Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. С. Рютин, Оценка снизу псевдоразмерности через топологическую размерность, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 1, 155–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm729>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 14:28:32

ОЦЕНКА СНИЗУ ПСЕВДОРАЗМЕРНОСТИ ЧЕРЕЗ ТОПОЛОГИЧЕСКУЮ РАЗМЕРНОСТЬ

К. С. Рютин

1. Введение. Пусть F – множество действительных функций на S , где S – некоторое множество. Для $v \in \mathbb{R}$ определим $\text{sgn}(v)$ как 1 при $v > 0$ и 0 при $v \leq 0$. Кроме того введем “новую” функцию из $\mathbb{R}^m$ в $\{0; 1\}^m$ следующим образом: $\text{sgn}[v] = (\text{sgn}(v_1), \dots, \text{sgn}(v_m))$, где $v = (v_1, \dots, v_m)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть M — множество всех $m \in \mathbb{N}$ таких, что существуют точки $\tau_1, \dots, \tau_m \in S$ и вектор $v \in \mathbb{R}^m$, для которых

$$\#\{\text{sgn}[(f(\tau_1), \dots, f(\tau_m)) + v]; f \in F\} = 2^m.$$

Псевдоразмерностью множества F называется следующая величина:

$$\dim_P F := \max\{m: m \in M\}.$$

Для оценки погрешности приближений нелинейными многообразиями подобные величины использовали в [1], [2]. Соответствующую же (общую) комбинаторную конструкцию первыми рассмотрели Вапник и Червоненкис в [3], поэтому другое название для псевдоразмерности – размерность Вапника–Червоненкиса. В работе [4] исследуются разнообразные обобщения этого понятия и даются приложения к задачам теории аппроксимации и геометрии. Полезные в комбинаторных задачах оценки ε -энтропии множества через псевдоразмерность содержатся в работе [5], там же имеется обширная библиография. В работах [6], [7] оцениваются псевдоразмерности важных для приложений множеств m -параметрических многочленов одного и нескольких действительных переменных. В [8] показано, что если F – конечномерное пространство действительных функций на S , то $\dim_P F = \dim F$. В работе [9] приводится пример четных n -параметрических тригонометрических полиномов, у которых псевдоразмерность бесконечна, а топологическая конечна. Этот пример показывает, что псевдоразмерность “достаточно простого” множества может быть существенно больше топологической; мы же покажем, что $\dim F \leq \dim_P F$; здесь и всюду в дальнейшем $\dim$ – топологическая размерность. В теории размерности чаще всего используются размерности $\dim$, Ind , ind . Мы будем работать только с сепарабельными и метризуемыми топологическими пространствами, где $\text{Ind} = \dim = \text{ind}$ [10, с. 592]. Всюду в дальнейшем мы используем размерность $\dim$ (определение см. [10, с. 564]).

2. Связь с топологической размерностью. Мы докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть T – метрический компакт, F – компактное подмножество $C(T)$ и $\dim F = n < \infty$. Тогда выполнено неравенство $\dim_P F \geq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $t_1, t_2, \dots, t_k$ – попарно различные точки из T и “соорудим” из них единый вектор $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$. Определим отображение $\Gamma_t: C(T) \rightarrow \mathbb{R}^k$ следующим образом: $\Gamma_t(x) := (x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_k))$, где $x(\tau) \in C(T)$. Будем обозначать $A_t := \Gamma_t(F)$. Доказывать наше утверждение будем от противного. Итак, предположим, что $\dim_P F < n$. Из этого следует, что при любом выборе попарно различных точек $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ соответствующее множество $A_t \subset \mathbb{R}^n$ не имеет внутренних точек. Для любого $\varepsilon > 0$ мы построим покрытие F открытыми множествами диаметра не больше ε и кратности меньше $n + 1$ и тем самым завершим доказательство. Из теоремы Арцела следует, что по ε можно подобрать $\delta > 0$, $\sigma > 0$ и $N \in \mathbb{N}$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 99-01-00357 и № 00-15-96109.

такие, что для любых $f, g \in F$ неравенства $|f(t_j) - g(t_j)| < \delta$ влекут $\|f - g\| < \varepsilon$, где точки $t_1, t_2, \dots, t_N$ образуют достаточно мелкую σ -сеть на T . Мы предполагаем, что $N \geq n$. Зафиксируем $t = (t_1, t_2, \dots, t_N)$. Из наших условий следует, что проекции множества $A_t = \Gamma_t(F)$, лежащего в $\mathbb{R}^N$, на все n -мерные координатные плоскости не имеют внутренних точек (в соответствующем $\mathbb{R}^n$). Мы применим простое следствие теоремы из работы Мардешича [11].

ЛЕММА 1. Пусть $N \geq n$, компакт $B \subset \mathbb{R}^N$ и проекции множества B на все n -мерные координатные плоскости не имеют внутренних точек. Тогда $\dim B < n$.

Из этой леммы следует, что $\dim A_t < n$. По определению размерности для любого $\delta > 0$ существует открытое покрытие $\{V_\alpha\}$ множества A_t , обладающее двумя свойствами:

- 1) $\text{diam } V_\alpha < \delta$ для всякого α ;
- 2) кратность покрытия меньше $n + 1$.

Обозначим $U_\alpha := \Gamma_t^{-1}V_\alpha$. Из наших рассуждений следует, что $\{U_\alpha\}$ и есть требуемое покрытие множества F .

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 1 справедлива и в том случае, когда F — локально конечное подмножество $C(T)$; доказательство требует незначительного усложнения.

Автор хотел бы поблагодарить Б. С. Кашина, С. В. Конягина за полезные обсуждения, Б. А. Пасынкова за информацию о работе [11].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shapiro H. S. // Michigan Math. J. 1964. V. 11. P. 211–217. 2. Warren H. E. // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 133. № 1. P. 167–178. 3. Вацник В. Н., Червоненкис А. Я. // Теор. вероятн. и ее прим. 1971. Т. 16. № 2. С. 264–279. 4. Assouad P. // Ann. Inst. Fourier. 1983. V. 33. № 3. P. 233–282. 5. Haussler D. // J. Combin. Theory. Ser. A. 1995. V. 69. P. 217–232. 6. Karpinski M., Werther T. // SIAM J. Comput. 1993. V. 22. № 6. P. 1276–1285. 7. Karpinski M., Macintyre A. // J. Comput. System Sci. 1997. V. 54. P. 169–176. 8. Haussler D. // Inform. Comput. 1992. V. 100. № 1. P. 78–150. 9. Andrianov A. // East J. Approx. 1999. V. 5. № 4. 10. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 11. Mardešić S. // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. V. 41. № 2. P. 631–633.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: rutin@mccme.ru

Поступило
20.01.2001