Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Балашов, О геометрической разности многозначных отображений, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 2, 163–169

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm730>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 15:24:17

УДК 517.977.8

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ РАЗНОСТИ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

М. В. Балашов

Получен аналог конечномерной теоремы о полунепрерывности сверху геометрической разности непрерывных многозначных отображений для сепарабельных банаховых пространств. Получены достаточные условия непрерывности геометрической разности многозначных отображений в конечномерном пространстве без предположения об условии “непустой внутренней”. Приведены примеры, показывающие неулучшаемость полученных результатов.

Библиография: 5 названий.

1. Введение. Геометрическая разность является важной теоретико-множественной операцией, имеющей большое значение в выпуклом анализе и в линейных дифференциальных играх.

Наиболее существенным для приложений является вопрос о сохранении непрерывности (или полунепрерывности) геометрической разности непрерывных (полунепрерывных) многозначных отображений. Этим вопросам посвящена данная статья.

Пусть $\mathcal{T}$ – метрическое пространство, $\mathcal{Y}$ – векторное полное метрическое пространство с инвариантной относительно сдвигов метрикой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Геометрической разностью* множеств A и B из векторного пространства $\mathcal{Y}$ называется множество

$$A \stackrel{*}{-} B = \{x \mid x + B \subset A\}.$$

Напомним определения полунепрерывности многозначных отображений (см. определения 1, 2 гл. 3, § 1 из [1], а также [2]).

Многозначное отображение $F: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{Y}$ называется *полунепрерывным сверху* (пн. св.) в точке $t_0 \in \mathcal{T}$, если для любой окрестности $N(F(t_0))$ множества $F(t_0)$ существует окрестность $U(t_0)$ точки t_0 такая, что для всех $t \in U(t_0)$ имеет место вложение $F(t) \subset N(F(t_0))$.

Многозначное отображение $F: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{Y}$ называется *полунепрерывным снизу* (пн. сн.) в точке $t_0 \in \mathcal{T}$, если для любой точки $y_0 \in F(t_0)$ и для любой окрестности $N(y_0)$ точки y_0 существует окрестность $U(t_0)$ точки t_0 такая, что для всех $t \in U(t_0)$ $F(t) \cap N(y_0) \neq \emptyset$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 98-01-00645).

Будем говорить, что многозначное отображение *пн. св.* (соответственно *сн.*) в слабой топологии пространства $\mathcal{Y}$ (или просто *слабо пн.*), если определения пн. св. (сн.) выполнены для любой слабой окрестности $N(F(t_0))$ (соответственно $N(y_0)$).

Пусть $B_\varepsilon(0) = \{x \in \mathcal{Y} \mid \varrho(0, x) \leq \varepsilon\}$ – ε -шар метрического пространства $\mathcal{Y}$. Мы будем пользоваться также определением ε -пн. св. и пн. сн.; именно, будем говорить, что отображение $F: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{Y}$ ε -пн. св. в точке t_0 , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists U(t_0) \forall t \in U(t_0) \quad F(t) \subset F(t_0) + B_\varepsilon(0);$$

отображение $F: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{Y}$ ε -пн. сн. в точке t_0 , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists U(t_0) \forall t \in U(t_0) \quad F(t_0) \subset F(t) + B_\varepsilon(0).$$

Под непрерывностью F в точке t_0 мы будем понимать пн. св. и пн. сн. в точке t_0 .

Под непрерывностью в метрике Хаусдорфа мы будем понимать ε -пн. св. и сн.

Приведем известные случаи, когда геометрическая разность (полу)непрерывна.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1 [2, §4, теорема 3, пример 4]. Пусть $F, G: \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$ – многозначные отображения с компактными значениями, причем F ε -пн. св., а G ε -пн. сн. на $\mathcal{T}$ и $H(t) = F(t) \stackrel{*}{\ast} G(t) \neq \emptyset$ для всех t . Тогда отображение $H(t)$ пн. св. Из непрерывности F и G не следует непрерывность H .

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.2 [3], [2, §4, следствие 3 теоремы 3, теорема 7]. Пусть $F, G: \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$ – многозначные отображения с компактными значениями, непрерывные в точке $t_0 \in \mathcal{T}$, и $F(t)$ имеет выпуклые значения для всех t . Пусть $\text{int}(F(t_0) \stackrel{*}{\ast} G(t_0)) \neq \emptyset$ (т.н. условие “непустой внутренности”). Тогда $F(t) \stackrel{*}{\ast} G(t)$ непрерывно в точке t_0 .

При сохранении условия “непустоты внутренности” и звездности множества $F(t) \stackrel{*}{\ast} G(t)$ можно отказаться от выпуклости $F(t)$, потребовав, чтобы

$$\exists w > 0 \forall t \exists v_0 > w \forall v \in (0, v_0) \quad (F(t) + B_v(0)) \stackrel{*}{\ast} B_v(0) = F(t).$$

В работе рассматриваются новые свойства непрерывности операции геометрической разности многозначных отображений с ограниченными значениями в сепарабельных банаховых пространствах и в $\mathbb{R}^n$.

В случае сепарабельного банахова пространства, снабженного слабой топологией, показано, что геометрическая разность двух многозначных отображений при определенных условиях полунепрерывна сверху.

В конечномерном случае получены достаточные условия, при которых геометрическая разность двух многозначных отображений непрерывна без условия “непустоты внутренности”.

2. Полунепрерывность сверху разности многозначных отображений в банаховых пространствах. Отметим, что для многозначного отображения с компактными значениями понятия пн. и ε -пн. в метрическом пространстве совпадают.

ЛЕММА 2.1. Пусть $F: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{Y}$ – многозначное отображение.

Если F пн. св. в точке t_0 , то оно ε -пн. св. в точке t_0 . Обратное верно, если $F(t_0)$ – компакт.

Если F ε -пн. сн. в точке t_0 , то оно пн. сн. в точке t_0 . Обратное верно, если $F(t_0)$ – компакт.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение о связи пн. св. с ε -пн. св. доказано в замечании главы 3 §1 из [1].

Пусть $y_0 \in F(t_0)$ и $N(y_0)$ – окрестность y_0 . Найдется окрестность точки t_0 $U(t_0)$ такая, что

$$\forall t \in U(t_0) \quad y_0 \in F(t_0) \subset F(t) + B_\varepsilon(0)$$

и $B_\varepsilon(y_0) \subset N(y_0)$. Из этих условий получаем, что для всех $t \in U(t_0)$ выполняется условие

$$F(t) \cap N(y_0) \supset F(t) \cap B_\varepsilon(y_0) \neq \emptyset.$$

Пусть F пн. св. в точке t_0 . Допустим, что

$$\exists \varepsilon > 0 \exists t_k \rightarrow t_0 \exists y_k \in F(t_0) \quad \varrho(y_k, F(t_k)) \geq \varepsilon. \quad (2.1)$$

Так как $F(t_0)$ – компакт, то без ограничения общности $y_k \rightarrow y_0 \in F(t_0)$. В силу определения пн. св. существует k_0 такое, что для всех $k > k_0$ расстояние $\varrho(y_0, F(t_k)) \leq \varepsilon/2$. Имеем

$$\varepsilon \leq \varrho(y_k, F(t_k)) \leq \varrho(y_k, y_0) + \varrho(y_0, F(t_k)),$$

что противоречит (2.1) при больших k .

Графиком многозначного отображения $F: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{Y}$ называется множество

$$\text{gf } F = \{(t, x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{Y} \mid t \in \mathcal{T}, x \in F(t)\}.$$

ЛЕММА 2.2 [1, гл. 3, §1, следствие 9]. Пусть многозначное отображение $F: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{Y}$ имеет замкнутый график и пространство $\mathcal{Y}$ компактно. Тогда F полунепрерывно сверху.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\mathcal{T}$ – полное метрическое пространство, E – сепарабельное банахово пространство. Пусть $F, G: \mathcal{T} \rightarrow E$ – многозначные отображения такие, что образы F и G слабо компактны в E , F слабо пн. св. в E , G слабо пн. св. в E . Пусть для всех $t \in \mathcal{T}$ множество $H(t) = F(t) \stackrel{*}{-} G(t) \neq \emptyset$ и образ $H(\mathcal{T})$ содержится в слабо компактном множестве. Тогда отображение H пн. св. на $\mathcal{T}$ в слабой топологии E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть τ – топология в $\mathcal{T}$, τ_w – слабая топология в E .

Поскольку E сепарабельно, то в силу теоремы 3 главы V §6 из [4] пространство E можно снабдить инвариантной относительно сдвигов метрикой ϱ такой, что топология τ_1 , индуцированная этой метрикой, слабее топологии τ_w и совпадает с топологией τ_w на слабых компактах из E .

Пусть $B_\varepsilon(0) = \{x \in E \mid \varrho(0, x) \leq \varepsilon\}$.

Покажем, что график отображения H замкнут в пространстве $(\mathcal{T} \times E, \tau \times \tau_1)$.

Пусть $(t_k, x_k) \in \text{gf } H; t_k \rightarrow t_0 \in \mathcal{T}, x_k \rightarrow x_0 \in E$.

Из полунепрерывности F и G в слабой топологии и того, что τ_1 слабее τ_w , следует, что F и G пн. в топологии τ_1 .

Из τ_w -компактности значений F и G следует их τ_1 -компактность.

По лемме 2.1 отображение F ε -пн. св., а отображение G ε -пн. св. в τ_1 топологии пространства E .

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Имеем

$$\begin{aligned} x_k + G(t_k) &\subset F(t_k) \quad \forall k, & G(t_0) &\subset G(t_k) + B_\varepsilon(0) \quad \forall k \geq k_2(\varepsilon), \\ x_0 &\in x_k + B_\varepsilon(0) \quad \forall k \geq k_1(\varepsilon), & F(t_k) &\subset F(t_0) + B_\varepsilon(0) \quad \forall k \geq k_3(\varepsilon). \end{aligned}$$

Взяв $k > \max_{1 \leq i \leq 3} k_i(\varepsilon)$, получаем, что

$$x_0 + G(t_0) \subset F(t_0) + \sum_{i=1}^3 B_\varepsilon(0).$$

Так как последнее включение имеет место для любых $\varepsilon > 0$, а $\{B_\varepsilon(0)\}_{\varepsilon > 0}$ – локальная база нуля в (E, τ_1) и $F(t_0)$ τ_1 -замкнуто, то $x_0 \in H(t_0)$. Мы получили, что $\text{gf } H$ замкнут в $(\mathcal{T} \times E, \tau \times \tau_1)$.

Так как $H(\mathcal{T})$ содержится по условию в слабом компакте, а топологии τ_1 и τ_w на этом слабом компакте совпадают, то график $\text{gf } H$ замкнут в $(\mathcal{T} \times E, \tau \times \tau_w)$. Отсюда по лемме 2.2 получаем, что H слабо полунепрерывно сверху в любой точке $t \in \mathcal{T}$.

3. Непрерывность разности многозначных отображений в $\mathbb{R}^n$. Напомним, что выпуклая функция на $\mathbb{R}^n$ непрерывна на любом относительно открытом подмножестве эффективного множества функции. Однако выпуклая полунепрерывная снизу функция может не быть полунепрерывной сверху на относительной границе своей области определения (см. [5, гл. II, §10]).

Условимся называть множество $S \subset \mathbb{R}^n$ *локально симплицциальным*, если для всех $x \in S$ найдется конечное число симплексов $S_1, \dots, S_m$, содержащихся в S и таких, что для некоторой окрестности U точки x имеет место равенство

$$U \cap \left(\bigcup_{i=1}^m S_i \right) = U \cap S.$$

ЛЕММА 3.1 [5, гл. II, §10, теорема 10.2]. Пусть f – выпуклая функция в $\mathbb{R}^n$ и S – произвольное локально симплицциальное подмножество из эффективного множества f . Тогда f полунепрерывна сверху на S .

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть выпуклый компакт F имеет вид $F = P \cap Q$, где $P \subset \mathbb{R}^n$ – многогранник, а $Q \subset \mathbb{R}^n$ – строго выпуклый компакт (в частности, F может быть многогранником). Пусть $G(t)$ – непрерывное (в метрике Хаусдорфа) многозначное отображение с компактными значениями такое, что $H(t) = F \stackrel{*}{-} G(t) \neq \emptyset$. Тогда многозначное отображение $H(t)$ непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полунепрерывность сверху $H(t)$ следует из теоремы 2.1. Докажем полунепрерывность $H(t)$ снизу (пн. сн.).

Допустим, в точке t_0 условие пн. сн. нарушается, т.е.

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \exists x \in H(t_0), \exists t_k \rightarrow t_0 : \quad x \notin H(t_k) + B_{\varepsilon_0}(0). \quad (3.1)$$

Пусть $x_k \in H(t_k)$. Так как

$$\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset F - \bigcup_{k=1}^\infty G(t_k),$$

тов силу ограниченности последовательности x_k можно без ограничения общности считать, что $x_k \rightarrow x_0 \neq x$. Поскольку $H(t)$ пн. св., то $x_0 \in H(t_0)$. Далее будем без ограничения общности считать, что $x_0 = 0$. Пусть $G_1(t_k) = G(t_k) + x_k$, $H_1(t_k) = F \overset{*}{\ast} G_1(t_k)$, $0 \leq k \leq \infty$.

Из условия (3.1) и сходимости $x_k \rightarrow 0$ получаем, что, начиная с некоторого K_0 , для всех $k > K_0$, $k \neq 0$, выполнено

$$x \notin H_1(t_k) + B_{\varepsilon_0/2}(0). \quad (3.2)$$

Отметим, что $x \neq 0$.

Разложим $\mathbb{R}^n$ в прямую сумму: $\mathbb{R}^n = L \oplus \text{lin}[x]$. Здесь L есть $(n-1)$ -мерное подпространство. Без ограничения общности можно считать вектор $-x$ сонаправленным с n -й декартовой координатной осью Ox_n . Пусть π есть ортогональный проектор на L .

Введем выпуклую функцию f , действующую из $\pi F \subset L$ в Ox_n и задаваемую формулой $f(w) = \min\{\mu: (w, \mu) \in F\}$. Легко видеть, что $f(w) = \max\{f_P(w), f_Q(w)\}$, где $f_P: \pi P \rightarrow Ox_n$, $f_P(w) = \min\{\mu: (w, \mu) \in P\}$, а $f_Q: \pi Q \rightarrow Ox_n$, $f_Q(w) = \min\{\mu: (w, \mu) \in Q\}$.

Покажем, что функции f_P и f_Q непрерывны на πP и πQ соответственно.

Полунепрерывность снизу функций f_P и f_Q непосредственно следует из замкнутости лебеговых множеств функций f_P и f_Q [5, гл. II, §7, теорема 7.1].

Поскольку πP есть многогранник и, следовательно, локально симплицальное множество (см. [5, гл. II, §10]), то по лемме 3.1 функция f_P полунепрерывна сверху на множестве πP .

Покажем полунепрерывность сверху функции f_Q на множестве πQ . Достаточно проверить пн. св. на относительной границе множества πQ . От противного: пусть существуют $w \in \partial_{\pi} \pi Q$, $\delta > 0$ и $w_k \rightarrow w$, $w_k \in \pi Q$, такие, что $\lim_{k \rightarrow \infty} f_Q(w_k) \geq f_Q(w) + \delta$. Поскольку точки $(w_k, f_Q(w_k))$ лежат в компакте Q , то $(w_k, f_Q(w_k)) \rightarrow (w, f) \in Q$, причем $f \geq f_Q(w) + \delta$. Так как прообраз относительно граничных точек $\partial_{\pi} \pi Q$ есть граничные точки Q , то верно включение $[(w, f_Q(w)), (w, f)] \subset \partial Q$, что противоречит строгой выпуклости Q . Отсюда f_Q полунепрерывна сверху на πQ .

Из непрерывности f_P и f_Q на πP и πQ вытекает их непрерывность на $\pi F \subset \pi P \cap \pi Q$. Отсюда следует, что функция f непрерывна на πF и, следовательно, равномерно непрерывна.

В силу полунепрерывности сверху отображения $G(t)$ в точке t_0 существует бесконечно малая последовательность $\{\alpha_k\}$ такая, что

$$G_1(t_k) \subset G_1(t_0) + \alpha_k B_1(0). \quad (3.3)$$

Запишем условие равномерной непрерывности f на πF в следующем виде:

$$\forall m \exists k_m: |f(w_1) - f(w_2)| \leq \frac{1}{m} \quad \forall k \geq k_m \quad \forall w_1, w_2 \in \pi F: |w_1 - w_2| \leq \alpha_k.$$

Пусть m и $k = k_m$ выбраны так, что $k > K_0$ и $2\alpha_k + 1/m < (1/2) \min\{\varepsilon_0, |x|\}$.

Фиксируем произвольную точку $u_k \in G_1(t_k)$.

1. Если $x + u_k \in F$, то из включения $u_k \in F$ и выпуклости F следует, что $u_k + \lambda x \in F$ для всех $\lambda \in [0, 1]$.

2. Пусть $x + u_k \notin F$. Из условия (3.3) найдется $u_0^k \in G_1(t_0)$: $|u_0^k - u_k| \leq \alpha_k$. Отметим, что $u_0^k + x \in F$. Пусть $w_k = \pi u_k$, $w_0^k = \pi u_0^k$; $|w_k - w_0^k| \leq \alpha_k$. Определим вектор $z_k = (w_k, f(w_k)) - u_k - x$.

Будем говорить, что точка (w, μ) *лежит выше* (w, λ) , если $\mu \geq \lambda$.

Рассмотрим точки $x + u_k$, $(w_k, f(w_k))$, $u_0^k + x$ и $(w_0^k, f(w_0^k))$. Они лежат на параллельных прямых $\text{aff}\{u_k, u_k + x\}$ и $\text{aff}\{u_0^k, u_0^k + x\}$, причем точка $(w_k, f(w_k))$ лежит выше $u_k + x$, а $u_0^k + x$ выше $(w_0^k, f(w_0^k))$, т.е. отрезки $[x + u_k, x + u_0^k]$ и $[(w_k, f(w_k)), (w_0^k, f(w_0^k))]$ пересекаются в точке a как диагонали трапеции с вершинами в точках $x + u_k$, $(w_k, f(w_k))$, $u_0^k + x$ и $(w_0^k, f(w_0^k))$. Тогда

$$\begin{aligned} |z_k| &\leq |(w_k, f(w_k)) - a| + |a - u_k - x| \\ &\leq |w_k - w_0^k| + |f(w_k) - f(w_0^k)| + |u_k - u_0^k|. \end{aligned}$$

Отметим, что если прямые $\text{aff}\{u_k, u_k + x\}$ и $\text{aff}\{u_0^k, u_0^k + x\}$ совпадают, то $w_k = w_0^k$ и полученная выше оценка очевидна. Первое и третье слагаемые в правой части предыдущей формулы не превосходят α_k . В силу равномерной непрерывности f на компакте πF выполнена оценка $|f(w_k) - f(w_0^k)| \leq 1/m$.

Из пунктов 1 и 2 получаем, что для любого $u_k \in G_1(t_k)$

$$u_k + x - \left(\frac{1}{m} + 2\alpha_k\right) \frac{x}{|x|} \in F,$$

откуда

$$x - \left(\frac{1}{m} + 2\alpha_k\right) \frac{x}{|x|} \in H_1(t_k),$$

т.е.

$$x \in H_1(t_k) + B_{\varepsilon_0/2}(0),$$

что противоречит (3.2). Итак, $H(t)$ пн. сн.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Для любого выпуклого компакта $F \subset \mathbb{R}^2$ и для любого непрерывного многозначного отображения $G: \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$ такого, что $H(t) = F \overset{*}{\leftarrow} G(t) \neq \emptyset$, отображение $H(t)$ непрерывно.

Для доказательства заметим, что любое выпуклое множество на оси локально симплициально, откуда следует полунепрерывность сверху функции f (в обозначениях теоремы 3.1). В остальном доказательство повторяет доказательство теоремы 3.1.

ПРИМЕР 3.1. Покажем, что условия теоремы 3.1 относительно вида F существенны. Рассмотрим $\mathbb{R}^3$ со стандартной декартовой системой координат. Через со будем обозначать оператор взятия выпуклой оболочки.

Пусть $a_1 = (1, 0, 0)$, $a_2 = (-1, 0, 0)$, $a_3 = (1, 0, 1)$, $a_4 = (-1, 0, 1)$. Рассмотрим также две дуги окружности радиуса 1 радианной меры π :

$$\begin{aligned} D_1 &= \{x_3 = 0, x_1 = \cos t, x_2 = \sin t, \quad t \in [0, \pi]\}, \\ D_2 &= \{x_3 = 1, x_1 = \cos t, x_2 = \sin t, \quad t \in [\pi, 2\pi]\}. \end{aligned}$$

Пусть $F_1 = \text{co}\{a_3, a_4\} \cup D_1$, $F_2 = \text{co}\{a_1, a_2\} \cup D_2$.

$F = F_1 \cup F_2$. Легко видеть, что F выпукло и не является пересечением многогранника и строго выпуклого компакта.

Пусть $a(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $G(t) = \text{co}\{a_1, a_2, a(t)\}$.

Пусть $t \in [\pi/2, 3\pi/2]$. Имеем

$$F \stackrel{*}{\subset} G(t) = \begin{cases} \{(0, 0, 0)\}, & t \in [\pi/2, \pi); \\ \text{co}\{(0, 0, 0), (0, 0, 1)\}, & t = \pi; \\ \{(0, 0, 1)\}, & t \in (\pi, 3\pi/2]. \end{cases}$$

Итак, отображение $F \stackrel{*}{\subset} G(t)$, $t \in [\pi/2, 3\pi/2]$, не только не непрерывно, но даже не имеет непрерывного селектора.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть выпуклый компакт F имеет вид $F = P \cap Q$, где $P \subset \mathbb{R}^n$ многогранник, а $Q \subset \mathbb{R}^n$ — строго выпуклый компакт, и пусть матрица $T(t)$ размера $n \times n$ с непрерывными компонентами невырождена для всех $t \in \mathcal{T}$. Пусть $G: \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывное многозначное отображение и для всех $t \in \mathcal{T}$ $H(t) = (T(t)F) \stackrel{*}{\subset} G(t) \neq \emptyset$. Тогда многозначное отображение H непрерывно на $\mathcal{T}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G_1(t) = T^{-1}(t)G(t)$, $H_1(t) = T^{-1}(t)H(t)$.

Так как $H_1(t) + G_1(t) \subset F$ для всех $t \in \mathcal{T}$, то $H_1(t) \subset F \stackrel{*}{\subset} G_1(t)$.

Пусть $x \in F \stackrel{*}{\subset} G_1(t)$. Тогда $T(t)x + G(t) \subset T(t)F$, т.е. $T(t)x \in H(t)$, откуда $x \in H_1(t)$.

Итак, $H_1(t) = F \stackrel{*}{\subset} G_1(t)$, по теореме 3.1 $H_1(t)$ непрерывно, откуда $H(t)$ непрерывно.

ПРИМЕР 3.2. Отметим, что в теореме 3.2 нельзя отказаться от обратимости $T(t)$. Пусть $F = \text{co}\{(0, 0, 0), (0, 0, 2), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 2), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$, $T(t)$, $t \in [0, \pi/4]$, есть суперпозиция поворота на угол t вокруг оси Ox_1 (направление поворота от оси Ox_2 к Ox_3) и ортогонального проектирования на Ox_1x_2 . Пусть

$$G(t) = \text{co}\{(0, -2 \sin t, 0), (0, \cos t, 0)\}.$$

Тогда

$$T(t)F = \text{co}\{(0, \cos t, 0), (1, \cos t, 0), (1, -\sin t, 0), (0, -2 \sin t, 0)\},$$

поэтому отображение $(T(t)F) \stackrel{*}{\subset} G(t)$ не пн. сн. в нуле:

$$(T(t)F) \stackrel{*}{\subset} G(t) = \begin{cases} \{(0, 0, 0)\}, & t \in (0; \pi/4], \\ \text{co}\{(0, 0, 0), (1, 0, 0)\}, & t = 0. \end{cases}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988.
- [2] Половинкин Е.С. Элементы теории многозначных отображений. Учеб. пособие. М.: МФТИ, 1982.
- [3] Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования // Матем. сб. 1980. Т. 112. № 3. С. 307–330.
- [4] Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
- [5] Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.