Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Хохлов, Стабильные подмножества и существование единицы в (полу)первичных кольцах, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 1, 137–145

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm726>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 07:31:55

УДК 512

СТАБИЛЬНЫЕ ПОДМНОЖЕСТВА И СУЩЕСТВОВАНИЕ ЕДИНИЦЫ В (ПОЛУ)ПЕРВИЧНЫХ КОЛЬЦАХ

А. В. Хохлов

Получены критерии существования единицы в полупервичных, первичных и простых кольцах и критерии центральности идемпотента произвольного и полупервичного кольца. В частности, показано, что строго первичное кольцо R , в котором $r \in Rr \forall r \in R$, имеет единицу. В связи с этим приведены примеры первичных (даже простых) колец, в которых $r \in Rr \cap rR \forall r \in R$, но нет единицы. Вопрос о наличии единицы в произвольном кольце R ранее сведен автором к полупервичному случаю: в R есть левая единица тогда и только тогда, когда $r \in Rr$ для любого элемента r из первичного радикала $P(R)$ и кольцо $R/P(R)$ обладает левой единицей.

Библиография: 6 названий.

Получены критерии существования единицы в полупервичных, первичных и простых кольцах (теоремы 2.1 и 2.2). Они выведены из найденных в статье [1] условий наличия единицы в произвольных ассоциативных кольцах, опирающихся на свойства стабилизаторов подмножеств и балластов модулей (определения 1.1 и 1.2). В частности, показано, что строго первичное кольцо R (в любом идеале лежит конечное подмножество A с ${}^{\circ}A = 0$), в котором $r \in Rr \forall r \in R$, обладает единицей. В связи с этим в п. 3 приведены примеры первичных (даже простых) колец, в которых $r \in Rr \cap rR \forall r \in R$, но нет единицы, и установлено (следствие утверждения 3.1), что к таким кольцам относятся цоколи первичных колец, не являющиеся артиновыми модулями (т.е. не изоморфные кольцам матриц над телом).

Отметим, что вопрос о наличии единицы в произвольном кольце R сводится к полупервичному случаю в силу теоремы 5.6 из [1]: в R есть левая единица тогда и только тогда, когда первичный радикал $P(R) \subset B(R)$ (см. определение 1.2) и полупервичное кольцо $R/P(R)$ обладает левой единицей. Отсюда следует, в частности, что для артинова слева или справа кольца свойство $P(R) \subset B(R)$ эквивалентно существованию левой единицы.

В процессе доказательства основных теорем в п. 2 получены критерии центральности идемпотента произвольного и полупервичного кольца (утверждения 2.2 и 2.3) и показано (утверждения 2.5, 2.6), что стабильные подмножества (идеалы) полупервичного (произвольного) кольца позволяют строить факторкольца с единицей (и – при дополнительных условиях – аппроксимировать кольцо унитарными).

1. Основные обозначения и определения. Всюду в дальнейшем R, T – кольца, ${}_R M_T$ – бимодуль; $L < {}_R M$ означает “ L – подмодуль ${}_R M$ ” ($L < {}_R R$ – левый идеал в R), $L \triangleleft R$ – идеал, символ “ $\equiv$ ” – равенство по определению (обозначению), “ $\oplus$ ” – прямая сумма идеалов, $C(R)$ – центр, $P(R)$ – первичный радикал, $J(R)$ – радикал Джекобсона, $I(R), N(R)$ – множества идемпотентных и нильпотентных элементов R , $\text{Soc}({}_R M)$ – цокль M (сумма всех простых подмодулей). Для $A, B \subset R$ и $N \subset {}_R M_T$ $\langle A \rangle$ – наименьший идеал R , содержащий A , ${}^\circ N, N^\circ$ – левый и правый аннуляторы N , $A * B \equiv \{a * b \mid a \in A, b \in B\}$, где $a * b \equiv a + b - ab$, $A \cdot N \equiv \{an \mid a \in A, n \in N\}$, $AN \equiv \{\sum a_i n_i \mid a_i \in A, n_i \in N\}$. Терминология в основном совпадает с принятой в монографиях [2], [3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Будем называть подмножество $A \subset {}_R M_T$ *стабильным слева (справа)*, если непуст его левый (правый) стабилизатор $S^A \equiv {}^S A \equiv \{r \in R \mid rt = t \ \forall t \in A\}$ ($AS \equiv A^S \equiv \{t \in T \mid mt = t \ \forall t \in A\}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Множество $B({}_R M)$ ($B(M_T)$) всех стабильных слева (справа) элементов ${}_R M_T$ будем называть *левым (правым) балластом M* . Модуль ${}_R M_T$ (кольцо ${}_R R_R$) будем называть *квазиунитарным слева (справа) или QU -модулем*, если $B({}_R M) = M$ ($B(M_T) = M$), т.е. $m \in Rm \ \forall m \in M$. Кольцо R назовем *уравновешенным*, если $\forall r \in R \ \exists s \in R: sr = r = rs$.

Левые QU -кольца назывались в [4], [5] “left D -regular”, “left s -unital”.

Для всех $A, B \subset {}_R M_R$ $S^A \cdot S^A \subset S^A$, $R * S^A = S^A$, ${}^B S * S^A \subset {}^B S \cap S^A$, $AS * S^A \subset AS \cap S^A$, $S^A \neq \emptyset \ \& \ AS \neq \emptyset \iff S^A \cap AS \neq \emptyset$; в частности, R уравновешено $\iff R$ – левое и правое QU -кольцо.

Неприводимые, вполне приводимые ($\text{Soc } M = M$) и даже полуартиновы ($\text{Soc}(M/L) \neq 0 \ \forall L < M$) модули квазиунитарны [1]. Любой подмодуль конечно порожденно-го модуля имеет ненулевой балласт (так как его цокль – существенный подмодуль); $J(R) \neq R$ (т.е. существует неприводимый R -модуль) $\iff$ существует R -модуль с ненулевым балластом [1]. В классах линейно компактных слева или (полу)компактных топологических колец квазиунитарность слева равносильна наличию левой единицы [6].

Класс левых QU -колец радикален в смысле Куроша [1], замкнут относительно основных кольцевых конструкций, содержит все прямые суммы колец с единицей, а с другой стороны, он является естественным расширением класса регулярных по Нейману колец в силу импликаций: кольцо R строго регулярно ($r \in r^2 R \cup R r^2 \ \forall r \in R$) $\iff$ все левые идеалы R – левые QU -кольца $\implies R$ регулярно $\iff R$ уравновешено и все (главные) правые идеалы R – левые QU -кольца $\implies R$ вполне идемпотентно слева ($r \in (Rr)^2$) $\iff$ все идеалы R – левые QU -кольца.

В дальнейшем будут полезны следующие расширения центра кольца.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Пусть $C'(R) \equiv \{c \in R \mid cR \supset Rc\}$, $'C(R) \equiv \{c \in R \mid cR \subset Rc\}$. Будем называть $'C(R) \equiv C(R) \cap C'(R) = \{c \in R \mid cR = Rc\}$ *квазицентром R* , кольцо R с $'C(R) = R$ *квазикоммутативным* (или *QC -кольцом*), а кольцо с $'C(R) = R$ ($C'(R) = R$) *левым (правым) QC -кольцом*.

Существуют (локальные артиновы слева) кольца с левой единицей, в которых все правые идеалы – идеалы и $'C(R) \cup C'(R) = R$, но $'C'(R) = 0$ [1] и QC -кольца (без делителей нуля) с $C(R) = 0$. Класс QC -колец включает все (анти)коммутативные кольца, тела, все кольца косых степенных рядов над телами. В QC -кольцах все идемпотенты

центрально, $R^\circ = {}^\circ R$, $\text{Soc}({}_R R) = \text{Soc}(R_R)$, $B({}_R R) = B(R_R) \triangleleft R$; на них переносятся и многие другие свойства коммутативных колец: для левых QC -колец первичность равносильна отсутствию делителей нуля, полупервичность – отсутствию нильпотентов (нильрадикалы совпадают с $N(R)$), регулярность – бирегулярности, полная идемпотентность – строгой регулярности, примитивность – простоте (тому, что R – тело).

ЛЕММА 1.1. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) $C'(R), {}'C(R), {}'C'(R)$ – мультипликативные полугруппы;
- 2) $'C'(R) \cap I(R) \subset C(R)$;
- 3) $(C'(R) \cup {}'C(R)) \cap N(R) \subset P(R)$;
- 4) $'C(R) \cap B({}_R R) \supset {}'C(R) \cap B(R_R)$, $'C'(R) \cap B({}_R R) = {}'C'(R) \cap B(R_R)$;
- 5) $'C(\bigoplus R_n) = \bigoplus {}'C(R_n)$, $'C'(\bigoplus R_n) = \bigoplus {}'C'(R_n)$.

В кольце с единицей $'C'(R)$ содержит все обратимые элементы. Если R – простое артиново кольцо, то $C'(R), {}'C(R), {}'C'(R)$ совпадают с группой обратимых элементов R в силу леммы 2.3, так как ${}^\circ r = 0 \iff r^\circ = 0 \iff r$ обратим. В полупростом артиновом кольце $C'(R) = {}'C(R) = {}'C'(R)$ согласно утверждению 5) леммы 1.1. Если $C'(R) \subset {}'C(R)$, то R конечно по Дедекинду.

2. Критерии существования единицы в (полу)первичных кольцах.

ТЕОРЕМА 2.1. *Для полупервичного кольца R равносильны условия:*

- 1) в R есть единица;
- 2) в R есть правая (левая) единица;
- 3) $\exists A \subset R: {}^\circ A = 0 \text{ \& } S^A \neq \emptyset$;
- 4) $\exists A \subset R: |{}^A S| = 1$;
- 5) в R есть стабильный слева левый идеал A с $A^\circ = 0$;
- 6) в R есть стабильный слева существенный левый идеал;
- 7) R квазиунитарно слева и существует конечное $A \subset R$ с ${}^\circ A = 0$;
- 8) R квазиунитарно слева и в множестве аннуляторов конечных подмножеств R есть минимальный элемент ${}^\circ A$;
- 9) R – объединение (сумма) конечного числа стабильных слева подмножеств;
- 10) все (аннуляторные) собственные идеалы R стабильны слева и в R имеется ненулевой идемпотент, обладающий одним из свойств:

$$\begin{aligned} e \in {}'C(R) \cup C'(R), \quad S^e = {}^e S, \quad S^{Re} = {}^R e S, \\ {}^\circ e = e^\circ, \quad {}^\circ e \triangleleft R, \quad Re \triangleleft R; \end{aligned}$$

- 11) $\exists A \subset R: S^A \cap A \neq \emptyset \text{ \& } {}^\circ A$ – идеал, стабильный слева;
- 12) R – левое QU -кольцо и в множестве его стабильных слева правых идеалов есть максимальный элемент;
- 13) $\exists e \in I(R)$: элементы $r - er$, $r \in R$, стабильны и квазиобратимы слева.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Строго первичное левое QU -кольцо обладает единицей.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *В кольце без делителей нуля наличие единицы равносильно любому из условий:*

- 1) $B({}_R R) \cup B(R_R) \neq \emptyset$;
- 2) $I(R) \neq \emptyset$.

Если $N(R) = 0$, то ${}^{\circ}A = A^{\circ}$, $S^A = {}^A S \ \forall A \subset R$ и $B({}_R R) = B(R_R) \triangleleft R$ [1], и потому в тексте теоремы 2.1 любое “левое” условие можно заменить на “правое” и наоборот. Очевидно, $N(R) = 0 \iff R$ полупервично и ${}^{\circ}A = A^{\circ} \ \forall A \subset R \iff R$ полупервично и $\forall r \in R \ r^{\circ} \triangleleft R$ или ${}^{\circ}r \triangleleft R$.

ТЕОРЕМА 2.2. *Для первичного кольца R эквивалентны свойства:*

- 1) *в R есть единица;*
- 2) *в R есть правая (левая) единица;*
- 3) $\exists A \subset R: A \neq 0, S^A \neq \emptyset$ и ${}^{\circ}A \triangleleft R$;
- 4) *в R есть стабильный слева ненулевой левый идеал;*
- 5) $'C'(R) \cap (B({}_R R) \cup B(R_R)) \neq 0$;
- 6) $B({}_R R) \cap C'(R) \neq 0$ ($'C'(R) \cap B(R_R) \neq 0$);
- 7) R квазиунитарно слева (справа) и $C'(R) \neq 0$ ($'C'(R) \neq 0$);
- 8) *в R существует $e = e^2 \neq 0$, обладающий одним из свойств:*

$$\begin{aligned} e \in 'C(R) \cup C'(R), \quad S^e = {}^e S, \quad S^{Re} = {}^{Re} S, \\ {}^{\circ}e = e^{\circ}, \quad {}^{\circ}e \triangleleft R, \quad Re \triangleleft R. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть R – простое кольцо. Тогда эквивалентны следующие свойства:*

- 1) *в R есть единица;*
- 2) $'C'(R) \neq 0$;
- 3) $C'(R) \neq 0$ и $\exists L < {}_R R: 0 \neq L \subset B(R_R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 2) $\implies$ 1): для $r \in 'C'(R)$ $rR = Rr \triangleleft R \implies rR = Rr = R$ при $r \neq 0$ в силу простоты $R \implies r$ стабилен и по свойству 5) теоремы 2.2 R имеет единицу.

3) $\implies$ 1): по следствию 7 теоремы 2.2 из [1] в любом кольце есть наибольший левый идеал Q среди лежащих в $B({}_R R)$, причем $Q \triangleleft R$; так как $Q \supset L \neq 0$, то $Q = R$ и выполнено свойство 7) теоремы 2.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Существуют кольца без делителей нуля с $'C'(R) = R$, но $C(R) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Естественное усиление требований теоремы 2.2 приводит к утверждению: R – простое кольцо с $'C(R) = R \iff R$ – тело $\iff R$ примитивно слева и $'C(R) = R \iff R$ примитивно слева и все его (или только максимальные модулярные) левые идеалы – идеалы $\iff R$ первично, $\text{Soc } R \neq 0$ и $\forall r \in R \ r^{\circ} \triangleleft R$ или ${}^{\circ}r \triangleleft R \iff R$ первично и все правые идеалы R – правые QU -кольца $\iff R$ первично и строго регулярно $\iff R$ – левое QU -кольцо без левых идеалов.

Для доказательства теорем 2.1 и 2.2 потребуются ряд вспомогательных утверждений, имеющих и самостоятельный интерес.

ЛЕММА 2.1. *Если ${}_R M \supset A$, $S^A \neq \emptyset$, то ${}^{\circ}A$ – модулярный левый идеал, $R = {}^{\circ}A + R_s \ \forall s \in S^A$. Если же $\exists s \in S^A \cap ({}^{\circ}A)^{\circ}$, то ${}^{\circ}A = {}^{\circ}S$ и $R = {}^{\circ}A \oplus R_s = {}^{\circ}s \oplus R_s$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Разложение $R = Re \oplus R(1 - e)$ получается при $A \equiv e = e^2 \equiv s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\{rs - r \mid r \in R\} \subset {}^{\circ}A \ \forall s \in S^A; s \in S^A \implies {}^{\circ}s \subset {}^{\circ}A$ и ${}^{\circ}A \cap R_s = {}^{\circ}A_s$. Поэтому ${}^{\circ}A_s = 0 \implies {}^{\circ}A = {}^{\circ}s$ и $R = {}^{\circ}A \oplus R_s$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. 1) Если $\exists A \subset R_M$: ${}^{\circ}A = 0$ & $S^A \neq \emptyset$ ($\exists A \subset M_R$: $A^{\circ} = 0$ & ${}^AS \neq \emptyset$), то в R есть правая (левая) единица. Она будет единицей тогда и только тогда, когда $R^{\circ} = 0$ (${}^{\circ}R = 0$).

2) Подкольцо $T \subset R$ обладает правой (левой) единицей $\iff \exists A \subset R$: ${}^{\circ}A \cap T = 0$ & $S^A \cap T \neq \emptyset$ ($A^{\circ} \cap T = 0$ & ${}^AS \cap T \neq \emptyset$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) По лемме 2.1.

2) В силу п. 1) для модуля ${}_T R_T$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. Если $R^{\circ} = {}^{\circ}R = 0$, $e = e^2 \in R$, то $e \in C(R) \iff {}^{\circ}e \triangleleft R$ и $e^{\circ} \triangleleft R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $er - ere = 0 = re - ere \ \forall r \in R$, ибо $e = e^2 \in R$ & ${}^{\circ}e \triangleleft R$ ($e^{\circ} \triangleleft R$) $\implies (1 - e)Re = (e^{\circ})e \subset R^{\circ}$ ($eR(1 - e) = e({}^{\circ}e) \subset {}^{\circ}R$). Действительно, $R = Re \oplus R(1 - e) = Re \oplus {}^{\circ}e$, $Re(e^{\circ})e = 0$, а при ${}^{\circ}e \triangleleft R$ ${}^{\circ}e(e^{\circ})e \subset {}^{\circ}eRe \subset {}^{\circ}ee = 0$.

СЛЕДСТВИЕ. Если $R = C'(R)$, $R^{\circ} = 0$, то $I(R) \subset C(R)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие $R^{\circ} = {}^{\circ}R = 0$ (оно выполнено в полупервичных и в уравновешенных кольцах) в утверждении 2.2 существенно: бывают кольца с $R^{\circ} = 0$, ${}^{\circ}R \neq 0$, ${}^{\circ}A \triangleleft R$, $A^{\circ} \triangleleft R \ \forall A \subset R$, но $C(R) = 0 \neq I(R)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.3. Пусть R полупервично, $e = e^2 \in R$. Тогда

$$\begin{aligned} e \in C(R) &\iff e \in {}'C'(R) \iff e \in {}^eRS \cup S^{Re} \iff e \in {}'C(R) \cup C'(R) \\ &\iff Re \triangleleft R \iff S^{Re} = {}^{Re}S \iff S^{eR} = {}^{Re}S \\ &\iff S^e = {}^eS \iff {}^{\circ}e = e^{\circ} \iff {}^{\circ}e \triangleleft R \text{ & } e^{\circ} \triangleleft R \\ &\iff E \equiv \{er - ere \mid r \in R\} \subset {}'C(R) \cup C'(R). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ. Если $eR \cap N(R) = 0$, то $e \in C(R)$ (ибо ${}^{\circ}e = e^{\circ}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1.1 $e \in {}'C'(R) \iff e \in C(R) \implies e \in {}^eRS \implies eR = eRe \subset Re \implies e \in {}'C(R)$ и $Re = ReR \triangleleft R$. Отсюда по лемме 4.1 из [1] ${}^{Re}S = S^{Re} \implies e$ - единица идеала $Re \implies e \in C(R)$. Так как $S^e = S^{eR}$ и ${}^eS = {}^{Re}S$, то $S^{eR} = {}^{Re}S \iff S^e = {}^eS$; по лемме 2.2 $S^e = {}^eS \iff {}^{\circ}e = e^{\circ} \iff {}^{\circ}e \triangleleft R \text{ & } e^{\circ} \triangleleft R$, что равносильно $e \in C(R)$ по утверждению 2.2. Наконец, поскольку всегда $E \subset N(R)$, то согласно утверждению 3) леммы 1.1

$$E \subset {}'C(R) \cup C'(R) \implies E \subset P(R) = 0 \implies er = ere \implies e \in {}^eRS \iff e \in C(R).$$

ЛЕММА 2.2. Пусть R полупервично, $A \subset R$. Тогда ${}^{\circ}A = A^{\circ} \iff {}^{\circ}A \triangleleft R \text{ & } A^{\circ} \triangleleft R$, а $S^A = {}^AS \neq \emptyset \iff {}^{\circ}A = A^{\circ} \text{ & } S^A \cup {}^AS \neq \emptyset$ [1].

ЛЕММА 2.3. Если $A \subset C'(R)$, то ${}^{\circ}A = {}^{\circ}\langle A \rangle \triangleleft R$, где $\langle A \rangle = AR + \mathbb{Z}A \triangleleft R$. Если R первично, то $A \subset C'(R) \implies {}^{\circ}A = 0$ ($A \subset {}'C(R) \implies A^{\circ} = 0$).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.4. Если R полупервично, $A \subset R$ и $S^A = {}^AS \neq \emptyset$ (например, $A \triangleleft R$ и $S^A \cup {}^AS \neq \emptyset$), то ${}^{\circ}A = A^{\circ}$ и R/A° имеет единицу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.2 ${}^{\circ}A = A^{\circ} \triangleleft R$, причем это левый и правый модулярный идеал по лемме 2.1.

СЛЕДСТВИЕ. Если $N(R) = 0$, $R \supset A \neq \emptyset$, $S^A \cup {}^AS \neq \emptyset$, то R/A° имеет единицу.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.5. Пусть $P = P(R)$, $A \triangleleft R$ и $S^A \neq \emptyset$. Тогда

$$L \equiv \{r \in R \mid rA \subset P\} = \{r \in R \mid Ar \subset P\} \equiv Q \triangleleft R$$

и R/Q обладает единицей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В полупервичном кольце $\overline{R} \equiv R/P$ $\overline{Q} = \overline{A}^{\circ} = {}^{\circ}\overline{A} = \overline{L}$, а так как $P \subset Q \cap L$, то $Q = L$ и $R/Q \cong \overline{R}/\overline{Q} = \overline{R}/{}^{\circ}\overline{A}$ имеет единицу по утверждению 2.4 (стабильность A сохраняется при гомоморфизмах).

Поэтому интересны стабильные идеалы и условия, при которых стабильное подмножество можно расширить до стабильного идеала.

ЛЕММА 2.4. 1) Если в полупервичном кольце R есть ненулевое подмножество A : $S^A \neq \emptyset$ и ${}^{\circ}A \triangleleft R$, то $\exists I \triangleleft R$: $I \supset A \neq 0$ и ${}^IS = S^I = S^A \neq \emptyset$.

2) Если дополнительно $S^A \cap A \neq \emptyset$, то $S^A = {}^AS = {}^IS = S^I \neq \emptyset$, ${}^{\circ}A = A^{\circ}$, в кольце $I \equiv {}^{\circ}A^{\circ}$ есть единица $e \in A \cap C(R)$ и $R = {}^{\circ}I \boxplus I = A^{\circ} \boxplus {}^{\circ}A^{\circ}$ (в частности, $e = e^2 \in R \& {}^{\circ}e \triangleleft R \implies e \in C(R) \& R = e^{\circ} \boxplus e^{\circ}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) По утверждению 4.4 из [1] можно взять $I \equiv ({}^{\circ}A)^{\circ}$.

2) Тогда $A \subset I$, $S^A = S^I$, элемент $e \in A \cap S^A \subset I \cap S^I$ – единица кольца $I \triangleleft R$. Поэтому $e \in C(R)$, $I = eR = Re$, $I^{\circ} = {}^{\circ}I = e^{\circ} = {}^{\circ}e$ и $R = I \boxplus I^{\circ}$; $A \subset I = eR \& e \in A \implies {}^{\circ}A \supset {}^{\circ}I \supset {}^{\circ}e \supset {}^{\circ}A \& A^{\circ} \supset I^{\circ} \supset e^{\circ} \supset A^{\circ} \implies {}^{\circ}A = {}^{\circ}I = I^{\circ} = A^{\circ}$, а по лемме 2.2 $S^A = {}^AS \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Поскольку в полупервичном кольце $R^{\circ} = {}^{\circ}R = 0$, то по утверждению 2.1 3) $\iff$ 2) $\iff$ 1).

5) $\implies$ 3), так как в полупервичном кольце ${}^{\circ}A \subset A^{\circ} \forall A \triangleleft {}_R R$.

6) $\implies$ 3), так как в полупервичном кольце ${}^{\circ}A \cap A \forall A \triangleleft {}_R R$.

7) $\implies$ 3), так как в левом QU -кольце $S^A \neq \emptyset$ для любого конечного $A \subset R$ [1, теорема 2.2].

8) $\iff$ 7) в любом кольце с ${}^{\circ}R = 0$, ибо ${}^{\circ}A = {}^{\circ}R$: $\forall r \in R$ ${}^{\circ}(A \cup \{r\}) = {}^{\circ}A \cap {}^{\circ}r \subset {}^{\circ}A \implies {}^{\circ}(A \cup \{r\}) = {}^{\circ}A$ в силу минимальности ${}^{\circ}A$, т.е. ${}^{\circ}A \subset {}^{\circ}r$.

9) $\iff$ 2) по теореме 5.3 из [1].

1) $\implies$ 10) $\implies$ 9): по утверждению 2.3 $e \in C(R)$, значит $R = eR \boxplus e^{\circ}$.

1) $\implies$ 11) $\implies$ 9): при $A = 0$ ${}^{\circ}A = R$ имеет левую единицу, а при $A \neq 0$ по лемме 2.4 $\exists I \triangleleft R$ $R = {}^{\circ}I \boxplus I = {}^{\circ}A \boxplus I$, где I обладает единицей, а ${}^{\circ}A$ стабилен слева по условию. Каждое из свойств 12), 13), 4) равносильно существованию левой единицы в произвольном кольце R [1].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. 1) $\implies$ 2) $\implies$ 3), а 3) $\implies$ 1) ввиду условия 3) теоремы 2.1: $({}^{\circ}A)^{\circ} \supset A \neq 0 \implies {}^{\circ}A = 0$, ибо ${}^{\circ}A \triangleleft R$, а R первично.

1) $\implies$ 4) $\implies$ 3), 1) $\implies$ 5) $\implies$ 6), 1) $\implies$ 7) $\implies$ 6), а 6) $\implies$ 3) по лемме 2.3.

По утверждению 2.3 8) $\iff \exists e = e^2 \neq 0$: $e \in C(R)$, а в первичном кольце это равносильно наличию единицы в силу разложения Пирса.

ЗАМЕЧАНИЕ. Существует уравновешенное кольцо без нильпотентов, в котором $(S^A \cup AS) \cap A = \emptyset \quad \forall A \subset R$; в частности, нет подколец с единицей (см. пример 2.1). Пример 2.1 показывает, что свойства 3)–7) теоремы 2.2 не переносятся даже на полупростые коммутативные кольца, а дополнительное условие в утверждении 2) леммы 2.4 существенно.

ПРИМЕР 2.1. Множества F^n всех финитных вещественных функций классов $C^n(\mathbb{R})$, $1 \leq n \leq \infty$, – полупростые коммутативные QU -кольца (алгебры) без единицы, регулярных элементов, нильпотентов и идемпотентов; $\text{Soc}(F^n) = 0$. Для всех $A \subset F^n$ $S^A = \{f \in F^n \mid f(x) = 1 \text{ при } x \in \cup\{g^{-1}(\mathbb{R} \setminus 0) \mid g \in A\}\}$; в частности, $S^A \neq \emptyset \iff$ множество $\text{supp } A \equiv \cup\{\text{supp } g \mid g \in A\}$ ограничено. Для любого ограниченного $B \subset \mathbb{R}$ $R_B \equiv \{f \in F^n \mid f(x) = 0 \text{ при } x \in \mathbb{R} \setminus B\}$ – стабильный идеал в F^n .

Если $B \subset \mathbb{R}$ – открытое ограниченное множество, то $R \equiv R_B$ – коммутативные кольца с $J(R) = 0$ и балластом $B(R) = \{f \in R \mid \text{supp } f \subset B\}$, являющимся идеалом R и уравновешенным кольцом. Действительно, если $gf = f$, то $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus 0) \subset g^{-1}(1)$ – замкнутое подмножество $R \implies \text{supp } f \subset g^{-1}(1) \subset B$; $B(R) \neq R$, ибо по теореме Уитни для всякого замкнутого $H \subset \mathbb{R}^m \exists f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$: $f^{-1}(0) = H$ и при $H \equiv \mathbb{R} \setminus B$ такая $f \in R \setminus B(R)$. По тем же соображениям идеал $B(R)$ не стабилен в R , но $B(B(R)) = B(R)$ в силу существования разбиения единицы для любого компакта $K \subset B \subset \mathbb{R}$.

3. Пример простого уравновешенного кольца без единицы. По теореме 2.1 левые QU -кольца без делителей нуля (даже только строго первичные) имеют единицу. Естественный вопрос: обладают ли единицей уравновешенные первичные (примитивные, простые) кольца? Если $C'(R) \neq 0$ или выполняется условие минимальности для левых аннуляторов, то ответ утвердительный (см. теоремы 2.2 и 2.1), а в общем случае – отрицательный: ниже будет доказано, что цоколь R первичного кольца P , не являющийся артиновым модулем над R или P , – простое вполне приводимое слева и справа регулярное кольцо без левых и правых единиц.

ЛЕММА 3.1. Если $R \supset L \supset J \supset J - J$, $L < {}_R R$ ($L < R_R$), $LJ = J$ ($JL = J$), то $J < {}_R R$ ($J < R_R$). Если $J^2 = J \triangleleft L \triangleleft R$, то $J \triangleleft R$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть L – (левый) идеал R . Тогда всякий квазиунитарный (левый) идеал J кольца L является (левым) идеалом R .

СЛЕДСТВИЕ 2. Если J – минимальный левый идеал кольца $L < {}_R R$, $LJ \neq 0$, то J – минимальный левый идеал R и $\text{Soc}({}_L L) \subset \text{Soc}({}_R R)$.

ЛЕММА 3.2. Пусть R полупервично, $I \triangleleft R$. Тогда L – минимальный левый идеал $I \iff L$ – минимальный левый идеал $R \& L \cap I \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В одну сторону – по лемме 3.1, так как $IL \neq 0$. Обратно, L минимален в $R \iff \exists e = e^2 \in R$: $L = Re \& eRe$ – тело; $L \cap I \neq 0 \implies L \subset I \implies e \in L \subset I \implies Ie \ni e^2 = e \neq 0 \implies Ie = Re = L$ в силу минимальности L ; $0 \neq e = e^3 \in Ie \triangleleft eRe \implies eIe = eRe$ – тело $\implies Ie$ – минимальный левый идеал полупервичного кольца I .

ЛЕММА 3.3. Уравновешенные кольца с $\text{Soc } {}_R R = R$ регулярны.

СЛЕДСТВИЕ. Вполне приводимые слева и справа кольца регулярны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во вполне приводимом модуле всякий подмодуль – прямое слагаемое, а для уравновешенного кольца это свойство конечнопорожденных левых идеалов равносильно регулярности.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Вполне приводимое слева кольцо может не быть квазиунитарным справа [1].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В лемме 3.2 нельзя опустить условие $P(R) = 0$ или заменить условие $I \triangleleft R$ на $I < {}_R R$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. 1) Если P – полупервичное кольцо, $\text{Soc } P \neq 0$, то $\text{Soc } P$ – вполне приводимое слева и справа ($\implies$ регулярное уравновешенное) кольцо, однородные компоненты $\text{Soc } P$ – простые регулярные кольца, $\text{Soc } I = I \quad \forall I \triangleleft P: I \subset \text{Soc } P$.

2) Если P первично, $\text{Soc } P \neq 0$, то $\forall I \triangleleft P \quad \text{Soc } I = \text{Soc } P$ – простое полупростое вполне приводимое слева и справа кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) По лемме 3.2 $\text{Soc}(\text{Soc } P) = \text{Soc } P$ – вполне приводимое слева и справа кольцо, а значит, регулярное и уравновешенное по лемме 3.3.

По лемме 3.2 $\text{Soc } I = I$, ибо подмодуль ${}_P I$ вполне приводимого модуля ${}_P(\text{Soc } P)$ – сумма минимальных левых идеалов кольца P .

2) $\text{Soc } P \neq 0$ – наименьший идеал $P \implies \text{Soc } P$ – простое кольцо и $\text{Soc } P \subset I \implies \text{Soc } P \subset \text{Soc } I$ в силу леммы 3.2 $\implies \text{Soc } I = \text{Soc } P$, так как первичность кольца I влечет простоту кольца $\text{Soc } I$. В частности, $\text{Soc } \text{Soc } P = \text{Soc } P$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть R – однородная компонента цоколя полупервичного кольца P (в частности, цоколь первичного). Тогда эквивалентны следующие утверждения:

- 1) в R есть левая (правая) единица;
- 2) $'C(R) \cup C'(R) \neq 0$;
- 3) R – (простое) артиново кольцо;
- 4) любой из модулей ${}_R R, {}_R R, {}_P R, {}_R P$ конечнопорожден (артинов).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как по утверждению 3.1 R – простое вполне приводимое слева и справа кольцо (значит, уравновешенное), то 1) $\iff$ 2) по свойству 7) теоремы 2.2, а 1) $\implies$ 4) $\implies$ 3) $\implies$ 1).

ПРИМЕР 3.1. Пусть E – кольцо всех линейных преобразований бесконечномерного векторного пространства V над телом D , а R – подкольцо всех операторов конечного ранга. Тогда

- 1) E – примитивное слева и справа кольцо с единицей, $\text{Soc } E = R$ – его наименьший идеал [2];
- 2) R – полупростое простое ($\implies$ примитивное слева и справа $\implies$ первичное) вполне приводимое слева и справа ($\implies$ регулярное $\implies$ уравновешенное) кольцо без левых и правых единиц;
- 3) R не строго первично, $'C'(R) = 0$, в R нет стабильных слева (справа) левых (правых) идеалов, конечнопорожденных левых (правых) идеалов, являющихся идеалами; в множестве левых (правых) аннуляторов конечных подмножеств R нет минимальных элементов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 2) По утверждению 3.1 с $P = E$ получим, что $R = \text{Soc } E$ – простое вполне приводимое слева и справа кольцо $\implies$ регулярное (лемма 3.3). В R нет левых (правых) единиц по следствию утверждения 3.1.

3) По теоремам 2.1, 2.2 в силу отсутствия единицы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Этот пример типичен, когда речь идет о поколах первичных колец: любое первичное кольцо P с ненулевым поколом ($\exists e = e^2 \in P: F \equiv ePe \simeq \text{End}_R(Re)$ – тело) примитивно и вкладывается в качестве плотного подкольца в кольцо L линейных операторов векторного пространства $(Pe)_F$ отображением левого умножения, при этом $\text{Soc } P$ вкладывается в $\text{Soc } L$ – подкольцо операторов конечного ранга. Если взять $P = E \equiv \text{End}(V_D)$ из примера 3.1, то $F \simeq D$, $(Pe)_F \simeq V_D$, $L \simeq E$ и $\text{Soc } P = \text{Soc } L = \text{Soc } E$.

ПРИМЕР 3.2. Пусть $T \equiv \bigcup_1^\infty M_n(D)$ – кольцо всех финитных матриц над телом D (оно изоморфно подкольцу кольца R из примера 3.1, если V имеет счетный базис $\{e_i\}$: $T \simeq \{\alpha \in R \mid \exists n : e_i \subset \text{Ker } \alpha \ \forall i > n\} \neq R$). Тогда T обладает всеми свойствами кольца R из примера 3.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как T – простое кольцо (как объединение цепи простых колец) и $T \triangleright \text{Soc } T \supset T e_{11} \neq 0$, то $\text{Soc } T = T$. Поэтому остается повторить рассуждения п. 2), 3) из примера 3.1.

В заключение автор выражает признательность А. В. Михалеву за благожелательное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Хохлов А. В. О стабильных подмножествах модулей и существовании единицы в ассоциативных кольцах // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 4. С. 596–611.
- [2] Джекобсон Н. Строение колец. М.: ИЛ, 1961.
- [3] Херстейн И. Некоммутативные кольца. М.: Мир, 1972.
- [4] Ramamurthi V. S. Weakly regular rings // Canad. Math. Bull. 1973. V. 16. № 3. P. 317–321.
- [5] Tominaga H. On s -unital rings // Math. J. Okayama Univ. 1976. V. 18. № 2. P. 117–134.
- [6] Хохлов А. В. О существовании единицы в полукомпактных кольцах и топологических кольцах с условиями конечности // Фундамент. и прикл. матем. 2001 (в печати).

НИИ механики при Московском государственном университете

Поступило

26.07.1999

Исправленный вариант

23.03.2000