Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Иосифьян, Об усреднении задач теории упругости с краевыми условиями Синьорини, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 6, 818–833

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm73>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 12:58:22

УДК 517.958

ОБ УСРЕДНЕНИИ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ СИНЬОРИНИ

Г. А. Иосифьян

В перфорированной области $\Omega^\varepsilon = \Omega \cap \varepsilon\omega$, образованной из фиксированной области Ω и ε -сжатия 1-периодической области ω , рассматриваются задачи теории упругости для вариационных неравенств с краевыми условиями Синьорини на части поверхности перфорации S_0^ε . Исследуется асимптотическое поведение решений при $\varepsilon \rightarrow 0$ в зависимости от структуры множества S_0^ε . В общем случае предельная (усредненная) задача имеет два отличительных свойства: (i) предельное множество допустимых перемещений задается нелинейными ограничениями почти всюду в области Ω , т.е. условия Синьорини на поверхности S_0^ε в пределе могут превратиться в условия во внутренних точках Ω ; (ii) предельная задача формулируется для усредненного лагранжиана, который не обязательно совпадает с квадратичной формой, обычно задающей усредненный тензор упругости. Теоремы об усреднении таких задач получены методом двухмасштабной сходимости. Описана зависимость предельного множества допустимых перемещений и усредненного лагранжиана от геометрии множества S_0^ε , на котором заданы условия Синьорини.

Библиография: 12 названий.

Пусть $\Omega^\varepsilon = \Omega \cap \varepsilon\omega$ – перфорированная область в $\mathbb{R}^n$ с ε -периодической структурой. Здесь Ω – фиксированная ограниченная область, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, ω – 1-периодическая область (т.е. ω инвариантна относительно любых сдвигов на векторы с целочисленными компонентами), а $\varepsilon\omega$ – ее гомотетическое сжатие. Положим

$$\square =]0, 1[^n, \quad \omega_\square = \square \cap \omega, \quad \partial_\square \omega = \partial\omega \cap]0, 1[^n.$$

Считаем, что Ω , Ω^ε , а также ячейка периодичности $\omega_\square$ – связные открытые множества с липшицевой границей.

Множество $\Omega \setminus \varepsilon\omega$ представляет собой перфорацию области Ω и может состоять, например, из полостей или сквозных каналов. Границу области Ω^ε представим в виде $\partial\Omega^\varepsilon = \Gamma^\varepsilon \cup S^\varepsilon$, где $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega \cap \partial\Omega^\varepsilon$ – *внешняя часть границы*, а $S^\varepsilon = \Omega \cap \varepsilon\partial\omega$ – *поверхность полостей* внутри Ω .

Рассмотрим упругое тело, занимающее область Ω^ε , тензор напряжений которого в точке $x = (x_1, \dots, x_n)$ задается $(n \times n)$ -матрицей $\sigma(u^\varepsilon) = \mathcal{A}^\varepsilon(x)e(u^\varepsilon)$. Здесь

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 98-01-00450 и № 00-15-96945.

$\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{u}^\varepsilon(x) = {}^t(u_1^\varepsilon, \dots, u_n^\varepsilon)$ – вектор перемещений (столбец), $\mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon) = 2^{-1}(\nabla \mathbf{u}^\varepsilon + {}^t\nabla \mathbf{u}^\varepsilon)$ – *линеаризованный тензор деформаций*, т.е. матрица с элементами $2^{-1} \times (\partial u_i^\varepsilon / \partial x_j + \partial u_j^\varepsilon / \partial x_i)$; $\mathcal{A}^\varepsilon(x)$ – *тензор упругости*, представляющий собой линейное преобразование в пространстве $\mathbb{M}^n$ вещественных $(n \times n)$ -матриц и имеющий вид

$$\mathcal{A}^\varepsilon(x) = \mathcal{A}(\varepsilon^{-1}x) = \{a_{ij}^{hk}(\varepsilon^{-1}x)\}, \quad (\mathcal{A}(\xi)\mathbf{p})_{jk} = a_{ij}^{hk}(\xi)p_{ih} \quad \forall \mathbf{p} = \{p_{ih}\} \in \mathbb{M}^n.$$

Коэффициенты $a_{ij}^{hk}(\xi)$ являются ограниченными измеримыми 1-периодическими функциями $\xi \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющими принятым в теории упругости условиям симметрии и положительной определенности, которые можно записать в виде (см. [1, лемма 6])

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q} : \mathcal{A}(\xi)\mathbf{p} &= \mathbf{p} : \mathcal{A}(\xi)\mathbf{q} \quad \forall \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{M}^n, \\ \mathcal{A}(\xi)\mathbf{p} &= \mathbf{0} \iff {}^t\mathbf{p} = -\mathbf{p}, \\ \kappa_1 |\mathbf{p}|^2 &\leq \mathbf{p} : \mathcal{A}(\xi)\mathbf{p} \leq \kappa_2 |\mathbf{p}|^2 \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbb{S}^n \quad (\kappa_1, \kappa_2 = \text{const} > 0), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где ${}^t\mathbf{p}$ – матрица, транспонированная к $\mathbf{p} \in \mathbb{M}^n$; $\mathbb{S}^n$ – пространство вещественных симметрических $(n \times n)$ -матриц; $\mathbf{p} : \mathbf{q} = p_{ij}q_{ij}$ – скалярное произведение матриц, $|\mathbf{p}|^2 = \mathbf{p} : \mathbf{p}$. Здесь и далее предполагается суммирование по повторяющимся латинским индексам. Полужирным шрифтом обозначаются матрицы и векторы (столбцы); $\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\zeta} = \eta_i \zeta_i$ – скалярное произведение векторов $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^n$.

Введем следующие функциональные пространства. Для ограниченной липшицевой области Q пространство $H^1(Q)$ есть пополнение $C^\infty(\overline{Q})$ по норме

$$\|u\|_{1,Q} = \|u\|_{L^2(Q)} + \|\nabla u\|_{L^2(Q)}.$$

Нормы в пространствах вектор-функций $H^1(Q)^N$ и $L^2(Q)^N$ обозначаются также через $\|\cdot\|_{1,Q}$ и $\|\cdot\|_{0,Q}$ соответственно.

Для множества $\gamma \subset \partial Q$, $\text{meas}_{n-1} \gamma \neq 0$, введем пространство $H_0^1(Q, \gamma)$, состоящее из всех $u \in H^1(Q)$ с нулевым следом на γ ; $H_0^1(Q, \partial Q) = H_0^1(Q)$.

Пространство 1-периодических функций $H_{\text{per}}^1(\omega)$ есть пополнение $C_{\text{per}}^\infty(\overline{\omega})$ по норме $\|\cdot\|_{1,\omega}$. Для $v \in H_{\text{per}}^1(\omega)$ определим среднее значение

$$\langle v \rangle_\omega = |\omega_\square|^{-1} \int_{\omega_\square} v(\xi) d\xi, \quad \text{где } |\omega_\square| = \text{meas } \omega_\square.$$

Наконец, $L_{\text{per}}^p(\square)$ и $H_{\text{per}}^1(\square)$ – соответствующие пространства 1-периодических функций в $\mathbb{R}^n$.

На поверхности полостей S^ε рассмотрим множество $S_0^\varepsilon = S^\varepsilon \cap \varepsilon \partial_0 \omega$, где $\partial_0 \omega$ – измеримое 1-периодическое подмножество $\partial \omega$. Для задания условий Синьорини на S_0^ε и нулевых условий Дирихле на внешней части границы Γ^ε введем *множество допустимых перемещений*

$$\mathcal{V}^\varepsilon = \{v \in H_0^1(\Omega^\varepsilon, \Gamma^\varepsilon)^n : v \cdot \boldsymbol{\nu}^\varepsilon \leq 0 \text{ п.в. на } S_0^\varepsilon\}, \quad (2)$$

где $\boldsymbol{\nu}^\varepsilon$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial \Omega^\varepsilon$.

Будем изучать следующую задачу о равновесии упругого тела, жестко закрепленного вдоль Γ^ε , а на S_0^ε имеющего односторонний контакт с препятствием без трения (см., например, [2]).

ЗАДАЧА. Для заданных объемных сил $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^n$ найти перемещение $\mathbf{u}^\varepsilon \in \mathcal{V}^\varepsilon$, удовлетворяющее вариационному неравенству

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \mathbf{e}(\mathbf{v} - \mathbf{u}^\varepsilon) : \mathbf{A}(\varepsilon^{-1}x) \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega^\varepsilon} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}^\varepsilon) dx \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}^\varepsilon. \quad (3)$$

Существование и единственность решения этой задачи устанавливаются обычными вариационными методами (см. [2], [3]), поскольку для элементов $H^1(\Omega^\varepsilon, \Gamma^\varepsilon)^n$ выполнено неравенство Корна (см. [4], [5]), а $\mathcal{V}^\varepsilon$ является замкнутым выпуклым конусом в $H^1(\Omega^\varepsilon, \Gamma^\varepsilon)^n$.

Наша цель – описать предельное поведение решений $\mathbf{u}^\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и выяснить, как оно зависит от геометрической структуры множества S_0^ε , на котором заданы условия Синьорини.

Поскольку $\partial\omega$ – липшицева поверхность, то единичная внешняя нормаль $\boldsymbol{\nu}(\xi)$ к $\partial\omega$ существует при почти всех $\xi \in \partial\omega$ и можно рассмотреть полупространства

$$\mathcal{M}_\xi = \{\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\nu}(\xi) \leq 0\} = \{\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n : (\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\nu}(\xi))^+ = 0\},$$

где $a^+ = \max\{0, a\}$. Легко видеть, что краевые условия Синьорини $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}^\varepsilon \leq 0$ на S_0^ε в (2) можно записать в эквивалентном виде

$$\mathbf{v}(x)|_{S_0^\varepsilon} \in \mathcal{M}_{\varepsilon^{-1}x} \iff \int_{S_0^\varepsilon} |(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}(\varepsilon^{-1}x))^+|^2 dS = 0. \quad (4)$$

Чтобы для задачи (3) сформулировать предельную задачу (называемую также *усредненной*) и описать предельное множество допустимых перемещений, введем следующие замкнутые выпуклые конусы в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $H_0^1(\Omega)^n$:

$$\mathcal{M}^0 = \left\{ \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n : \int_{\sigma_0} |(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\nu}(\xi))^+|^2 dS_\xi = 0 \right\}, \quad \sigma_0 = \partial_0\omega \cap [0, 1]^n, \quad (5)$$

$$\mathcal{V}^0 = \{ \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n : \mathbf{v}(x) \in \mathcal{M}^0 \text{ п.в. в } \Omega \}. \quad (6)$$

Если $\partial_0\omega$ – непустое открытое множество на $\partial\omega$ и $\boldsymbol{\nu}(\xi)$ непрерывна на $\partial_0\omega$, то очевидно, что

$$\mathcal{M}^0 = \bigcap_{\xi \in \partial_0\omega} \mathcal{M}_\xi = \bigcap_{\xi \in \sigma_0} \mathcal{M}_\xi. \quad (7)$$

Не ограничивая общности, можем считать, что конусы (5) и (7) совпадают, поскольку мы можем устранить из $\partial_0\omega$ множество нулевой меры на $\partial\omega$, не меняя при этом условий Синьорини на S_0^ε , которые выполнены для следов допустимых перемещений почти всюду.

Рассмотрим следующие два типа условий Синьорини на $S_0^\varepsilon = \Omega \cap \varepsilon \partial_0\omega$ в соответствии с геометрической структурой множества $\partial_0\omega$.

Будем говорить, что условия Синьорини на S_0^ε *оставляют n направлений выхода*, если $\dim \mathcal{M}^0 = n$ (под размерностью конуса в $\mathbb{R}^n$ имеется в виду размерность его

Рис. 1. Условия Синьорини заданы на множествах, прилегающих к жирным линиям

линейной оболочки), что эквивалентно наличию у конуса $\mathcal{M}^0$ внутренних точек в топологии $\mathbb{R}^n$. Например, при $n = 2$ такими являются условия Синьорини на рис. 1 (а), заданные на дуге окружности, раствор которой строго меньше 2π .

Будем говорить, что условия Синьорини на S_0^ε задают *двухсторонние препятствия* по n_0 направлениям, $0 < n_0 \leq n$, если единичная внешняя нормаль $\nu(\xi)$ на $\partial_0\omega$ есть столбец вида $\nu(\xi) = {}^t(\hat{\nu}(\xi), \tilde{0})$, где $\hat{\nu}(\xi) = {}^t(\nu_1, \dots, \nu_{n_0}) \in \mathbb{R}^{n_0}$ (при $n_0 = n$ полагаем $\hat{\nu} = \nu$) и

$$\widehat{\mathcal{M}}^0 = \left\{ \hat{\eta} \in \mathbb{R}^{n_0} : \int_{\sigma_0} |(\hat{\eta} \cdot \hat{\nu})^+|^2 dS = 0 \right\} = \{0\}.$$

Очевидно, в этом случае $0 \leq \dim \mathcal{M}^0 < n$. Пример таких краевых условий при $n = 2$, $n_0 = 1$ показан на рис. 1 (b), где множество σ_0 состоит из двух параллельных отрезков γ_1, γ_2 ; еще один пример дан на рис. 1 (d), когда $n_0 = n = 2$, а σ_0 – дуга окружности раствором, строго большим 2π .

Случай условий Синьорини, оставляющих n направлений выхода, рассмотрен в [1], где показано (при некоторых несущественных дополнительных условиях на структуру ячейки $\omega_\square$), что решения u^ε задачи (3) в определенном смысле близки к решению u^0

усредненной задачи для вариационного неравенства

$$\mathbf{u}^0 \in \mathcal{V}^0, \quad \int_{\Omega} \mathbf{e}(\mathbf{u}^0) : \hat{\mathcal{A}} \mathbf{e}(\mathbf{v} - \mathbf{u}^0) dx \geq \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}^0) dx \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}^0. \quad (8)$$

Здесь $\hat{\mathcal{A}}$ – обычный усредненный тензор упругости (см. [4], [6]), определяемый из линейной 1-периодической краевой задачи в области ω (задачи на ячейке), которая совпадает с уравнением Эйлера для следующей задачи на минимум (с параметром $\mathbf{p}$):

$$\mathbb{A}(\mathbf{p}) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathbb{V}} \langle (\mathbf{e}_{\xi}(\mathbf{v}) + \mathbf{p}) : \mathcal{A}(\xi)(\mathbf{e}_{\xi}(\mathbf{v}) + \mathbf{p}) \rangle_{\omega}, \quad \mathbf{p} \in \mathbb{M}^n, \quad (9)$$

где $\mathbb{V} = H_{\text{per}}^1(\omega)^n$, $\mathbf{e}_{\xi}(\mathbf{v}) = 2^{-1}(\nabla_{\xi} \mathbf{v}(\xi) + {}^t \nabla_{\xi} \mathbf{v}(\xi))$. Для любой матрицы $\mathbf{p} \in \mathbb{M}^n$ решение $\mathbf{U}(\mathbf{p}, \xi)$ задачи (9), определенное с точностью до постоянного слагаемого, можно выбрать так, чтобы оно было линейной функцией от $\mathbf{p}$ со значениями в $H_{\text{per}}^1(\omega)^n$. Функция $\mathbb{A}(\mathbf{p})$, называемая *усредненным лагранжианом*, в рассматриваемом случае является квадратичной формой по $\mathbf{p}$, а усредненный тензор $\hat{\mathcal{A}}$ определяется соотношениями

$$\mathbf{p} : \hat{\mathcal{A}} \mathbf{p} = \mathbb{A}(\mathbf{p}) \quad \text{или} \quad \hat{\mathcal{A}} \mathbf{p} = \langle \mathcal{A}(\xi)(\mathbf{e}_{\xi}(\mathbf{U}(\mathbf{p}, \xi)) + \mathbf{p}) \rangle_{\omega} \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbb{M}^n.$$

Таким образом [1], при наличии n направлений выхода (т.е. при $\dim \mathcal{M}^0 = n$) условия Синьорини на поверхностях S_0^{ε} в пределе переходят в односторонние ограничения (6) почти всюду в области Ω , но усредненный тензор упругости остается тем же, что и для линейной задачи с нулевыми условиями Неймана на перфорации.

В настоящей работе изучаются различные случаи усреднения задач с условиями Синьорини на S_0^{ε} , для которых $\dim \mathcal{M}^0 < n$. Для этого воспользуемся методом двухмасштабной сходимости, предварительно напомним ее определение и основные свойства (см. [7]–[9]).

Пусть $L^2(\Omega, H)$ – лебегово пространство классов функций, заданных при почти всех $x \in \Omega$ и принимающих значения в сепарабельном гильбертовом пространстве H , а $C(\bar{\Omega}, H)$ – пространство непрерывных в $\bar{\Omega}$ функций со значениями в H . В дальнейшем H будет соболевским или лебеговым пространством, элементами которого являются 1-периодические функции аргумента $\xi \in \omega$, а элементы $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L^2(\Omega, H)$ будем часто записывать в виде $\mathbf{u}(x, \xi)$, $\mathbf{v}(y, \xi)$, где $x, y \in \Omega$, $\xi \in \omega$.

Символы $\rightarrow$, $\rightharpoonup$ и $\xrightarrow{2}$ соответственно обозначают сильную, слабую и двухмасштабную сходимости. В зависимости от контекста ε может обозначать как рассматриваемую последовательность, так и ее подпоследовательность. Для постоянных в неравенствах зависимость от ε указывается в явном виде, а постоянные c , c_i , C_j и т.п. не зависят от ε .

Будем говорить, что *последовательность* $u^{\varepsilon} \in L^2(\Omega)$ *двухмасштабно сходится* к $u^0(x, \xi) \in L^2(\Omega, L_{\text{per}}^2(\square))$ (короче, $u^{\varepsilon}(x) \xrightarrow{2} u^0(x, \xi)$), если для любых $\varphi(x) \in C(\bar{\Omega})$ и $\psi(\xi) \in L_{\text{per}}^2(\square)$ имеет место сходимость

$$\int_{\Omega} u^{\varepsilon}(x) \varphi(x) \psi(\varepsilon^{-1} x) dx \rightarrow \int_{\Omega \times \square} u^0(x, \xi) \varphi(x) \psi(\xi) dx d\xi \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (10)$$

СВОЙСТВА КОМПАКТНОСТИ. (i) Пусть $u^\varepsilon \in L^2(\Omega)$, $\sup_\varepsilon \|u^\varepsilon\|_{0,\Omega} < \infty$. Тогда имеет место следующая сходимость по подпоследовательности:

$$u^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u^0(x, \xi), \quad u^0(x, \xi) \in L^2(\Omega, L^2_{\text{per}}(\square)).$$

(ii) Пусть $u^\varepsilon \in H^1(\Omega)$, $\sup_\varepsilon \|u^\varepsilon\|_{1,\Omega} < \infty$. Тогда найдутся $u^0 \in H^1(\Omega)$ и $u^1(x, \xi) \in L^2(\Omega, H^1_{\text{per}}(\square)/\mathbb{R}^1)$ такие, что имеет место следующая сходимость по подпоследовательности:

$$u^\varepsilon(x) \xrightarrow{L^2(\Omega)} u^0(x), \quad \nabla_x u^\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla_x u^0(x) + \nabla_\xi u^1(x, \xi).$$

(iii) Пусть $u^\varepsilon \in H^1(\Omega)$, $\sup_\varepsilon \|\varepsilon^{-1}u^\varepsilon\|_{0,\Omega} + \sup_\varepsilon \|\nabla u^\varepsilon\|_{0,\Omega} < \infty$. Тогда найдется $u^1(x, \xi) \in L^2(\Omega, H^1_{\text{per}}(\square))$ такое, что имеет место следующая сходимость для подпоследовательности:

$$\varepsilon^{-1}u^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u^1(x, \xi), \quad \nabla_x u^\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla_\xi u^1(x, \xi). \quad (11)$$

СВОЙСТВО СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ. Для любых $\varphi(x) \in C(\overline{\Omega})$ и $\psi(\xi) \in L^1_{\text{per}}(\square)$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi(x) \psi(\varepsilon^{-1}x) dx = \int_{\Omega \times \square} \varphi(x) \psi(\xi) dx d\xi. \quad (12)$$

НЕРАВЕНСТВО ТИПА ПОЛУНЕПРЕРЫВНОСТИ СНИЗУ. Пусть $M(\xi) \geq 0$ – 1-периодическая $(N \times N)$ -матрица с ограниченными измеримыми элементами, а $V^\varepsilon \in L^2(\Omega)^N$ – последовательность векторов, двумасштабно сходящаяся к $V^0 \in L^2(\Omega, L^2_{\text{per}}(\square)^N)$. Тогда

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} V^\varepsilon(x) \cdot M(\varepsilon^{-1}x) V^\varepsilon(x) dx \geq \int_{\Omega \times \square} V^0(x, \xi) \cdot M(\xi) V^0(x, \xi) dx d\xi. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА свойств компактности и среднего значения даны, например, в [9]. Приведем краткий вывод неравенства (13). Пусть $\Omega_1, \dots, \Omega_m$, $m < \infty$, – произвольные липшицевы подобласти Ω такие, что $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ при $i \neq j$, и пусть

$$\Phi(x, \xi) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(x) \psi_i(\xi), \quad 0 \leq \varphi_i \in C_0^\infty(\Omega), \quad \text{supp } \varphi_i \in \Omega_i, \quad \psi_i \in L^2_{\text{per}}(\square)^N.$$

Из очевидного неравенства

$$0 \leq \int_{\Omega} (V^\varepsilon - \Phi(x, \varepsilon^{-1}x)) \cdot M(\varepsilon^{-1}x) (V^\varepsilon - \Phi(x, \varepsilon^{-1}x)) dx,$$

пользуясь свойством среднего значения и двумасштабной сходимостью $V^\varepsilon(x)$, выведем

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} V^\varepsilon \cdot M(\varepsilon^{-1}x) V^\varepsilon dx &\geq - \int_{\Omega \times \square} \Phi(x, \xi) \cdot M(\xi) \Phi(x, \xi) dx d\xi \\ &+ \int_{\Omega \times \square} V^0(x, \xi) \cdot M(\xi) \Phi(x, \xi) dx d\xi + \int_{\Omega \times \square} \Phi(x, \xi) \cdot M(\xi) V^0(x, \xi) dx. \end{aligned}$$

Поскольку функции $\Phi(x, \xi)$ указанной структуры образуют всюду плотное множество в $L^2(\Omega, L^2_{\text{per}}(\square)^N)$, то это неравенство верно для $\Phi \equiv V^0$, откуда и следует (13).

Покажем теперь, что при двумасштабной сходимости можно говорить о сохранении краевых условий Синьорини, задающих двухсторонние препятствия по n_0 направлениям.

ЛЕММА 1. *Предположим, что условия Синьорини на S_0^ε задают двухсторонние препятствия по n_0 направлениям, $0 < n_0 \leq n$, а $v^\varepsilon \in H^1(\Omega)^{n_0}$ – ограниченная последовательность такая, что $v^\varepsilon \cdot \hat{\nu}(\varepsilon^{-1}x)|_{S_0^\varepsilon} \leq 0$. Тогда найдется элемент $v^1(x, \xi) \in L^2(\Omega, H_{\text{per}}^1(\square)^{n_0})$ такой, что $v^1(x, \xi) \cdot \hat{\nu}(\xi)|_{\xi \in \sigma_0} \leq 0$ и по подпоследовательности*

$$\varepsilon^{-1}v^\varepsilon \xrightarrow{2} v^1(x, \xi), \quad \nabla_x v^\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla_\xi v^1(x, \xi). \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала установим равномерные неравенства типа Фридрикса

$$\|v\|_{0, \square_k}^2 \leq C_k \|\nabla_\xi v\|_{0, \square_k}^2 \quad \forall v(\xi) \in H^1(\square_k)^{n_0}, \quad v|_{\sigma_0} \cdot \hat{\nu}(\xi) \leq 0, \quad (15)$$

$$\|v^\varepsilon\|_{0, \Omega}^2 \leq C\varepsilon^2 \|\nabla_x v^\varepsilon\|_{0, \Omega}^2 \quad \forall v^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega)^{n_0}, \quad v^\varepsilon|_{S_0^\varepsilon} \cdot \hat{\nu}(\varepsilon^{-1}x) \leq 0, \quad (16)$$

где $\square_k =]-k, k[$, $k \geq 1$. Допустим, что (15) не верно. Тогда найдется последовательность $w^m(\xi) \in H^1(\square_k)^{n_0}$, для которой

$$w^m|_{\sigma_0} \cdot \hat{\nu}(\xi) \leq 0, \quad \|w^m\|_{0, \square_k} = 1, \quad \|\nabla_\xi w^m\|_{0, \square_k} \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

В силу неравенства Пуанкаре и компактности вложения $H^1(\square_k) \subset L^2(\square_k)$ найдутся постоянный вектор $\eta^0 \in \mathbb{R}^{n_0}$ и подпоследовательность $m' \rightarrow \infty$ такие, что

$$\|w^{m'} - \eta^0\|_{1, \square_k} \rightarrow 0, \quad \|\eta^0\|_{0, \square_k} = 1.$$

По теореме о следе имеем $\eta^0 \cdot \hat{\nu}(\xi) \leq 0$ п.в. на σ_0 и, следовательно, $\eta^0 \in \widehat{\mathcal{M}}^0$, что противоречит условию $\widehat{\mathcal{M}}^0 = \{0\}$. Тем самым, (15) доказано.

Рассмотрим куб $Q \supset \overline{\Omega}$ и линейный оператор продолжения $P: H^1(\Omega)^{n_0} \rightarrow H^1(Q)^{n_0}$, для которого

$$\|Pu\|_{0, Q} \leq c\|u\|_{0, \Omega}, \quad \|Pu\|_{1, Q} \leq c\|u\|_{1, \Omega}$$

с постоянной c , не зависящей от u . Покроем Q малыми ε -кубами вида $\varepsilon(z + \square_k)$ так, чтобы точки z имели целочисленные координаты, а число ε -кубов, пересекающихся с любым заданным ε -кубом, не зависело от ε . Неравенство (16) легко устанавливается применением к Pv^ε в каждом из ε -кубов, покрывающих Ω , оценки, которая получается из (15) заменой переменных $\xi = \varepsilon^{-1}x$.

В силу неравенства (16) и свойства компактности (iii) (см. (11)) из ограниченной последовательности

$$v^\varepsilon \in H^1(\Omega)^{n_0}, \quad v^\varepsilon \cdot \hat{\nu}(\varepsilon^{-1}x)|_{S_0^\varepsilon} \leq 0,$$

можно выделить подпоследовательность, для которой имеет место сходимость (14). Остается показать, что $v^1(x, \xi) \cdot \hat{\nu}(\xi)|_{\xi \in \sigma_0} \leq 0$.

По лемме 4.3 из [5] для ограниченной липшицевой области G и заданной функции $\alpha(\xi) \in L^\infty(\partial G)$ найдутся векторное поле $b(\xi) \in L^\infty(G)^n$ и функция $q(\xi) \in L^\infty(G)$ такие, что соотношения $\text{div}_\xi b = q$ в G и $b \cdot \nu_{\partial G} = \alpha$ на ∂G выполняются в смысле интегрального тождества¹

$$\int_{\partial G} \alpha(\xi) \Phi(\xi) dS = \int_G \Phi(\xi) q(\xi) d\xi + \int_G b(\xi) \cdot \nabla_\xi \Phi d\xi \quad \forall \Phi \in H^1(G). \quad (17)$$

¹Этот факт хорошо известен для достаточно гладких G и $\alpha(\xi)$, когда поле $b(\xi)$ можно взять достаточно гладким, $q = \text{const}$, а указанные соотношения выполняются в классическом смысле.

Пользуясь этим утверждением для $G = \omega_\square$ и взяв произвольную $\psi(\xi) \in L_{\text{per}}^\infty(\partial\omega)$ такую, что $\psi(\xi) \geq 0$ на $\partial_0\omega$, $\psi(\xi) = 0$ на $\partial\omega \setminus \partial_0\omega$, построим матрицу $\mathbf{B}(\xi) \in L_{\text{per}}^\infty(\omega)^{n \times n_0}$ (из n столбцов и n_0 строк) и вектор-столбец $\mathbf{Q}(\xi) \in L^\infty(\omega)^{n_0}$, для которых

$$\operatorname{div}_\xi \mathbf{B} = \mathbf{Q} \quad \text{в } \omega_\square, \quad \mathbf{B}(\xi)\boldsymbol{\nu}(\xi)|_{\sigma_0} = \psi(\xi)\widehat{\boldsymbol{\nu}}(\xi), \quad \mathbf{B}(\xi)\boldsymbol{\nu}(\xi)|_{\partial\omega_\square \setminus \sigma_0} = \mathbf{0}$$

в смысле интегрального тождества, являющегося матричным аналогом (17). Здесь $\operatorname{div}_\xi \mathbf{B}$ и $\mathbf{B}\boldsymbol{\nu}$ – векторы-столбцы размерности n_0 с компонентами $\partial B_{ij}/\partial \xi_j$ и $B_{ij}\nu_j$ соответственно. Из указанного интегрального тождества, периодически продолжив $\mathbf{B}$ и $\mathbf{Q}$ на ω и взяв любую $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, получим

$$\begin{aligned} \int_{S_0^\varepsilon} \varphi(x) \psi(\varepsilon^{-1}x) \mathbf{v}^\varepsilon \cdot \widehat{\boldsymbol{\nu}}(\varepsilon^{-1}x) dS_x &= \int_{\Omega^\varepsilon} \varphi(x) \nabla_x \mathbf{v}^\varepsilon : \mathbf{B}(\varepsilon^{-1}x) dx \\ &+ \varepsilon^{-1} \int_{\Omega^\varepsilon} \varphi(x) \mathbf{v}^\varepsilon \cdot \operatorname{div}_\xi \mathbf{B}(\varepsilon^{-1}x) dx + \int_{\Omega^\varepsilon} \mathbf{v}^\varepsilon \cdot \mathbf{B}(\varepsilon^{-1}x) \nabla_x \varphi dx, \end{aligned}$$

где знак $:$ означает скалярное произведение матриц $\mathbf{B} = \{B_{ij}\}$ и $\nabla \mathbf{v}^\varepsilon = \{\partial v_i^\varepsilon / \partial x_j\}$ со столбцами $j = 1, \dots, n$ и строками $i = 1, \dots, n_0$.

Переходя в этом равенстве к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ по построенной подпоследовательности, для которой выполнено (14), и учитывая условие $\mathbf{v}^\varepsilon \cdot \widehat{\boldsymbol{\nu}}(\varepsilon^{-1}x)|_{S_0^\varepsilon} \leq 0$, получим

$$0 \geq \int_{\Omega \times \omega_\square} \varphi(x) \mathbf{B}(\xi) : \nabla_\xi \mathbf{v}^1(x, \xi) dx d\xi + \int_{\Omega \times \omega_\square} \varphi(x) \mathbf{v}^1 \cdot \operatorname{div}_\xi \mathbf{B}(\xi) dx d\xi.$$

Отсюда в силу упомянутого интегрального тождества типа (17) для $\mathbf{B}$ и $\mathbf{Q} = \operatorname{div}_\xi \mathbf{B}$ находим, что

$$\int_{\Omega \times \sigma_0} \varphi(x) \psi(\xi) \mathbf{v}^1(x, \xi) \cdot \widehat{\boldsymbol{\nu}}(\xi) dx dS_\xi \leq 0.$$

Это означает, что $\mathbf{v}^1(x, \xi) \cdot \widehat{\boldsymbol{\nu}}(\xi)|_{\xi \in \sigma_0} \leq 0$, так как $\varphi \geq 0$, $\psi \geq 0$ произвольны.

Для продолжения вектор-функций с области Ω^ε на не зависящий от ε куб $Q \supset \overline{\Omega}$ будем использовать линейные операторы

$$\begin{aligned} P_\varepsilon : H_0^1(\Omega^\varepsilon, \Gamma^\varepsilon)^n &\rightarrow H_0^1(Q)^n, \quad \sup_\varepsilon \|P_\varepsilon\| < \infty, \\ P_\varepsilon \mathbf{u}(x) &= \mathbf{0} \quad \text{при п.в. } x \in Q \setminus \Omega, \text{ для которых } \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geq 4\sqrt{n}\varepsilon. \end{aligned} \tag{18}$$

Кроме того, нам потребуется равномерное неравенство Корна

$$\|\mathbf{v}\|_{1, \Omega^\varepsilon} \leq C \|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|_{0, \Omega^\varepsilon} \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega^\varepsilon, \Gamma^\varepsilon)^n. \tag{19}$$

В случае гладких границ $\partial\Omega$ и $\partial\omega$ достаточно общей структуры существование операторов P_ε и неравенство Корна установлены в [4, гл. 1, теоремы 4.3, 4.5]. В рассматриваемой ситуации, когда Ω^ε , Ω и $\omega_\square = \omega \cap]0, 1[^n$ – липшицевы области, эти факты нетрудно вывести из результатов [5, § 3] о продолжениях и неравенствах Корна.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\mathcal{W} &= \{\mathbf{w}(\xi) \in H_{\text{per}}^1(\omega)^n : \mathbf{w}(\xi) \cdot \boldsymbol{\nu}(\xi)|_{\sigma_0} \leq 0\}, \quad \mathbf{H} = H_0^1(\Omega)^n \times L^2(\Omega, \mathbb{H}), \\ \mathbb{H} &= H_{\text{per}}^1(\omega)^n / \mathbb{R}^n, \quad \mathbb{W} = \{\mathbf{W}(\xi) \in \mathbb{H} : \exists \mathbf{w} \in \mathcal{W}, \nabla_\xi \mathbf{w} = \nabla_\xi \mathbf{W}\}, \\ \mathfrak{L}^2(\Omega, \mathbb{W}) &= \{\mathbf{W}(x, \xi) \in L^2(\Omega, \mathbb{H}) : \mathbf{W}(x, \cdot) \in \mathbb{W} \text{ п.в. в } \Omega\}.\end{aligned}\quad (20)$$

Элементами пространства $\mathbf{H}$ являются пары вида $\{\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1\} = \{\mathbf{v}^0(x), \mathbf{v}^1(x, \xi)\}$, где $\mathbf{v}^0(x) \in H_0^1(\Omega)^n$, $\mathbf{v}^1(x, \xi) \in L^2(\Omega, \mathbb{H})$. Для этих элементов определим матрицы

$$\mathbf{E}\{\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1\} = \mathbf{e}_x(\mathbf{v}^0) + \mathbf{e}_\xi(\mathbf{v}^1).$$

Установим теорему об усреднении для задачи (3) с условиями Синьорини на S_0^ε , задающими двухсторонние препятствия по n_0 направлениям, $0 < n_0 < n$ (см. рис. 1(b)). В этом случае

$$\mathcal{M}^0 = \{\boldsymbol{\eta} = {}^t(\hat{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}) : \hat{\boldsymbol{\eta}} = \hat{\mathbf{0}} \in \mathbb{R}^{n_0}\},$$

а

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^0 &= \{\mathbf{v} = {}^t(\hat{\mathbf{0}}, \tilde{\mathbf{v}}) \in H_0^1(\Omega)^n\}, \\ \mathcal{W} &= \{\mathbf{w}(\xi) = {}^t(\tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{w}}) \in H_{\text{per}}^1(\omega)^n : \tilde{\mathbf{w}}(\xi) \cdot \tilde{\boldsymbol{\nu}}(\xi)|_{\sigma_0} \leq 0\}.\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathbf{u}^\varepsilon$ – последовательность решений задачи (3) с условиями Синьорини на S_0^ε , задающими двухсторонние препятствия по n_0 направлениям, $0 < n_0 < n$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ для решений, их градиентов и энергий имеет место сходимость

$$P_\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon \xrightarrow{L^2(\Omega)} \mathbf{u}^0(x), \quad \nabla_x P_\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla_x \mathbf{u}^0(x) + \nabla_\xi \mathbf{u}^1(x, \xi), \quad (21)$$

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon) : \mathcal{A}(\varepsilon^{-1}x) \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon) dx \rightarrow \int_{\Omega \times \omega_\square} \mathbf{E}\{\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1\} : \mathcal{A}(\xi) \mathbf{E}\{\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1\} dx d\xi, \quad (22)$$

где $\{\mathbf{u}^0(x), \mathbf{u}^1(x, \xi)\}|_{\Omega \times \omega} \in \mathcal{V}^0 \times \mathfrak{L}^2(\Omega, \mathbb{W})$ – единственное решение следующей задачи для вариационного неравенства: для любого элемента $\{\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1\} \in \mathcal{V}^0 \times \mathfrak{L}^2(\Omega, \mathbb{W})$

$$\int_{\Omega \times \omega_\square} \mathbf{E}\{\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1\} : \mathcal{A}(\xi) \mathbf{E}\{\mathbf{v}^0 - \mathbf{u}^0, \mathbf{v}^1 - \mathbf{u}^1\} dx d\xi \geq |\omega_\square| \int_\Omega \mathbf{f} \cdot (\mathbf{v}^0 - \mathbf{u}^0) dx. \quad (23)$$

Решение $\{\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1\}$ имеет вид $\{\mathbf{u}^0(x), \mathbf{U}(\mathbf{e}_x(\mathbf{u}^0), \xi)\}$, где $\mathbf{U}(\mathbf{p}, \xi) \in \mathbb{W}$ для любой постоянной матрицы $\mathbf{p} \in \mathbb{M}^n$ является единственным решением задачи на ячейке

$$\int_{\omega_\square} \mathbf{e}_\xi(\mathbf{U}) : \mathcal{A}(\xi) \mathbf{e}_\xi(\mathbf{V} - \mathbf{U}) d\xi \geq - \int_{\omega_\square} \mathbf{p} : \mathcal{A}(\xi) \mathbf{e}_\xi(\mathbf{V} - \mathbf{U}) d\xi \quad \forall \mathbf{V} \in \mathbb{W}. \quad (24)$$

Кроме того, на $\mathbf{U}(\mathbf{p}, \xi)$ достигается

$$\inf_{\mathbf{V} \in \mathbb{W}} \langle (\mathbf{p} + \mathbf{e}_\xi(\mathbf{V})) : \mathcal{A}(\xi) (\mathbf{p} + \mathbf{e}_\xi(\mathbf{V})) \rangle_\omega \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}(\mathbf{p}). \quad (25)$$

Компонента $\mathbf{u}^0(x) \in \mathcal{V}^0$ является решением следующей задачи на минимум:

$$\inf_{\mathbf{v}^0 \in \mathcal{V}^0} \left\{ \int_\Omega \mathbb{A}(\mathbf{e}_x(\mathbf{v}^0)) dx - 2 \int_\Omega \mathbf{v}^0 \cdot \mathbf{f} dx \right\}. \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь (3), (1) и равномерным неравенством Корна (19), получаем равномерную оценку $\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{1,\Omega^\varepsilon} \leq C\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}$. Учитывая свойства операторов продолжения (18), неравенство (16) и лемму 1, мы видим, что $P_\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon$ – ограниченная последовательность в $H^1(\Omega)^n$, из которой можно выделить подпоследовательность такую, что для некоторого $\{\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1\}$ имеет место (21), причем $\{\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1\}|_{\Omega \times \omega} \in \mathcal{V}^0 \times \mathcal{W}$. Покажем, что $\{\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1\}|_{\Omega \times \omega}$ является решением задачи (23). Для этого запишем (3) в виде

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon) : \mathcal{A}^\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{v}^\varepsilon) dx - \int_{\Omega^\varepsilon} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}^\varepsilon dx \geq \int_{\Omega^\varepsilon} \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon) : \mathcal{A}^\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon) dx - \int_{\Omega^\varepsilon} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^\varepsilon dx \quad (27)$$

и возьмем

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^\varepsilon &= \mathbf{v}^0(x) + \varepsilon \mathbf{v}^1(x, \varepsilon^{-1}x), \quad \mathbf{v}^0 \in \mathcal{V}^0, \quad \mathbf{v}^1(y, \xi) = \sum_{s=1}^m \varphi_s(y) \mathbf{w}^s(\xi), \\ 0 &\leq \varphi_s \in C_0^\infty(\Omega), \quad \text{supp } \varphi_s \subset \Omega_s, \quad \mathbf{w}^s(\xi) \in \mathcal{W}, \quad s = 1, \dots, m < \infty, \end{aligned} \quad (28)$$

где Ω_s – взаимно непересекающиеся липшицевы подобласти Ω . Очевидно, что $\mathbf{v}^\varepsilon \in \mathcal{V}^\varepsilon$. Перейдем к пределу в (27) по найденной подпоследовательности (21), учитывая при этом равенство $\mathbf{e}_x(\mathbf{v}^\varepsilon(x)) = \mathbf{e}_x(\mathbf{v}^0) + \varepsilon \mathbf{e}_y(\mathbf{v}^1(y, \xi)) + \mathbf{e}_\xi(\mathbf{v}^1(y, \xi))$ при $y = x$, $\xi = \varepsilon^{-1}x$, свойство среднего значения (12) и неравенство (13) при $\mathbf{V}^\varepsilon(x) = \mathbf{e}_x(\mathbf{u}^\varepsilon)$, $\mathbf{V}^0 = \mathbf{e}_x(\mathbf{u}^0) + \mathbf{e}_\xi(\mathbf{u}^1)$, $\mathbf{M}(\xi) = \chi_\omega(\xi) \mathcal{A}(\xi)$ (здесь $\chi_\omega(\xi)$ – характеристическая функция ω). Получим

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega \times \omega_\square} (\mathbf{e}_x(\mathbf{u}^0) + \mathbf{e}_\xi(\mathbf{u}^1)) : \mathcal{A}(\xi) (\mathbf{e}_x(\mathbf{v}^0) + \mathbf{e}_\xi(\mathbf{v}^1(x, \xi))) dx d\xi - |\omega_\square| \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}^0 dx \\ &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega^\varepsilon} \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon) : \mathcal{A}(\varepsilon^{-1}x) \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon) dx - \int_{\Omega^\varepsilon} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^\varepsilon dx \right) \\ &\geq \int_{\Omega \times \omega_\square} (\mathbf{e}_x(\mathbf{u}^0) + \mathbf{e}_\xi(\mathbf{u}^1)) \mathcal{A}(\xi) (\mathbf{e}_x(\mathbf{u}^0) + \mathbf{e}_\xi(\mathbf{u}^1)) dx d\xi - |\omega_\square| \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^0 dx. \end{aligned} \quad (29)$$

Пользуясь неравенством (15), нетрудно проверить, что $\mathbb{W}$ есть замкнутый выпуклый конус в $\mathbb{H}$. Можно также показать², что $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{W})$ есть замкнутый выпуклый конус в $L^2(\Omega, \mathbb{H})$, а функции $\mathbf{v}^1(x, \xi)$ вида (28) всюду плотны в $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{W})$. Следовательно, неравенство (29) выполняется для любого элемента $\{\mathbf{v}^0(x), \mathbf{v}^1(x, \xi)\} \in \mathcal{V}^0 \times \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{W})$, откуда и вытекает (23), а также сходимость энергий (22) (по подпоследовательности).

Покажем, что решение $\{\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1\}$ задачи (23) единственно. Для этого установим следующее неравенство типа Корна для элементов $\mathbf{H}$:

$$\|\mathbf{v}^0\|_{1,\Omega} + \|\nabla_\xi \mathbf{v}^1\|_{0,\Omega \times \omega_\square} \leq C \|\mathbf{e}_x(\mathbf{v}^0) + \mathbf{e}_\xi(\mathbf{v}^1)\|_{0,\Omega \times \omega_\square} \quad \forall \{\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1\} \in \mathbf{H}. \quad (30)$$

²Для доказательства нужно рассмотреть соответствующие ступенчатые функции в Ω со значениями в $\mathbb{W}$ и воспользоваться тем, что среднее значение от функции, принимающей значения в замкнутом выпуклом множестве, принадлежит этому множеству; см. [10, гл. 4, § 4, следствие 4 теоремы 39.]

Воспользуемся неравенствами Корна (см. [4, гл. 1, теоремы 2.1 и 2.8])

$$\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \leq C_0 \|e_x(\mathbf{v})\|_{0,\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n, \quad (31)$$

$$\|\mathbf{w} - \langle \mathbf{w} \rangle_\omega\|_{1,\omega_\square} \leq C_1 \|e_\xi(\mathbf{w})\|_{0,\omega_\square} \quad \forall \mathbf{w} \in H_{\text{per}}^1(\omega)^n. \quad (32)$$

Покажем, что найдется постоянная $C > 0$, для которой выполнено неравенство

$$|\mathbf{p}|^2 + \int_{\omega_\square} |e_\xi(\mathbf{w})|^2 d\xi \leq C \int_{\omega_\square} |\mathbf{p} + e_\xi(\mathbf{w})|^2 d\xi \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbb{S}^n, \quad \forall \mathbf{w} \in H_{\text{per}}^1(\omega)^n. \quad (33)$$

Предположив противное, т.е. можем построить последовательности $\mathbf{p}^m \in \mathbb{S}^n$ и $\mathbf{w}^m \in H_{\text{per}}^1(\omega)^n$ такие, что $\mathbf{p}^m \rightarrow \mathbf{p}^0 \in \mathbb{S}^n$ при $m \rightarrow \infty$ и

$$\int_{\omega_\square} |\mathbf{p}^m + e_\xi(\mathbf{w}^m)|^2 d\xi \rightarrow 0, \quad |\mathbf{p}^m|^2 + \int_{\omega_\square} |e_\xi(\mathbf{w}^m)|^2 d\xi = 1, \quad \langle \mathbf{w}^m \rangle_\omega = 0. \quad (34)$$

Поэтому

$$\|\mathbf{p}^0 + e_\xi(\mathbf{w}^m)\|_{0,\omega_\square} \rightarrow 0,$$

откуда в силу (32) следует, что $\{\mathbf{w}^m\}$ – последовательность Коши в $H_{\text{per}}^1(\omega)^n$ и, значит, $\mathbf{w}^m \rightarrow \mathbf{w}^0$ для некоторого вектора $\mathbf{w}^0 \in H_{\text{per}}^1(\omega)^n$. Итак, учитывая равенство $\mathbf{p}^0 = e_\xi(\mathbf{p}^0 \boldsymbol{\xi})$ при $\boldsymbol{\xi} = {}^t \boldsymbol{\xi}$, получаем

$$0 = \int_{\omega_\square} |\mathbf{p}^0 + e_\xi(\mathbf{w}^0)|^2 d\xi = \int_{\omega_\square} |e_\xi(\mathbf{p}^0 \boldsymbol{\xi} + \mathbf{w}^0)|^2 d\xi.$$

Следовательно, имеем жесткое перемещение $\mathbf{p}^0 \boldsymbol{\xi} + \mathbf{w}^0 = \mathbf{Q} \boldsymbol{\xi} + \mathbf{b}$, т.е. $\mathbf{Q}$ – кососимметрическая матрица с постоянными элементами, а $\mathbf{b}$ – постоянный вектор. Пользуясь тем, что $\mathbf{w}^0$ периодична и имеет нулевое среднее значение, заключаем, что $\mathbf{w}^0 \equiv \mathbf{0}$, а также $\mathbf{p}^0 = \mathbf{0}$. Это противоречит (34), и, тем самым, неравенство (33) доказано.

Из (33) нетрудно вывести следующее неравенство для $\{\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1\} \in \mathbf{H}$:

$$\int_{\Omega} |e_x(\mathbf{v}^0)|^2 dx + \int_{\Omega \times \omega_\square} |e_\xi(\mathbf{v}^1)|^2 dx d\xi \leq C \int_{\Omega \times \omega_\square} |e_x(\mathbf{v}^0) + e_\xi(\mathbf{v}^1)|^2 dx d\xi.$$

Отсюда, пользуясь неравенствами Корна (31), (32), получаем (30).

Теперь если $\{\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1\}$ – разность двух решений задачи (23), то очевидно, что

$$\|\mathbf{E}\{\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1\}\|_{0,\Omega \times \omega_\square} = 0,$$

а в силу (30) и $\{\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1\} = \mathbf{0} \in \mathbf{H}$.

Итак, решение задачи (23) единственно, и если приведшие к (21) рассуждения применить к любой подпоследовательности $\mathbf{u}^\varepsilon$, можно заключить, что (21) имеет место для всей последовательности.

Как упомянуто выше, множество $\mathbb{W}$ является замкнутым выпуклым конусом в $\mathbb{H}$ и справедливо неравенство Корна (32). Поэтому минимизируемый функционал в (25) коэрцитивен и, значит, задачи (24) и (25) имеют единственное решение $\mathbf{U}(\mathbf{p}, \xi)$ для любой постоянной матрицы $\mathbf{p} \in \mathbb{M}^n$ (см. [3, гл. 2]). Из (24) легко получаем оценку

$$\|\mathbf{U}(\mathbf{p}^1, \xi) - \mathbf{U}(\mathbf{p}^2, \xi)\|_{\mathbb{H}} \leq C|\mathbf{p}^1 - \mathbf{p}^2|,$$

которая означает, что $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{U}(\mathbf{p}, \cdot)$ – непрерывное по Липшицу отображение из $\mathbb{M}^n$ в $\mathbb{H}$.

Предположим, что матрица $\mathbf{p}$ в (24) зависит от $x \in \Omega$ как от параметра, причем $\mathbf{p} = \mathbf{p}(x) \in L^2(\Omega, \mathbb{M}^n)$. Тогда

$$\mathbf{u}(x, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{U}(\mathbf{p}(x), \xi) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{W}).$$

Взяв при этом $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, \xi) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{W})$ в (24) и интегрируя (24) по $x \in \Omega$, мы видим, что $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, \xi) = \mathbf{U}(\mathbf{p}(x), \xi)$ является решением следующей задачи: для заданной $\mathbf{p} = \mathbf{p}(x) \in L^2(\Omega, \mathbb{M}^n)$ найти $\mathbf{u} \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{W})$ такую, что для любого $\mathbf{v} \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{W})$

$$\int_{\Omega \times \omega_{\square}} e_{\xi}(\mathbf{u}) : \mathcal{A}(\xi) e_{\xi}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, dx \, d\xi \geq - \int_{\Omega \times \omega_{\square}} \mathbf{p}(x) : \mathcal{A}(\xi) e_{\xi}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, dx \, d\xi. \quad (35)$$

Нетрудно видеть, что эта задача имеет ровно одно решение и на нем достигается

$$\inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{W})} \int_{\Omega \times \omega_{\square}} (e_{\xi}(\mathbf{v}) + \mathbf{p}(x)) : \mathcal{A}(\xi) (e_{\xi}(\mathbf{v}) + \mathbf{p}(x)) \, dx \, d\xi. \quad (36)$$

Заметим, что решение $\{\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1\}$ задачи (23) является единственным элементом, на котором достигается минимум функционала

$$J(\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1) = \int_{\Omega \times \omega_{\square}} (e_x(\mathbf{v}^0) + e_{\xi}(\mathbf{v}^1)) : \mathcal{A}(\xi) (e_x(\mathbf{v}^0) + e_{\xi}(\mathbf{v}^1)) \, dx \, d\xi - 2|\omega_{\square}| \int_{\Omega} \mathbf{v}^0 \cdot \mathbf{f} \, dx$$

на $\mathcal{V}^0 \times \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{W})$. Пусть $I(\mathbf{p}, \mathbf{v})$ – минимизируемый интеграл в (36), а $\mathbf{U}(\mathbf{p}, \xi)$ – решение задачи на ячейке (25). Тогда для любой $\{\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1\} \in \mathcal{V}^0 \times \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{W})$ имеем

$$J(\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1) \geq I(e_x(\mathbf{v}^0(x)), \mathbf{U}(e_x(\mathbf{v}^0), \xi)) - 2|\omega_{\square}|(\mathbf{v}^0, \mathbf{f})_{0, \Omega} \geq J(\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1), \quad (37)$$

где первое неравенство имеет место, так как $\mathbf{u}(x, \xi) = \mathbf{U}(e_x(\mathbf{v}^0), \xi)$ является решением задачи на минимум (36) при $\mathbf{p}(x) = e_x(\mathbf{v}^0(x))$; второе неравенство в (37) верно, поскольку на $\{\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1\}$ достигается минимум функционала $J(\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1)$. Из (37) очевидным образом вытекает, что $\{\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1\} = \{\mathbf{u}^0(x), \mathbf{U}(e_x(\mathbf{u}^0), \xi)\}$, а $\mathbf{u}^0 \in \mathcal{V}^0$ является единственным решением следующей задачи на минимум:

$$\inf_{\mathbf{v}^0 \in \mathcal{V}^0} \{I(e_x(\mathbf{v}^0(x)), \mathbf{U}(e_x(\mathbf{v}^0), \xi)) - 2|\omega_{\square}|(\mathbf{v}^0, \mathbf{f})_{0, \Omega}\}, \quad (38)$$

причем в силу (25) при $\mathbf{p} = \mathbf{e}_x(\mathbf{v}^0)$ имеем

$$I(\mathbf{e}_x(\mathbf{v}^0), \mathbf{U}(\mathbf{e}_x(\mathbf{v}^0), \xi)) = |\omega_{\square}| \int_{\Omega} \mathbb{A}(\mathbf{e}_x(\mathbf{v}^0)) dx.$$

Таким образом, $\mathbf{u}^0$ является единственным решением задачи на минимум (26).

Отметим, что мы фактически доказали существование и единственность решения усредненной задачи (26), не описывая в явном виде свойств усредненного лагранжиана $\mathbb{A}(\mathbf{p})$, имеющего вид (25). Нетрудно показать, что $\mathbb{A}(\mathbf{p})$ – выпуклая функция $\mathbf{p}$, положительно однородная второго порядка (ср. с квадратичной формой (9), задающей усредненный тензор упругости в случае $\dim \mathcal{M}^0 = n$).

Вернемся теперь к классу краевых условий Синьорини на S_0^ε с n направлениями выхода, когда, как показано в [1], усредненная задача имеет вид (8). Этот класс можно несколько расширить, допустив не только случай $\dim \mathcal{M}^0 = n$ (как на рис. 1 (а)), но и случай $0 < \dim \mathcal{M}^0 < n$, при условии, что $\mathcal{M}^0$ становится n -мерным, если из $\partial\omega$ устранить бесконечно малую окрестность некоторого множества нулевой емкости на $\partial\omega$ (т.е. снять все краевые условия на соответствующей части S_0^ε). Пример таких краевых условий дан на рис. 1 (с), где условия Синьорини ставятся на полуокружности и, будучи сняты вблизи точки A , соответствуют n -мерному конусу малого раствора. Покажем, что в этом случае усредненная задача совпадает с (8). Сначала напомним некоторые факты относительно множеств нулевой емкости.

По определению, множество $\gamma \subset Q = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| < R\}$ имеет нулевую емкость, $\text{cap } \gamma = 0$, если

$$\inf_{\varphi} \|\nabla \varphi\|_{0,Q}^2 = 0 \quad \text{для } \varphi \in C^\infty(\overline{Q}), \quad \|\varphi\|_{0,Q} = 1, \quad \varphi \equiv 0 \text{ в окрестности } \gamma.$$

Нетрудно показать, что условие $\text{cap } \gamma = 0$ эквивалентно наличию последовательности функций $\varphi_\delta(\xi)$ со следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \psi_\delta \in C^\infty(\overline{Q}), \quad 0 \leq \psi_\delta \leq 1, \quad \psi_\delta(\xi) = 0, \quad \text{если } \text{dist}(\xi, \gamma) < \delta, \\ \psi_\delta \rightarrow 1 \text{ в } H^1(Q) \text{ при } \delta \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Для ограниченной липшицевой области G из этих соотношений легко следует, что если $\gamma \subset \partial G$ и $\text{cap } \gamma = 0$, то

$$\psi_\delta u \xrightarrow{H^1(G)} u \quad \text{при } \delta \rightarrow 0 \quad \forall u \in H^1(G) \cap L^\infty(G). \quad (40)$$

Как известно, нулевую емкость имеет липшицева поверхность $\gamma \subset \partial G$ меньшей размерности, чем ∂G , т.е. $\dim \gamma \leq n - 2$. Если γ – точка в $\mathbb{R}^2$, например $\gamma = \{0\}$, то можно взять

$$\psi_\delta(\xi) = \varphi\left(\frac{\ln(\delta^{-1}|\xi|)}{\ln(1 + \delta^{-1/2})}\right),$$

где $\varphi(t)$ – произвольная гладкая функция на $\mathbb{R}^1$ такая, что $\varphi \geq 0$, $\varphi(t) = 0$ при $t \leq 0$, $\varphi(t) = 1$ при $t \geq 1$. Нетрудно построить аналогичные функции ψ_δ для достаточно гладких поверхностей размерности $\leq n - 2$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть либо $\dim \mathcal{M}^0 = n$, либо имеется множество $\gamma \subset \partial \square \omega$, $\text{сар } \gamma = 0$, такое, что для любой достаточно малой δ -окрестности γ , обозначаемой γ_δ , и некоторых векторов $\alpha^0 \in \mathcal{M}^0$, $\eta^0 \in \mathbb{R}^n$, не зависящих от δ , выполнены условия

$$\dim \mathcal{M}^\delta = n, \quad \mathcal{M}^\delta = \bigcap_{\xi \in \sigma_0 \setminus \gamma_\delta} \mathcal{M}_\xi, \quad (41)$$

$$\alpha^0 + \rho \mathbf{B}_{\eta^0} \subset \mathcal{M}^\delta \quad \forall \rho \in [0, \rho_\delta], \quad \mathbf{B}_{\eta^0} = \{\eta : |\eta^0 - \eta| \leq 1\}, \quad \rho_\delta > 0.$$

Тогда выполнено утверждение теоремы 1 при $\mathcal{V}^0$ вида (6) и $\mathbb{W} = \mathbb{H} = H_{\text{per}}^1(\omega)^n / \mathbb{R}^n$. При этом $\mathbf{U}(\mathbf{p}, \xi)$ линейно зависит от $\mathbf{p} \in \mathbb{M}^n$, усредненный лагранжиан $\mathbb{A}(\mathbf{p})$ совпадает с квадратичной формой (9) и задачу (26) можно записать в виде (8) с тем же тензором $\hat{\mathbf{A}}$. Таким образом, условия Синьорини на S_0^ε влияют только на предельное множество допустимых перемещений $\mathcal{V}^0$, а не на усредненный тензор упругости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что при условиях теоремы множество $\mathbb{W}$ вида (20) всюду плотно в $\mathbb{H}$ (в отличие от $\mathbb{W}$ в теореме 1, где оно было замкнутым подмножеством в $\mathbb{H}$).

Пусть $\Psi \in C_{\text{per}}^\infty(\bar{\omega})^n$ и $C_\Psi = \sup_{\bar{\omega}} |\Psi|$. Из (41) вытекает, что для всех $\rho \in [0, \rho_\delta]$ и всех $\xi \in \partial \omega$ имеем

$$\alpha^0 + C_\Psi^{-1} \rho (C_\Psi \eta^0 + \Psi(\xi)) \in \mathcal{M}^\delta.$$

Поскольку $\text{сар } \gamma = 0$, мы можем построить функции $\psi_\delta(\xi) \in C_{\text{per}}^\infty(\bar{\omega})$, удовлетворяющие условиям (39), (40) при $Q = \omega_\square = G$. Так как $\psi_\delta(\xi)$ принимает значения на $[0, 1]$ и равна нулю в δ -окрестности γ , то

$$\alpha^0 + C_\Psi^{-1} \rho \psi_\delta(\xi) (C_\Psi \eta^0 + \Psi(\xi)) \in \mathcal{M}^0 \quad \text{для всех } \xi \in \partial \omega.$$

Отсюда следует, что $\Psi_\delta = C_\Psi \rho_\delta^{-1} \alpha^0 + \psi_\delta (C_\Psi \eta^0 + \Psi) \in \mathcal{W}$ ввиду (7). В силу (40) имеем

$$\|\nabla(\Psi_\delta - \Psi)\|_{0, \omega_\square} = \|\nabla((1 - \psi_\delta)(C_\Psi \eta^0 + \Psi))\|_{0, \omega_\square} \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0.$$

Поскольку классы эквивалентности элементов $\Psi \in C_{\text{per}}^\infty(\bar{\omega})^n$ плотны в $\mathbb{H}$, очевидно, что $\overline{\mathbb{W}} = \mathbb{H}$.

Далее доказательство проводится по схеме, использованной в теореме 1. Множество $\mathcal{V}^0$ имеет вид (6), поскольку для любой последовательности $\mathbf{v}^\varepsilon \in H^1(\Omega)^n$ такой, что $\mathbf{v}^\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{v}^0$ в $H^1(\Omega)^n$, имеем сходимость

$$\varepsilon \int_{S_0^\varepsilon} |(\mathbf{v}^\varepsilon, \boldsymbol{\nu}(\varepsilon^{-1}x))^+|^2 dS_x \rightarrow \int_{\Omega \times \sigma_0} |(\mathbf{v}^0, \boldsymbol{\nu}(\xi))^+|^2 dx d\xi.$$

В случае гладкой $\partial \omega$ довольно общего вида эта сходимость устанавливается точно так же, как лемма 4 в [11], а в рассматриваемом здесь случае липшицевой $\partial \omega$ ее нетрудно доказать на основе результатов [5, § 4]. Линейная зависимость $\mathbf{U}(\mathbf{p}, \xi)$ от $\mathbf{p}$ и квадратичная структура лагранжиана $\mathbb{A}(\mathbf{p})$ вытекают из равенства $\overline{\mathbb{W}} = \mathbb{H}$.

Заметим, что утверждение теоремы 1, доказанное при $0 < n_0 < n$, верно и при $n_0 = n$ (условия Синьорини задают двухсторонние препятствия по всем направлениям), но в этом случае $\mathbf{u}^0 \equiv \mathbf{0}$, $\mathbf{u}^1 \equiv \mathbf{0}$. Тем не менее, и в этой ситуации можно доказать нетривиальный результат об усреднении. Для этого в пространстве $L^2(\Omega, H_{\text{рег}}^1(\omega)^n)$ рассмотрим замкнутый выпуклый конус $\mathfrak{L}^2(\Omega, \mathcal{W})$, состоящий из функций со значениями в множестве $\mathcal{W}$ из (20).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathbf{u}^\varepsilon(x)$ – решение задачи (3) с условиями Синьорини на S_0^ε , задающими двухсторонние препятствия по всем n направлениям. Тогда

$$\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{0, \Omega^\varepsilon} \leq C_0 \varepsilon^2, \quad \|\nabla \mathbf{u}^\varepsilon\|_{0, \Omega^\varepsilon} \leq C_1 \varepsilon, \quad (42)$$

$$\varepsilon^{-2} P_\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon \xrightarrow{2} \mathbf{u}^1(x, \xi) \text{ (по подпоследовательности)}, \quad \varepsilon^{-1} \nabla P_\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla_\xi \mathbf{u}^1(x, \xi), \quad (43)$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega^\varepsilon} \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon) : \mathcal{A}(\varepsilon^{-1}x) \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon) dx \rightarrow \int_{\Omega \times \omega_\square} \mathbf{e}_\xi(\mathbf{u}^1) : \mathcal{A}(\xi) \mathbf{e}_\xi(\mathbf{u}^1) dx d\xi, \quad (44)$$

где $\mathbf{u}^1(x, \xi)|_{\Omega \times \omega} \in \mathfrak{L}^2(\Omega, \mathcal{W})$ – решение следующей задачи: для любого $\mathbf{v}(x, \xi) \in \mathfrak{L}^2(\Omega, \mathcal{W})$

$$\int_{\Omega \times \omega_\square} \mathbf{e}_\xi(\mathbf{u}^1) : \mathcal{A}(\xi) \mathbf{e}_\xi(\mathbf{v} - \mathbf{u}^1) dx d\xi \geq \int_{\Omega \times \omega_\square} \mathbf{f}(x) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}^1) dx d\xi. \quad (45)$$

Если решение $\mathbf{u}^1(x, \xi)$ задачи (45) единственно, то сходимость (43) для $\varepsilon^{-2} P_\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon$ имеет место для всей последовательности; в противном случае предельные решения $\mathbf{u}^1(x, \xi)$ и $\tilde{\mathbf{u}}^1(x, \xi)$ отличаются слагаемым $\boldsymbol{\eta}(x) \in L^2(\Omega)^n$, для которого $(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{f})_{L^2(\Omega)^n} = 0$ и $\tilde{\mathbf{u}}^1(x, \xi) = \mathbf{u}^1(x, \xi) + \boldsymbol{\eta}(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3), (19), (16) и леммы 1 выводим равномерные оценки (42) и сходимости (43) для подпоследовательности и некоторого $\mathbf{u}^1(x, \xi) \in \mathfrak{L}^2(\Omega, \mathcal{W})$. Далее поступаем, слегка изменив схему, использованную в доказательстве теоремы 1. А именно, записав неравенство (3) в виде (27) и разделив его на ε^2 , возьмем $\mathbf{v}^\varepsilon = \varepsilon^2 \mathbf{v}^1(x, \varepsilon^{-1}x) \in \mathcal{V}^\varepsilon$, где $\mathbf{v}^1(x, \xi)$ того же вида, что в (28). Перейдем в получившемся неравенстве к пределу по построенной подпоследовательности, учитывая (43), (42) и (13) при $\mathbf{V}^\varepsilon = \varepsilon^{-1} \times \mathbf{e}_x(\mathbf{u}^\varepsilon)$, $\mathbf{V}^0 = \mathbf{e}_\xi(\mathbf{u}^1)$. Получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \times \omega_\square} \mathbf{e}_\xi(\mathbf{u}^1(x, \xi)) : \mathcal{A}(\xi) \mathbf{e}_\xi(\mathbf{v}^1(x, \xi)) dx d\xi - \int_{\Omega \times \omega_\square} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}^1(x, \xi) dx d\xi \\ & \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega^\varepsilon} \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon) : \mathcal{A}(\varepsilon^{-1}x) \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon) dx - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega^\varepsilon} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^\varepsilon dx \right) \\ & \geq \int_{\Omega \times \omega_\square} \mathbf{e}_\xi(\mathbf{u}^1) : \mathcal{A}(\xi) \mathbf{e}_\xi(\mathbf{u}^1) dx d\xi - \int_{\Omega \times \omega_\square} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^1(x, \xi) dx d\xi. \end{aligned}$$

Поскольку конечные суммы $\mathbf{v}^1(x, \xi)$ образуют всюду плотное множество в $\mathfrak{L}^2(\Omega, \mathcal{W})$, это неравенство верно для любой $\mathbf{v}^1(x, \xi) \in \mathfrak{L}^2(\Omega, \mathcal{W})$. Отсюда следует, что $\mathbf{u}^1(x, \xi)$ – решение задачи (45) и имеет место сходимость энергий (44). Если $\mathbf{u}^1(x, \xi)$ – единственное

решение, то очевидно, что доказанные сходимости имеют место для всей последовательности. Если же задача имеет несколько решений, нетрудно показать, что любое из них имеет вид суммы $u^1(x, \xi)$ и вектора $\eta(x) \in L^2(\Omega)^n$, для которого $(f, \eta)_{L^2(\Omega)^n} = 0$.

Некоторые другие задачи усреднения для упругих тел с нелинейными краевыми условиями (типа трения или “живых сил” на изрезанной или перфорированной части границы) рассмотрены в работах [1], [5], [11], [12].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Yosifian G. A. Some homogenization problems for the system of elasticity with nonlinear boundary conditions in perforated domains // Appl. Anal. 1999. V. 71. P. 379–411.
- [2] Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
- [3] Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
- [4] Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: Изд-во МГУ, 1990.
- [5] Иосифьян Г. А. О некоторых односторонних краевых задачах для упругих тел с изрезанной границей // Тр. семинара И. Г. Петровского. 1999. Т. 21. С. 240–297; (см. также Preprint № 99-18 (SFB 359) IWR, <http://www.iwr.uni-heidelberg.de>.) Univ. Heidelberg, 1999.
- [6] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов и интегральных функционалов. М.: Физматгиз, 1993.
- [7] Nguetseng G. A general convergence result for a functional related to homogenization // SIAM J. Math. Anal. 1980. V. 20. P. 608–623.
- [8] Allaire G. Homogenization and two-scale convergence // SIAM J. Math. Anal. 1992. V. 23. P. 1482–1518.
- [9] Жиков В. В. Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 7. С. 31–72.
- [10] Шварц Л. Анализ. М.: Мир, 1972.
- [11] Yosifian G. A. On some homogenization problems in perforated domains with nonlinear boundary conditions // Appl. Anal. 1997. V. 65. P. 257–288.
- [12] Yosifian G. A. Homogenization of some contact problems for the system of elasticity in perforated domains // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 2001. V. 105. P. 37–64.

Институт проблем механики РАН
E-mail: yosifian@mtu-net.ru

Поступило
14.01.2002