nu)}(-1)$, $p_n^{(\nu)}(1) = f^{(\nu)}(1) \quad (0 \leq \nu \leq r)$, то $\forall x \in [-1, 1]$ и $\forall \nu \in [0, r]$

$$|f^{(\nu)}(x) - p_n^{(\nu)}(x)| \leq \gamma(r) \delta_{n,o}^{r-\nu}(x) \omega(f^{(r)}; \delta_{n,o}(x)).$$

II. Если многочлен p_n удовлетворяет на $[-1, 1]$ неравенству

$$|p_n(x)| \leq \delta_n^r(x) \omega(\delta_n(x))$$

и $p_n^{(\nu)}(\pm 1) = 0 \quad (0 \leq \nu \leq r)$, то при $x \in [-1, 1]$ и $\nu \in [0, r]$

$$|p_n^{(\nu)}(x)| \leq \gamma(r) \delta_{n,o}^{r-\nu}(x) \omega(\delta_{n,o}(x)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО есть, по сути, в [9].

ЛЕММА 5. Пусть $f \in C^r[-2, 0]$. Если $f^{(\nu)}(0)/\nu! \in \mathbb{Z}_+$, $f^{(\nu)}(-1)/\nu! \in \mathbb{Z}$ ($0 \leq \nu \leq r$)
и

$$2^{\nu-r-1} \left(\frac{f^{(\nu)}(-2)}{\nu!} - \sum_{k=\nu}^r \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \binom{k}{\nu} (-2)^{k-\nu} \right) \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq \nu \leq r$$

(это и необходимо), то существует q_{3r+3}^+ с коэффициентами из $\mathbb{Z}_+$ (степени $\leq 3r+3$) такой, что при $\nu \in [0, r]$

$$(q_{3r+3}^+)^{(\nu)}(0) = f^{(\nu)}(0), \quad (q_{3r+3}^+)^{(\nu)}(-1) = f^{(\nu)}(-1), \quad (q_{3r+3}^+)^{(\nu)}(-2) = f^{(\nu)}(-2).$$

При этом на $[-2, 0]$

$$|(q_{3r+3}^+)^{(r+1)}(x)| \leq \gamma(r)\omega(f^{(r)}; 1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с необходимости указанных условий. Пусть $q_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$ — какой-либо многочлен, совпадающий с функцией и ее производными до порядка r в точках $0, -1$ и -2 ($a_k \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq k \leq m$). Необходимость условий в точках 0 и -1 очевидна. А при $m \geq r+1$

$$\begin{aligned} & 2^{\nu-r-1} \left(\frac{f^{(\nu)}(-2)}{\nu!} - \sum_{k=\nu}^r \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \binom{k}{\nu} (-2)^{k-\nu} \right) \\ &= 2^{\nu-r-1} \left(\frac{q_m^{(\nu)}(-2)}{\nu!} - \sum_{k=\nu}^r \frac{q_m^{(k)}(0)}{k!} \binom{k}{\nu} (-2)^{k-\nu} \right) \\ &= 2^{\nu-r-1} \left(\sum_{k=\nu}^m a_k \binom{k}{\nu} (-2)^{k-\nu} - \sum_{k=\nu}^r \frac{q_m^{(k)}(0)}{k!} \binom{k}{\nu} (-2)^{k-\nu} \right) \\ &= \sum_{k=r+1}^m a_k \binom{k}{\nu} (-2)^{k-r-1} \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Теперь построим искомый полином q_{3r+3}^+ сначала только с целыми коэффициентами (q_{3r+2}), а затем, повышая степень на единицу, и с положительными.

Начнем со случая двух узлов интерполяции 0 и -1 с условиями, указанными в лемме. Запишем эрмитовский многочлен (наименьшей степени $2r+1$) в виде

$$\sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + x^{r+1} \sum_{p=0}^r b_p (x+1)^p.$$

Очевидно, что $\forall p \in [0, r]$

$$b_p = \frac{1}{p!} \cdot \frac{d^p}{dx^p} \left\{ \left(f(x) - \sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right) x^{-r-1} \right\}_{x=-1} \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

так что коэффициенты целые, но могут не быть положительными. Увеличим его степень следующим образом, сохраняя интерполяционные свойства:

$$\sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + x^{r+1} \sum_{p=0}^r b_p (x+1)^p \left(1 + \frac{1}{2} (\text{sign } b_p - 1) (x+1)^{r+1-p} \right). \quad (3)$$

Все коэффициенты остаются целыми. Но теперь они все положительные, так как таковыми являются коэффициенты многочлена

$$(x+1)^{r+1} - (x+1)^p = (x+1)^p ((x+1)^{r+1-p} - 1), \quad 0 \leq p \leq r.$$

Оценим теперь $(r+1)$ -ю производную построенного многочлена. При $r = 0$ модуль производной равен $|b_0|$, а $|b_0| = |f(-1) - f(0)|$. Пусть теперь $r \geq 1$. Учтем, что при $p \in [0, r-1]$

$$\frac{d^p}{dx^p} \left(f(x) - \sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right) = \frac{1}{(r-p-1)!} \int_0^x (f^{(r)}(t) - f^{(r)}(0)) (x-t)^{r-p-1} dt$$

и при $x = -1$ модуль левой части не более

$$\frac{1}{(r-p-1)!} \int_{-1}^0 |f^{(r)}(t) - f^{(r)}(0)| (t+1)^{r-p-1} dt \leq \frac{1}{(r-p)!} \omega(f^{(r)}; 1). \quad (4)$$

При $p = r$ такая оценка модуля левой части очевидна. Поэтому (см. (2)) $\forall p \in [0, r]$ $|b_p| \leq \gamma_1(r) \omega(f^{(r)}; 1)$. Но тогда в силу (3) модуль $(r+1)$ -й производной не более $\gamma_2(r) \times \omega(f^{(r)}; 1)$.

Теперь возьмем два узла 0 и -2 с условиями, указанными в лемме. Введем вспомогательную функцию

$$\tilde{f}(x) := \frac{1}{2^{r+1}} \left(f(2x) - \sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (2x)^k \right)$$

и построим для нее многочлен $\tilde{q}$ по двум узлам 0 и -1 (см. выше). При $\nu \in [0, r]$ $\tilde{f}^{(\nu)}(0) = 0$ и

$$\frac{\tilde{f}^{(\nu)}(-1)}{\nu!} = \frac{1}{2^{r+1}} \left(2^\nu \cdot \frac{f^{(\nu)}(-2)}{\nu!} - \sum_{k=\nu}^r \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \binom{k}{\nu} 2^\nu (-2)^{k-\nu} \right) \in \mathbb{Z}.$$

Коэффициенты $\tilde{q}$ из $\mathbb{Z}_+$, а степень его $2r+2$. Но тогда искомым многочлен в случае узлов 0 и -2

$$q(x) = 2^{r+1} \tilde{q} \left(\frac{x}{2} \right) + \sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Действительно, $q^{(\nu)}(0) = f^{(\nu)}(0)$ ($0 \leq \nu \leq r$) и при $\nu \in [0, r]$

$$\frac{q^{(\nu)}(-2)}{\nu!} = 2^{r+1-\nu} \cdot \frac{\tilde{f}^{(\nu)}(-1)}{\nu!} + \sum_{k=\nu}^r \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \binom{k}{\nu} (-2)^{k-\nu} = \frac{f^{(\nu)}(-2)}{\nu!},$$

а все его коэффициенты, как и у $\tilde{q}$, из $\mathbb{Z}_+$. Если этот многочлен, построенный по узлам 0 и -2 , обозначить через q_{2r+2}^+ , то искомый многочлен q_{3r+3}^+ для трех узлов равен

$$q_{2r+2}^+(x) + (x(x+2))^{r+1} \sum_{p=0}^r b_p (x+1)^p \left(1 + \frac{1}{2} (\text{sign } b_p - 1) (x+1)^{r+1-p} \right),$$

где при $p \in [0, r]$

$$b_p = \frac{1}{p!} \cdot \frac{d^p}{dx^p} \{ (f(x) - q_{2r+2}^+(x)) (x(x+2))^{-r-1} \}_{x=-1} \in \mathbb{Z}.$$

Но так как $(q_{2r+2}^+)^{(\nu)}(0) = f^{(\nu)}(0)$ при $\nu \in [0, r]$ и $|(q_{2r+2}^+)^{(r+1)}(x)| \leq \gamma_3 \omega(f^{(r)}; 1)$, то, как и при доказательстве (4), получаем $\forall p \in [0, r]$

$$\begin{aligned} |f^{(p)}(-1) - (q_{2r+2}^+)^{(p)}(-1)| &\leq \frac{\omega((f - q_{2r+2}^+)^{(r)}; 1)}{(r-p)!} \leq \frac{\omega(f^{(r)}; 1) + \omega((q_{2r+2}^+)^{(r)}; 1)}{(r-p)!} \\ &\leq \frac{\omega(f^{(r)}; 1) + \max |(q_{2r+2}^+)^{(r+1)}(x)|}{(r-p)!} \leq \gamma_4 \omega(f^{(r)}; 1). \end{aligned}$$

Следовательно, такую же оценку имеем и для $(q_{3r+3}^+)^{(r+1)}$.

ЛЕММА 6. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует многочлен q_n^+ с натуральными коэффициентами такой, что $\forall x \in [-2, 0]$*

$$|2x + x^2 q_n^+(x)| \leq C \min \left\{ \frac{1}{n^2}, |x(x+1)(x+2)| \right\},$$

где C – константа абсолютная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 1$ можно положить $q_1^+(x) = x + 3$, так как $2x + q_1^+(x) = x(x+1)(x+2)$. Очевидно, что можно ограничиться случаем, когда n принимает значения членов бесконечной геометрической прогрессии.

Пусть полином Чебышева (см. [10]) для отрезка $[-1, 1]$ равен

$$T_n(x) := \cos(n \arccos x) = \frac{1}{2} [(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n]. \quad (5)$$

Применяя формулу бинома, легко видеть, что $T_n^{(\nu)}(1)/\nu! \in \mathbb{N}$ ($0 \leq \nu \leq n$). Убедимся в том, и это главное, что при $k \in [1, n]$ и $n = 2^s$ ($s = 0, 1, \dots$)

$$\frac{2}{k!} \cdot \frac{T_n^{(k)}(1)}{T_n'(1)} = \frac{2}{n^2} \cdot \frac{1}{k!} T_n^{(k)}(1) \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

При $n = 1$ и $n = 2$ проверяем непосредственно:

$$T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1 = 2(x-1)^2 + 4(x-1) + 1,$$

а далее проводим индукцию по s : от n к $2n$. Из формулы удвоения угла для косинуса следует, что $T_{2n}(x) = 2T_n^2(x) - 1$, откуда

$$\begin{aligned} \frac{2}{4n^2} \cdot \frac{1}{k!} T_{2n}^{(k)}(1) &= \frac{1}{n^2} \sum_{\nu=0}^k \frac{T_n^{(\nu)}(1)}{\nu!} \cdot \frac{T_n^{(k-\nu)}(1)}{(k-\nu)!} \\ &= \sum_{\nu=0}^{[(k-1)/2]} \frac{T_n^{(\nu)}(1)}{\nu!} \left(\frac{2}{n^2} \cdot \frac{T_n^{(k-\nu)}(1)}{(k-\nu)!} \right) + \frac{1 + (-1)^k}{2n^2} \left(\frac{T_n^{[k/2]}(1)}{([k/2])!} \right)^2. \end{aligned}$$

При $k = 1$ $T'_n(1) = n^2$. А при $k \geq 2$ в силу предположения индукции сумма равна натуральному числу. И последнее слагаемое (при четном k)

$$\left(\frac{2}{n^2} \cdot \frac{1}{(k/2)!} \cdot T_n^{(k/2)}(1) \right)^2 \cdot \frac{n^2}{4} \in \mathbb{N}.$$

Соотношение (6) установлено.

А теперь при $n = 2^s$ полагаем

$$2x + x^2 q_n^+(x) = \frac{2}{n^2} (T_n(x+1) - T_n(1)) = \sum_{k=1}^n \frac{2}{n^2} \cdot \frac{T_n^{(k)}(1)}{k!} x^k.$$

При $s \geq 2$ этот многочлен равен нулю для $x = 0, -1$ и -2 . Очевидно, что при $x \in [-2, 0]$ модуль его не более $4/n^2$, а его производная по модулю не более двух. Поэтому еще $\forall x \in [-2, 0]$

$$|2x + x^2 q_n^+(x)| \leq 2 \min\{|x|, |x+1|, |x+2|\} \leq \frac{8}{3} |x(x+1)(x+2)|.$$

Таким образом, можно считать в лемме 6 $C = 16$.

Заметим, что в утверждении леммы 6 заменить $2x$ на x нельзя, как видно после подстановки $x = -2$.

ЛЕММА 7. I. Пусть q^+ — многочлен степени s с коэффициентами из $\mathbb{Z}_+$ и $c \leq q^+(x) \leq d < 0 \quad \forall x \in [a, b] \subset (-1, 0)$. Тогда $\forall n$

$$E_n(\lambda; a, b; \mathbb{Z}_+) \leq \left(\left\lceil \frac{n}{s} \right\rceil + 1 \right) \rho^{s[n/s]}, \quad \rho = \max \left\{ |c|, \frac{\sqrt{|c|} - \sqrt{|d|}}{\sqrt{|c|} + \sqrt{|d|}} \right\}^{1/s}.$$

В случае $|c|(\sqrt{|c|} + \sqrt{|d|}) \neq \sqrt{|c|} - \sqrt{|d|}$ множитель $\lceil \frac{n}{s} \rceil + 1$ можно заменить константой.

II. $\forall \lambda \in (0, 1/2]$ при любом $n \in \mathbb{N}$

$$E_n(\lambda; a, b; \mathbb{Z}) \geq \lambda \left(\frac{\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}}{\sqrt{|a|} + \sqrt{|b|}} \right)^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Пусть полином Чебышева для $[c, d]$ равен

$$T_m(x, c, d) = \cos\left(m \arccos \frac{2x - c - d}{d - c}\right) = \gamma(m) + x\gamma(m)p_{m-1}^+(x).$$

Так как все нули T_m лежат на $(c, d) \subset (-\infty, 0]$, а старший коэффициент положительный, то и все его коэффициенты положительные. В частности, $\gamma(m) = T_m(0, c, d) > 0$. Тогда при $x \in [c, d]$

$$|1 + xp_{m-1}^+(x)| \leq \frac{|T_m(x, c, d)|}{\gamma(m)} \leq \frac{1}{\gamma(m)}.$$

Умножая это неравенство на δx^p и меняя в случае необходимости степень m , получаем порядок приближения этого одночлена более высокими степенями x с коэффициентами одного знака. Считаем далее $\lambda \in (0, 1)$. Случай $\lambda \in (-1, 0)$ сводится к предыдущему, так как тогда $\lambda = (\lambda + 1) - 1$, где $\lambda + 1 \in (0, 1)$. Любое число $\delta > 0$ можно представить в виде $\delta = k - \varepsilon$, где $k \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in (0, 1]$. Полагаем $k = [\delta]$. Заменяя еще x на $q^+(x)$, имеем при некоторых числах $a_{1,k} > 0$

$$\begin{aligned} & |\lambda - [\lambda] + (\lambda - [\lambda])q^+(x)p_{[n/s]-1}^+(q^+(x))| \\ &= \left| \lambda - [\lambda] - \sum_{k=1}^{[n/s]} a_{1,k}(q^+(x))^k \right| \leq \frac{1}{\gamma([n/s])} \end{aligned}$$

и далее при некоторых $a_{2,k} > 0$

$$\begin{aligned} & \left| \lambda - [\lambda] - [a_{1,1}]q^+(x) - \sum_{k=2}^{[n/s]} a_{2,k}(q^+(x))^k \right| \\ &= \left| \left[\lambda - [\lambda] - \sum_{k=1}^{[n/s]} a_{1,k}(q^+(x))^k \right] \right. \\ & \quad \left. + [(a_{1,1} - [a_{1,1}])q^+(x) + (a_{1,1} - [a_{1,1}])(q^+(x))^2 p_{[n/s]-2}^+(q^+(x))] \right| \\ &\leq \frac{1}{\gamma([n/s])} + \frac{|q^+(x)|}{\gamma([n/s] - 1)}. \end{aligned}$$

Продолжая аналогично, получаем

$$\left| \lambda - [\lambda] - \sum_{k=1}^n [a_{k,k}](q^+(x))^k \right| \leq \sum_{\nu=0}^{[n/s]} \frac{|q^+(x)|^\nu}{\gamma([n/s] - \nu)}.$$

Остается учесть, что на $[a, b]$ $|q^+(x)| \leq |c|$, а в силу (5)

$$\begin{aligned} \gamma(m) &= T_m(0, c, d) = \cos\left(m \arccos \frac{c+d}{c-d}\right) \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\frac{c+d}{c-d} + \sqrt{\left(\frac{c+d}{c-d}\right)^2 - 1} \right)^m = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{|c|} + \sqrt{|d|}}{\sqrt{|c|} - \sqrt{|d|}} \right)^m \end{aligned}$$

и при ρ и $|c| \in (0, 1]$

$$\sum_{\nu=0}^p |c|^\nu \rho^{p-\nu} \leq \max\{|c|, \rho\}^p \cdot \min\left\{p+1, \frac{1}{|\rho - |c||}\right\}.$$

II. Из известного экстремального свойства полиномов Чебышева (см., например, [10, с. 79]) следует с учетом (5)

$$\lambda \leq |\lambda - q_n(0)| \leq \max_{[a,b]} |\lambda - q_n(x)| \cdot |T_n(0, a, b)| \leq E_n(\lambda; a, b; \mathbb{Z}) \left(\frac{\sqrt{|b|} + \sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|} - \sqrt{|a|}} \right)^n.$$

Здесь q_n — многочлен наилучшего приближения числа λ с целыми коэффициентами.

ЛЕММА 8. I. Если $p/q \in [a, b]$, $a \lambda \neq p_1/q^s$ ($p, q, p_1, s \in \mathbb{N}$), то для бесконечной последовательности n

$$E_n(\lambda; a, b; \mathbb{Z}_+) \geq \frac{1}{q^{n+2}}.$$

II. Если $\lambda = p/q^s$ ($p, q, s \in \mathbb{N}$) и $-2/q < a < b < 0$, то

$$E_n(\pm \lambda; a, b; \mathbb{Z}_+) \leq \gamma(s) \max\{|1 + aq|, |1 + bq|\}^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I.

$$E_n(\lambda; a, b; \mathbb{Z}_+) \geq \left| \lambda - q_n\left(\frac{p}{q}\right) \right| \geq \inf_p \left| \lambda - \frac{p}{q^n} \right| \geq \frac{1}{q^{n+2}}$$

для следующей бесконечной последовательности n : после n -го знака в q -ичном разложении числа λ не следует подряд два раза 0 или $q-1$.

II. Положим

$$q_n^+(x) = \frac{1}{q}(1 + qx)^n - \frac{1}{q} = nx + qx^2 \hat{q}_{n-2}^+(x).$$

Тогда при $\lambda = p/q \leq 1$ ($s = 1$)

$$\left| \frac{p}{q} + pq_n^+(x) \right| \leq \max_{[a,b]} |1 + qx|^n \leq \max\{|1 + aq|, |1 + bq|\}^n$$

и

$$\left| \frac{p}{q} - 1 - (q-p)q_n^+(x) \right| \leq \max_{[a,b]} |1 + qx|^n \leq \max\{|1 + aq|, |1 + bq|\}^n.$$

Умножая эти неравенства на $1/q$ и используя их, получаем нужную оценку приближения числа p/q^2 ($s = 2$) многочленами с коэффициентами из $\mathbb{Z}_+$ или $-\mathbb{Z}_+$. Далее следует индукция по s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. В силу теоремы 1 из [5] для любого $n \geq r - 1$ существует многочлен p_n такой, что $\forall x \in [0, 1]$

$$|f(x) - p_n(x)| \leq K_r \left(\frac{\sqrt{x(1-x)}}{n} \right)^r + \gamma_1(r) \frac{(\sqrt{x(1-x)})^{r-1}}{n^{r+1}}, \quad (7)$$

и константу K_r заменить меньшей, вообще говоря, нельзя.

Эрмитовский интерполяционный многочлен $h = h_{2r-1}$, определяемый условиями $h^{(\nu)}(0) = f^{(\nu)}(0)$, $h^{(\nu)}(1) = f^{(\nu)}(1)$ ($0 \leq \nu \leq r - 1$), имеет целые коэффициенты. Применяя лемму 5, получаем

$$|h^{(r)}(x)| \leq \gamma_2(r) \omega(f^{(r-1)}; 1) \leq \gamma_2(r) \|f^{(r)}\|_{\infty} \leq \gamma_2(r)$$

и $\|(f - h)^{(r)}\|_{\infty} \leq 1 + \gamma_2(r)$. Отсюда следует, что для всех $x \in [0, 1]$

$$|f(x) - h(x)| \leq \gamma_3(r) (x(1-x))^r,$$

а в силу (7) и

$$|p_n(x) - h(x)| \leq \gamma_4(r) (x(1-x))^{(r-1)/2}.$$

Заменяя f на $f - h$, считаем далее, что $f^{(\nu)}(0) = f^{(\nu)}(1) = 0$ ($0 \leq \nu \leq r - 1$). Тогда при $r \geq 2$ $p_n^{(\nu)}(0) = p_n^{(\nu)}(1) = 0$ при $0 \leq \nu < (r - 1)/2$. С другой стороны, из (7) следует, что $\forall x \in [0, 1]$

$$|f(x) - p_n(x)| \leq K_r \left(\frac{\sqrt{x(1-x)}}{n} + \frac{\gamma_1(r)}{r} \frac{1}{n^2} \right)^r.$$

Применим лемму 1 (при $\nu = r$ равенство почти всюду):

$$|f^{(\nu)}(x) - p_n^{(\nu)}(x)| \leq \gamma_5(r) \left(\frac{\sqrt{x(1-x)}}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^{r-\nu}, \quad 0 \leq \nu \leq r.$$

Отсюда получаем, подставляя $x = 0$ и $x = 1$,

$$|p_n^{(\nu)}(0)| + |p_n^{(\nu)}(1)| \leq \gamma_6(r) n^{2(\nu-r)}, \quad \frac{r-1}{2} \leq \nu \leq r. \quad (8)$$

А так как еще $|p_n^{(r)}(x)| \leq \gamma_7(r) \quad \forall x \in [0, 1]$, то в силу неравенства А. А. Маркова и при $r < \nu < 2r \quad \forall x \in [0, 1]$

$$|p_n^{(\nu)}(x)| \leq \gamma_7(r) n^{2(\nu-r)} 2^{\nu-r} \leq 2^r \gamma_7(r) n^{2(\nu-r)}. \quad (9)$$

Положим $X(x) := x(1-x)$. На $[0, 1]$ $0 \leq X(x) \leq 1/4$. Разложим p_n по степеням многочлена X :

$$p_n(x) = \sum_{(r-1)/2 \leq k \leq N_1 = [n/2]} (a_k x + b_k(1-x)) X^k(x).$$

Очевидно, что при $\nu \geq (r-1)/2$

$$p_n^{(\nu)}(0) = \frac{d^\nu}{dx^\nu} \left\{ \sum_{(r-1)/2 \leq k < \nu} (a_k x + b_k(1-x)) X^k(x) \right\}_{x=0} + \nu! b_\nu$$

(аналогичное равенство имеет место при $x = 1$ с заменой b_ν на $(-1)^\nu a_\nu$). Теперь из (8) и (9) индукцией по ν получаем, что

$$|a_k| + |b_k| \leq \gamma_8(r) n^{2(k-r)}, \quad \frac{r-1}{2} \leq k < 2r.$$

Применим лемму 2 при $m = k$, $k = 2r - m$ с заменой n на $n - 4r - 1$ и x на $X(x)$. При $(r-1)/2 \leq k < 2r$ и $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} & |(a_k x + b_k(1-x)) X^k(x) - (a_k x + b_k(1-x)) X^{2r}(x) \tilde{p}_{n-4r-1}(x)| \\ & \leq \gamma_8(r) n^{2(k-r)} \gamma_9(r) \min \left\{ \frac{1}{(n-4r-1)^{2k}}, X^k(x) \right\} \\ & \leq \gamma_{10}(r) n^{2(k-r)} \min \left\{ \frac{1}{n^{2k}}, X^k(x) \right\}. \end{aligned}$$

Учитывая, что для любых $a \geq 0$, $b \geq 0$ и $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\min\{a, b\} \leq a^{1-\varepsilon} b^\varepsilon,$$

и выбирая $\varepsilon = (r-1)/(2k)$ (при $k = 0$ и $r = 1$ все очевидно), получаем нужную оценку

$$\gamma_{10}(r) \frac{1}{n^{r+1}} X^{(r-1)/2} = \gamma_{10} \frac{(\sqrt{x(1-x)})^{r-1}}{n^{r+1}}.$$

Таким образом, многочлен p_n в (7) можно считать делящимся без остатка на $X^{2r}(x)$. Но тогда в силу леммы 3 существует многочлен q_{n-4r} с целыми коэффициентами такой, что на $[0, 1]$

$$|p_n(x) - X^{2r}(x) q_{n-4r}(x)| \leq \gamma_{11}(r) \frac{1}{n^{2r}}.$$

Но многочлен степени не выше n , который стоит под знаком модуля, равен нулю при $x = 0$ и $x = 1$ вместе со своими производными до порядка $2r-1$, а его производная порядка $2r$ в силу неравенства А. А. Маркова ограничена по n . Поэтому из предыдущего неравенства следует, что

$$|p_n(x) - X^{2r}(x) q_{n-2r}(x)| \leq \gamma_{12}(r) \min \left\{ \frac{1}{n^{2r}}, X^{2r}(x) \right\} \leq \gamma_{12} \frac{X^{r-1}(x)}{n^{r+1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. В силу леммы 5 существует многочлен h степени $3r + 3$ с натуральными коэффициентами и условиями: $h^{(\nu)}(-2) = f^{(\nu)}(-2)$, $h^{(\nu)}(-1) = f^{(\nu)}(-1)$, $h^{(\nu)}(0) = f^{(\nu)}(0)$ ($0 \leq \nu \leq r$). Заменяя f на $f - h$, считаем далее, что $f^{(\nu)}(0) = f^{(\nu)}(-1) = f^{(\nu)}(-2) = 0$ ($0 \leq \nu \leq r$). Так как

$$\omega(\lambda h) \leq (\lambda + 1)\omega(h) \quad (10)$$

(см., например, [10, с. 111]), то в силу той же леммы 5 при $\delta \in (0, 1]$

$$\begin{aligned} \omega((f - h)^{(r)}; \delta) &\leq \omega(f^{(r)}; \delta) + \omega(h^{(r)}; \delta) \leq \omega(f^{(r)}; \delta) + \delta \|h^{(r+1)}\|_{\infty} \\ &\leq \omega(f^{(r)}; \delta) + \gamma(r)\delta\omega(f^{(r)}; 1) \leq (1 + 2\gamma(r))\omega(f^{(r)}; \delta). \end{aligned}$$

Так как

$$\max_{[-2, 0]} |x(x+1)(x+2)| = \frac{2}{3\sqrt{3}} < 1,$$

то в силу теоремы 1 из [2] существует многочлен q_n такой, что $\forall x \in [-2, 0]$ (определение δ_n и $\delta_{n,0}$ см. выше перед леммой 1)

$$|f(x) - q_n(x)| \leq \gamma(r)\delta_n^r(x+1)\omega(f^{(r)}; \delta_n(x+1)). \quad (11)$$

При этом q_n делится без остатка на X_1^{r+1} , где $X_1(x) = x(x+1)(x+2)$. В частности, $q_n^{(\nu)}(0) = 0 = f^{(\nu)}(0)$ и $q_n^{(\nu)}(-2) = 0 = f^{(\nu)}(-2)$ при $0 \leq \nu \leq r$. А тогда в силу леммы 4(I) на самом деле $\forall x \in [-2, 0]$ и $\forall \nu \in [0, r]$

$$|f^{(\nu)}(x) - q_n^{(\nu)}(x)| \leq \gamma_{13}(r)\delta_{n,0}^{r-\nu}(x+1)\omega(f^{(r)}; \delta_{n,0}(x+1)).$$

Из (11) еще следует в силу леммы 1 и (10) $\forall x \in [-2, 0]$

$$|q_n^{(r+1)}(x)| \leq \gamma_{14}(r) \frac{\omega(f^{(r)}; \delta_n(x+1))}{\delta_n(x+1)} \leq 2\gamma_{14}(r)\omega\left(f^{(r)}; \frac{1}{n^2}\right)n^2.$$

Отсюда в силу неравенства Маркова (см. [10, с. 240]) $\forall m \in [0, n - r - 1]$

$$|q_n^{(r+1+m)}(0)| \leq 2\gamma_{14}n^2\omega\left(f^{(r)}; \frac{1}{n^2}\right)T_{n-r-1}^{(m)}(1)$$

и, значит, все коэффициенты многочлена

$$q_n(x) + \left(1 + \left[2\gamma_{14}n^2\omega\left(f^{(r)}; \frac{1}{n^2}\right)\right]\right)T_n(x+1)$$

целые и неотрицательные, так как еще $T_n^{(\nu)}(1)/\nu! \in \mathbb{N}$ при $0 \leq \nu \leq n$ и при $m \in [0, n - r - 1]$

$$T_{n-r-1}^{(m)}(1) \leq T_n^{(m)}(1) \leq T_n^{(r+1+m)}(1).$$

Если теперь q_n^+ – многочлен из леммы 6, то искомый многочлен имеет вид

$$q_n(x) + \left(1 + \left[2\gamma_{14}n^2\omega\left(f^{(r)}; \frac{1}{n^2}\right)\right]\right) T_n(x+1)(2x+x^2q_n^+(x))^{r+1}.$$

Если его обозначить через $\tilde{q}_N^+$, то $(\tilde{q}_N^+)^{(\nu)}(0) = 0$ при $0 \leq \nu \leq r$ и $(\tilde{q}_N^+)^{(\nu)}(0)/\nu! \in \mathbb{N}$ при $r+1 \leq \nu \leq n(r+2)+2r+2$. Оценка приближения функции f (см. (11)) изменится на

$$\left(1 + 2\gamma_{14}n^2\omega\left(f^{(r)}; \frac{1}{n^2}\right)\right) C^{r+1} \min\left\{\frac{1}{n^2}; |x|(x+2)\right\}^{r+1}.$$

Если $\sqrt{|x|(x+2)} \geq 1/n$, то в силу монотонности модуля ω это не больше

$$\left(C \cdot \frac{\sqrt{|x|(x+2)}}{n}\right)^{r+1} + 2\gamma_{14}C^{r+1} \left(\frac{\sqrt{|x|(x+2)}}{n}\right)^r \omega\left(f^{(r)}; \frac{\sqrt{|x|(x+2)}}{n}\right).$$

Если же $\sqrt{|x|(x+2)} < 1/n$, то в силу (10)

$$n^2\omega\left(f^{(r)}; \frac{1}{n^2}\right) \leq 2\left(\frac{n}{\sqrt{|x|(x+2)}}\right)\omega\left(f^{(r)}; \frac{\sqrt{|x|(x+2)}}{n}\right).$$

Осталось доказать нужную оценку производной многочлена $\tilde{q}_N^+ - q_n$ порядка $\nu \in [1, r]$. Но для этого достаточно применить лемму 4(II).

Теорема 2 доказана для степеней $n \geq 3r+4$. Интерполяционный многочлен из леммы 5 осуществляет искомое приближение для наименьшей из возможных степеней $3r+3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. I. Оценка приближения снизу содержится в лемме 7(II). Положим в лемме 7(I) $q^+(x) = x$ ($c = a$, $d = b$). Если $|b|(1-a)^2 < |a|(1+a)^2$, то $|a|(\sqrt{|a|} + \sqrt{|b|}) \leq \sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}$ и, значит,

$$E_n(\lambda; a, b; \mathbb{Z}_+) = O\left(\frac{\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}}{\sqrt{|a|} + \sqrt{|b|}}\right)^n.$$

В случае $a+b = -1/q$ положим в лемме 7(I) $q^+(x) = x(1+qx)$. Тогда $s = 2$, $c = (a+b)/4$ и $d = ab/(a+b)$. Остается учесть, что при указанном в теореме условии

$$|c| = \frac{1}{4}|a+b| < \left(\frac{\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}}{\sqrt{|a|} + \sqrt{|b|}}\right)^2.$$

II. Оценка сверху следует из леммы 7(I) при $q^+(x) = x$, а оценка снизу из леммы 8(I).

III. Применяем лемму 7(I) при $q^+(x) = x(1+x)$ и лемму 8(I).

IV. Для оценки приближения сверху применяем лемму 8(II), учитывая, что

$$1 + bq = -1 - aq = \frac{b-a}{|a+b|}.$$

Оценка снизу получается из следующего рассуждения:

$$\begin{aligned} E_n\left(\frac{p}{q^s}; a, b; \mathbb{Z}\right) &\geq \inf_{q_n} \left| \frac{p}{q^s} - q_n(b) \right| \geq \inf_{p_1 \in \mathbb{Z}} \left| \frac{p}{q^s} - \frac{p_1}{(rq+1)^n} \right| = \inf_{p_1 \in \mathbb{Z}} \frac{|p(rq+1)^n - p_1q^s|}{q^s(rq+1)^n} \\ &\geq \frac{1}{q^s(rq+1)^n} = \frac{1}{q^s} \left(\frac{b-a}{|a+b|} \right)^n. \end{aligned}$$

Отметим еще, что, исходя из доказательства теоремы 3, как и в [2, см. теорему 4], можно оценить разность между наилучшим приближением любой функции многочленами степени n с любыми коэффициентами и только с натуральными.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гельфонд А. О. О равномерных приближениях многочленами с целыми коэффициентами // УМН. 1955. Т. 10. № 1. С. 41–65.
- [2] Тригуб Р. М. Приближение функций многочленами с целыми коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1962. Т. 26. № 2. С. 261–280.
- [3] Тригуб Р. М. Приближение функций с диофантовыми условиями многочленами с целыми коэффициентами // Метрические вопросы теории функций и отображений. Вып. 2. Киев: Наукова думка, 1971. С. 267–333.
- [4] Ferguson B. O. Approximation by Polynomials with Integral Coefficients. Math. Surveys. V. 17. Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 1980.
- [5] Тригуб Р. М. Прямые теоремы о приближении алгебраическими полиномами гладких функций на отрезке // Матем. заметки. 1993. Т. 54. № 6. С. 113–121.
- [6] Toland J. F. Self-adjoint operators and cones // J. London Math. Soc. 1996. V. 2. № 53. P. 167–183.
- [7] Trigub R. M. On the approximation of functions by polynomials with positive coefficients // East J. Approximation. 1998. V. 4. № 3. P. 379–389.
- [8] Теляковский С. А. Две теоремы о приближении функций алгебраическими многочленами // Матем. сб. 1966. Т. 70. № 2. С. 252–265.
- [9] Гопенгауз И. Е. К теореме А. Ф. Тимана о приближении функций многочленами на конечном отрезке // Матем. заметки. 1967. Т. 1. № 2. С. 163–172.
- [10] Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.
- [11] Brudnyi Yu. A. Timans type result on approximation by algebraic polynomials // Operator Theory Adv. Appl. 1997. V. 98. P. 92–101.

Донецкий государственный университет
E-mail: postmaster@ok.donbass.com

Поступило
30.03.2000